RESIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA DESDE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Guadalupe Cabañas-Sánchez,
Universidad Autónoma de Guerrero México
gcabanas.sanchez@gmail.com

Resumen. Este artículo discute aspectos teóricos y metodológicos acerca de la resignificación del concepto de integral definida, desde la teoría Socioepistemología. En la resignificación de este concepto, la tríada *usos, contextos y procedimientos* es introducida con la intención de articular su explicación en torno a la noción de área, en el ámbito de una situación de aprendizaje. Los *usos* se exploran desde una perspectiva de *desarrollo de usos del área;* la noción de conservación del área, normó las acciones de un profesor y sus estudiantes mientras interactuaban con las actividades.

Palabras clave: resignificación, socioepistemología, conservación del área

Abstract. This paper discussed from the Socioepistemological approach, the theoretical and methodological aspect about the re-meaning of the definite integral concept. The triad uses, contexts and procedures in the re-meaning of this concept it is introduced to articulate its explanation around the notion of the area, in the context of a learning situation. The uses are explored from a point of view of development of uses of the area; the conservation of the area *normed* both teacher and students actions while working with the activities.

Key words: re-meaning, socioepistemology, conservation of the area

Introducción

El artículo aborda aspectos teóricos y metodológicos acerca de la resignificación del concepto de integral definida. Se estudia desde la teoría Socioepistemología, y se entiende como el proceso en que las significaciones construidas por un individuo se modifican, obedeciendo a factores contextuales y coyunturales (Cabañas-Sánchez, 2011a; 2011b). Se resignifica porque los grupos humanos somos diversos, de modo que dos grupos humanos no siempre entenderán o usarán un constructo del mismo modo. Una significación construida por los estudiantes sobre la integral definida por ejemplo, se articula a los procedimientos, en razón del privilegio del discurso matemático escolar por el desarrollo de habilidades en el uso de técnicas de integración; la resignificación busca modificar este tipo de significaciones. Esta investigación en particular, centra la resignificación de la integral definida en torno a los usos del área en la matemática sobre regiones planas, más precisamente con relación a la medición, comparación, conservación, aproximación, estimación y representación de superficies.

En la resignificación de conceptos matemáticos desde la socioepistemología, la *práctica social* es fundamental, dado que por medio de ella se formulan epistemologías del conocimiento que contribuyan a la construcción de conocimiento matemático. Esta resignificación se manifiesta en el *uso del conocimiento*, así como en su *desarrollo*, que norma la práctica social; ambas se oponen al desarrollo conceptual del conocimiento (Cordero, 2008). Los usos de este conocimiento dependen de la situación, y evolucionan atendiendo a ello.

La práctica social se comprende como normativa de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica; o aun como se señala en Radford, (2004), como "interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas" (citado en Cantoral, Farfán, 2008). La connotación que la teoría socioepistemología le da a esta noción es en el sentido de Covián (2005), quien sostiene que *la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen* (Covián, 2005, p.70).

En esta investigación, la noción de conservación del área se constituyó en práctica social, al normar las acciones de un profesor y sus estudiantes durante la resignificación de la integral definida; emergieron en ese proceso, explicaciones acerca de la *medida* del área de regiones planas asociadas a este objeto matemático, de su *forma* y la *posición relativa* respecto del plano. En este sentido, las explicaciones estuvieron centradas en los usos del área, en lugar de los procedimientos algorítmicos, importantes sin duda aunque sin ser el centro.

La noción de conservación del área

En la resignificación del concepto de integral definida la noción de conservación del área es fundamental, al constituirse en eje rector de las acciones de un profesor y sus estudiantes en ese proceso, a fin de contribuir en explicaciones sobre la medida del área de una región plana, su forma y posición relativa con respecto del plano. La conservación del área se caracteriza a partir de una transformación que deja sin cambios la medida del área de una región, significa que esta medida de área permanece sin cambios mientras las regiones de área correspondientes en el plano, pueden ser transformadas a otras cualitativamente nuevas. Se derivan de transformaciones sobre objetos geométricos o analíticos, mediante diversos procedimientos o métodos.

Usos, contextos y procedimientos

La tríada *usos, contextos y procedimientos* es introducida en esta investigación con la intención de articular una resignificación de la integral definida entorno a la noción de área, en el ámbito de una situación de aprendizaje. Los *usos* se exploran desde una perspectiva de *desarrollo de usos del área*, que surgen del estudio de una *práctica social*, la conservación del área. El estudio de los *procedimientos* y los *contextos* se estableció mediante las relaciones que guardan con el *desarrollo de usos del área*, como un medio para comprender su interacción y las características particulares de los objetos, relaciones, nociones y proposiciones matemáticas que se ponen en juego al trabajar sobre las transformaciones geométricas y analíticas (véase Tabla No. 1).

