

UN PROGRAMA DE MODELACIÓN PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA: LA ESCUELA, EL TRABAJO Y LA CIUDAD

Francisco Cordero, Ruth Rodríguez, Miguel Solís
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey
Universidad Autónoma de Chiapas
fcordero@cinvestav.mx, ruthrdz@itesm.mx, solis@unach.mx

México

Resumen. Se presenta un programa de modelación con diversas aproximaciones teóricas, en el ámbito educativo de la matemática. El programa se genera en el seno del Grupo de Investigación latinoamericano denominado Modelación y Tecnología (MyT). Este grupo nace en el año 2008 con la intención de conformar una red de investigadores latinoamericanos interesados en estudiar problemáticas alrededor de la modelación desde diversas visiones teóricas. En esta ocasión discutimos el programa a la luz de dos trabajos de investigación, en regiones diferentes, para mostrar la pluralidad de las conceptualizaciones de la modelación que se pusieron en juego.

Palabras clave: modelación, tecnología, prácticas, ecuaciones diferenciales

Abstract. We present a modeling program with various theoretical approaches in the field of mathematics education. The program is generated within the Latin American Research Group called Modeling and Technology (MyT). This group was founded in 2008 with the intention of forming a network of Latin American researchers interested in studying issues around modeling from various theoretical views. The modeling research program was discussed in the light of two research papers in different regions, to show the plurality of conceptualizations of modeling that were put into play.

Key words modelling, technology, practices, differential equations

Introducción

El Grupo Modelación y Tecnología (GMyT) se conformó en el año 2008, en el marco de la Reunión de Matemática Educativa 22 (RELME 22). Los miembros que lo componen son investigadores, docentes y estudiantes de posgrado, principalmente de México y de Chile (Cordero, Suárez, Mena, Arrieta, Rodríguez, Romo, Cârsteanu y Solís, 2009). Los acercamientos al tema son diversos: la mayoría se desarrollan desde la Matemática Educativa, sin embargo algunos otros integrantes son modeladores matemáticos en la biología y en la física. Este hecho le da un carácter multidisciplinar al grupo MyT.

Esta multidisciplinaridad es una condición que ha favorecido la conformación del grupo MyT y ha permitido avanzar a la formulación de un “programa de modelación” (Cordero, 2011), en el sentido de Lakatos, el cual consiste en establecer un programa núcleo para que éste genere una secuencia de programas de investigación proveyendo de constructos en el seno de la comunidad de científicos. El programa en este caso particular reflejaría la problemática que atiende el grupo. Se pretende identificar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones cuando suceden en comunidades de conocimiento (CC) en la escuela, en el trabajo y en la ciudad. Se problematiza la relación entre los diferentes dominios de

conocimiento que obligadamente entran en juego: el discurso matemático escolar, otras disciplinas científicas y el cotidiano del ciudadano. El análisis mismo de la relación destaca dos aspectos: el estatus epistemológico de la funcionalidad del conocimiento en una situación específica y la manifestación de ese conocimiento con una intencionalidad no necesariamente científica: el cotidiano (Cordero, Mena y Montalto, 2010). Se pretende que dentro de los resultados del estudio en curso (Cordero, 2012) se brinden ampliaciones de los episodios de aprendizaje, donde se reconceptualice al estudiante en el aula como el ciudadano en su cotidiano como un referente educativo de la matemática.

Para tal fin, se concibe una problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la construcción social del conocimiento matemático, lo cual provee categorías que manifiestan la función del conocimiento matemático. Esta perspectiva ha permitido entender que las formulaciones educativas se orientan a lo que sabe un estudiante con respecto al conocimiento matemático pero no así a cómo lo usa. Las epistemologías de prácticas, de usos y de funciones son soslayadas, no son el referente educativo de la matemática. Las usanzas del conocimiento matemático no son aisladas, sino por el contrario tienen tradición, pertenecen a la cultura y a la historia de ciertas comunidades de conocimiento. En algún sentido, son la expresión de una humanización del conocimiento en cuestión.

Un referente así, obliga a ampliar la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conlleva reflexionar sobre los significados de la problemática misma y sobre las pautas para que estas construcciones intervengan y afecten a los sistemas educativos.