La noción *uso* se adopta en el sentido de Cabañas-Sánchez (2011a; 2012), quien la caracteriza desde el pragmatismo teórico, como *las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico*. Por *contextos* se comprende a los entornos situacionales en los que se considera un hecho, y a los *procedimientos* como las formas de organización de una situación (Cordero, 2003).

Esquema general de la resignificación de la integral definida

La formulación de un esquema fue básico en la estructuración de un desarrollo de usos del área en la resignificación de la integral definida, el cual se configuró a partir de un estudio epistemológico, didáctico y cognitivo proveniente del análisis *a priori*, asimismo, de los estudios de Piaget, Inhelder y Szeminska (1970), Freudenthal (1983), Kordaki y Potari (1998, 2002). En estas investigaciones se reporta una particular relación entre el área y la medición; de la medición y la comparación, y de todas estas con la conservación. De las investigaciones referidas al concepto de integral definida, consideramos los estudios de Cordero (2003, 2005), en los que se discute una forma de resignificación de la integral definida, como una manifestación de usos del conocimiento en el discurso matemático escolar. El desarrollo de usos desde la perspectiva de las acciones de los estudiantes, transitó por el análisis de casos particulares, que los situó a probar de forma empírica, como un primer movimiento validativo, a determinar una medida de área aproximada, para dar paso a procesos deductivos formales y con ello arribar a la definición de la integral definida. Comprendió elementos como los contextos y procedimientos en que se presenta el concepto de área en la geometría y la medición y funciones polinómicas.

	TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS	TRANSFORMACIONES ANALÍTICAS
Usos del área	Medir, comparar, **CONSERVAR**, representar regiones de áreas planas	Medir, comparar, estimar (o aproximar) y representar regiones de áreas planas **CONSERVAR**
Contextos	Polígonos convexos y no convexos	Funciones polinómicas $f(x)=kx^n$, k, n ($n>0$) continuas en un intervalo $[a,b]$.
Procedimientos	Composición y descomposición de figuras, asimetrías en el plano o bien en teoremas, axiomas, propiedades de las figuras geométricas, en relaciones matemáticas generales, así como en otros conceptos matemáticos.	Procesos de aproximación, partición del intervalo, sumas de Riemann, integral definida, fórmulas básicas para el cálculo de área.

Una forma resumida del esquema de usos del área se presenta en la tabla 1. Este fue el marco para configurar la situación de aprendizaje, medio material por el cual se resignificó la integral definida.

Desarrollo de usos de la integral definida
Desarrollo de usos I: Exploración de **usos del área** en *transformaciones geométricas*. *Contexto*: Polígonos convexos y no convexos. *Procedimientos*: Relación de paralelismo, asimetrías en el plano, composición y descomposición de polígonos, construcciones geométricas mediante diversos métodos. *Usos del área*: Medición, comparación, conservación y representación del área en regiones planas.
Desarrollo de usos II: Exploración de **usos del área** en *transformaciones analíticas*. **Sumas de Riemann** para una función polinómica de grado *n*, continua $f(x)$ y positiva en un intervalo real $[a, b]$ y con una partición. *Contexto*: La función cuadrática y sus gráficas, en el intervalo [0,1], sucesión y límite de una sucesión. *Procedimientos*: Prueba empírica (aproximación inferior y superior a la medida del área), determinación de la altura, usos de una tabla de valores aproximados, partición del intervalo en *n* partes iguales. *Usos del área*: Aproximación, medición, comparación y representación del área en regiones planas limitadas por una curva.
Desarrollo de usos III: Exploración de **usos del área** en *transformaciones analíticas*. *Contexto*: La integral definida mediante **Sumas de Riemann**. *Procedimientos*: Partición del intervalo de integración, sumas de Riemann. *Usos del área*: Aproximación, medición, comparación y representación del área en regiones planas limitadas por una curva.
Desarrollo de usos IV: Exploración de **usos del área** en *transformaciones analíticas*. *Contexto*: Funciones continuas $f(x)$ en un intervalo real $[a, b]$, gráficas. *Procedimientos*: Movimientos, uso de los significados de las operaciones básicas. *Usos del área*: Medición, conservación y comparación del área en regiones planas limitadas por una curva.
Desarrollo de usos V: Exploración de **usos del área** en *transformaciones analíticas*. *Contexto*: Funciones continuas $f(x)$ y positivas en un intervalo real $[a, b]$ y gráficas de funciones polinómicas. *Procedimientos*: Movimientos, relación de congruencia, fórmulas, integrales. *Usos del área*: Medición, conservación, comparación, y representación del área en regiones planas limitadas por una curva.

Tabla.1: Esquema general de la resignificación de la integral definida

Una situación relativa a la resignificación de la integral definida

A modo de ejemplo, se presenta una de las situaciones objeto de discusión por los estudiantes durante la resignificación de la integral definida a nivel de experiencia de aula, la cual fue planteada, posterior a su explicación. La actividad se discutió en equipo primeramente, en seguida, de forma grupal.

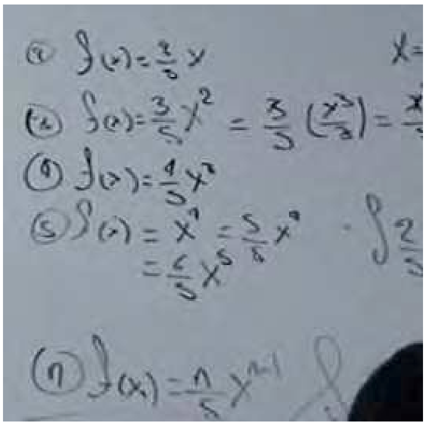
El contexto de la situación, la conservación de una medida de área de una región plana situada debajo de la curva de una función polinómicas, positiva y continuas, en un intervalo cerrado.

Actividad V.4. Una función f está definida en el intervalo [0, 1], el área bajo la curva en dicho intervalo es 1/5. Grafica dos funciones diferentes cuyo dominio sea igual al de f y el área bajo la curva en dicho intervalo sea también 1/5.

¿Qué usos del área privilegiaron los estudiantes en el proceso de resolución?

La representación gráfica de dos funciones que cumplen con las exigencias de la situación, requiere en primera instancia, la determinación por parte de los estudiantes de las expresiones analíticas correspondientes. Se observó que una mayoría logró determinar las funciones que cumplen con las exigencias y graficarlas. Es decir, buscaron funciones que al integrarlas les resultara un quinto. La primera que pensaron fue $f(x)=\frac{1}{5}$, después en $f(x)=\frac{2}{5}x$. Se dieron cuenta que al integrarla en el intervalo [0,1] obtenían un quinto, propusieron esas dos y representaron las regiones de área en cada caso.

Su método consistió en "probar" con casos particulares de funciones de la forma $f(x)=\frac{n}{5}x^{n-1}$ aunque no fueron conscientes de su trabajo con esta expresión, excepto uno de los equipos quien además, la escribió (ver figura adjunta) y la denominó "expresión general". En el caso de este equipo, se reconoce que fue hasta que trabajaron con varios casos, que identificaron una regularidad en cierto tipo de funciones. Es así que reconocieron que cualquier función de la forma $f(x)=\frac{n}{5}x^{n-1}$ cumple con la condición de que se conserva la medida del área de la región ubicada debajo de la gráfica, en el intervalo [0,1]. El primer caso que usaron fue $f(x)=\frac{1}{5}x$, seguidamente, con $f(x)=\frac{2}{5}x$.



Veamos algunos de los argumentos presentaron por los integrantes del equipo durante su interacción con el profesor.

Carlos: Encontramos una expresión general…

Profesor: ¿Pero cómo? … ¿Podrían explicarme?

José: Primero buscamos una función… efe de equis igual a un quinto de equis … y vimos que no nos daba un quinto… Entonces la multiplicamos por dos … y así encontramos que era tres quintos por equis cúbica….encontramos que es esta expresión …

Los integrantes del equipo reconocieron además, que esta expresión cumple o se conserva una medida de área, para los casos que analizaron, pero que habría que demostrarlo para ver si en verdad es una expresión general.

Otros equipos probaron inicialmente con $f(x)=\frac{1}{5}$.

Reflexiones finales

Poco se ha documentado acerca de la construcción de resignificación en el aula con relación al concepto de integral definida, en los que se ponga de relieve a la conservación del área de regiones planas ubicadas debajo de la gráfica de una función continua y positiva. En este artículo se aborda el concepto resignificación, que aun cuando no es exclusivo de la teoría socioepistemología, si da cuenta del papel que desempeña la práctica social en la reconstrucción de significados, y como ejemplo de ello, el de la integral definida, vista como área bajo una curva. En la resignificación de este concepto, la noción de conservación del área es fundamental, al constituirse en eje rector de las explicaciones de los estudiantes y de las acciones didácticas del profesor al tiempo que conservan, comparan y representan la medida del área, en contextos numéricos, geométricos y analíticos. En condiciones de enseñanza, se privilegia además, la discusión colectiva sobre el comportamiento de las funciones al analizar las regiones de área respecto de su *forma* y *posición relativa* en el plano cartesiano.

Referencias bibliográficas

Cabañas-Sánchez, G. (2011b). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Cabañas-Sánchez, G. (2011a). Prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 785-792. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Farfán, R.M. (2008). Socioepistemología y matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 740-753. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Farfán, R.M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53* (3), 255-270.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp.265-286). México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8* (3), *265-286.*

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Editorial Iberoamérica.

Covián, O.N. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la Cultura Maya*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holland: D. Riedel Publishing Company.

Kordari, M. y Potari, D. (2002). The Effect of Area Measurement Tools on Student Strategies: The Role of a Computer Microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (1), 65-100.

Kordaki, M. y Potari, D. (1998). Children´s Approaches to Area Measurement Through different Contexts. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17* (3), 303-316.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1970). *The Child´s conception of geometry*. New York: U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.