Se pretende entonces el conocer los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento. El estatus epistemológico de la funcionalidad y la intencionalidad no necesariamente científica, son aspectos que conformarán una categoría de conocimiento matemático $C(CM)$, expresada en los usos de ese conocimiento, los cuales se desarrollarán a través de sus resignificaciones cuando las comunidades de conocimiento alternan situaciones específicas. La $C(CM)$ será el núcleo para brindar ampliaciones de los episodios de aprendizaje, donde obligadamente el “estudiante en el aula” será reconceptualizado en el “ciudadano en su cotidiano”.

La contribución teórica de la propuesta consiste, para identificar los usos del conocimiento matemático, en generar un modelo de “Comunidad del Conocimiento” (CC) consistente con la Teoría Socioepistemológica. Este modelo se compone de una triada que caracteriza los usos del conocimiento de una comunidad ante una situación específica: reciprocidad, intimidad y localidad. Estos elementos son simultáneamente analizados en dos grandes ejes: la institucionalización del conocimiento y la identidad de la comunidad.

La Comunidad del Conocimiento (CC) es el constructo principal de un proyecto que está en curso el cual conduce a modificar el aula. Lo que sucede en el aula es finalmente una CC en una situación específica. Es la que resignifica el conocimiento en la alternancia de dominios: la escuela, el trabajo y la ciudad. Todo ello compondrá un marco de referencia para ofrecer los cambios educativos de la matemática acorde con las realidades sociales (Cordero, 2012).

Así los programas de modelación secuenciales son los siguientes:

- ❖ el uso del conocimiento matemático en el mantenimiento de rutinas y en la socialización (Zaldívar y Cordero, 2010 y Gómez y Cordero, 2010);
- ❖ en las prácticas institucionales (Cen y Cordero, 2010);
- ❖ en la integración de la tecnología escolar (Briceño y Cordero, 2010) y
- ❖ el desarrollo de redes de usos del conocimiento matemático (Méndez y Cordero, 2009);
- ❖ la matemática en el aula (Rodríguez, 2010); y
- ❖ la matemática desde la CC de la ingeniería (Solís, 2009; Morales y Cordero, 2009; Rodríguez, 2010; Mendoza y Cordero, 2011).

A continuación se presentan dos estudios que ejemplifican los programas secuenciales de la modelación desde el aula escolar con el trabajo de Rodríguez (2007, 2010, 2011 y 2012) y desde la CC de la ingeniería con el trabajo de Solís (2009).

La modelación matemática desde la comunidad de ingenieros: modelación de comportamientos gráficos como una base para significar las ecuaciones diferenciales lineales

Este estudio aborda a la modelación como práctica que construye conocimiento matemático (Solís, Hernández, Muñoz, Poirier, Ordóñez y Pérez, 2009). Hernández y Solís (2009) proponen un diseño de una secuencia didáctica que tiene como objetivo la identificación de patrones gráficos de la suma de polinomios (uno de grado n con otro de grado $n - 1$) que permitirían resignificar a las ecuaciones diferenciales. De este trabajo con profesores y estudiantes en diferentes escenarios, se ha encontrado un argumento gráfico, al que se ha denominado “Comportamiento Tendencial de las Funciones” (CTF). El CTF es una noción sui generis del carácter funcional del conocimiento matemático cuya construcción está con relación en la modelación y el uso de las herramientas matemáticas, permitiendo formular categorías del conocimiento matemático que a priori no se encuentran dentro de la estructura matemática (Cordero, 2001). Éste permite reconstruir significados en el sentido de la socioepistemología. La investigación tiene el objetivo de resignificar las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma $uy' + by = F(x)$ a través de situaciones gráficas de transformación (Solís, 2009).

En la estructura $Y(x) = Af(ax + b) + B$ la variación de los parámetros A , a , B y b definirá los comportamientos gráficos. La función $Y(x)$ es ahora una instrucción que organiza comportamientos. Esta argumentación estará ahora instalada en las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

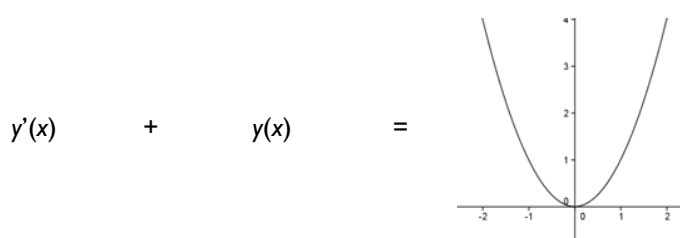
El diseño de la secuencia didáctica favorece la noción de CTF en la suma de una función y su derivada. La secuencia consta de varios momentos, en el primero, los estudiantes trabajan con operaciones gráficas sobre funciones (traslaciones y dilataciones), a través de la variación de los parámetros A , a , B y b en la estructura $Y(x) = Af(ax + b) + B$, a partir de una función prototipo $f(x)$ dada, en este caso un polinomio. En un segundo momento se trabaja con la suma de funciones (polinomios en este caso) y son cuestionados a identificar los patrones gráficos de la función suma a partir de las funciones sumandos. En el tercero se presenta el problema de sumar una función y su derivada, trasladando los observados en el momento anterior, y es entonces que se discute la estructura $ay' + by = F(x)$ que puede verse ahora como la suma de las funciones $ay'(x)$ y $by(x)$, que guardan relación entre sí, pues una es la derivada de la otra. La actividad típica en ese momento es:

En cada caso encuentra una expresión para $y(x)$ que satisfaga la ecuación:

- a) $y'(x) + y(x) = 0$
- b) $y'(x) + y(x) = 1$
- c) $y'(x) + y(x) = x$
- d) $y'(x) + y(x) = x^2$

y también gráficamente:

Bosqueja las gráficas de los sumandos, sabiendo que uno de los sumandos es la derivada del otro, esto es $y'(x) + y(x)$



Entre las conclusiones del estudio, Solís (2009) afirma que los nuevos dispositivos permiten el acceso libre a aplicaciones informáticas de matemáticas, y dado que esa disponibilidad de recursos es cada día más grande se deberá trastocar la práctica educativa de la enseñanza de la matemática.

La modelación matemática desde el aula: la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales a través de la modelación y el uso de tecnología en ambientes centrados en el estudiante

A partir de los trabajos de Rodríguez (2007 y 2010) se explora a la modelación matemática como un medio que permite enlazar situaciones de la vida real con situaciones matemáticas escolares con lo cual se pretende obtener una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. En particular se pretende analizar la implementación de situaciones diseñadas en base a la modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) dirigido a estudiantes de ingeniería.

El estudio de la modelación no es un tema nuevo en la comunidad de Matemática Educativa, tiene alrededor de 35 años. De acuerdo a Kaiser y Sriraman (2006) se pueden identificar hasta seis perspectivas diferentes desde las cuales puede ser vista la modelación matemática en el ámbito educativo. El trabajo de Rodríguez (2007 y 2010) parte de una perspectiva realística o aplicada puesto que enfatiza la importancia de la enseñanza a través de la modelación matemática como un medio pragmático para resolver problemas reales en el aula y desarrollar eventualmente competencias de modelación en la persona que aprende (Rodríguez y Quiroz, 2012).

Existen diversos autores que buscan definir a la modelación matemática, siendo una de las definiciones más completas la que exponen Blum y Niss (1990) quienes explican que la modelación matemática es un proceso en el cual se transita a partir de un problema planteado desde una situación real hasta un modelo matemático reconociendo en este último diversos registros de representación (analítico, numérico y gráfico). Aunque se tienen diversas definiciones del proceso de modelación, en este estudio se ha elegido la descripción de Rodríguez (2007) la cual es representada de manera gráfica en la figura 1:

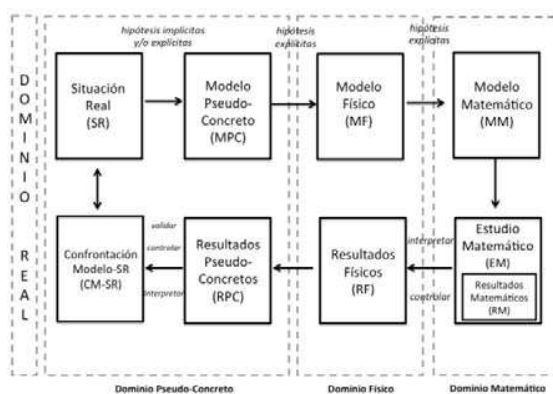


Figura 1.- Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)

Es importante enfatizar que este proceso ha sido definido en base a diversos autores (ver detalle en Rodríguez, 2007) pero en particular esta propuesta incorpora de manera explícita

dos elementos importantes a señalar: la inclusión de un dominio físico en el cual se modela (puede ser un dominio extra-matemático biológico, químico u otro) y la importancia del dominio pseudo-concreto como esa transición difícil para los estudiantes y clave en el proceso de modelación (basado en el modelo pseudo-concreto de Henry, 2001 citado en Rodríguez 2007 y 2010; este es a su vez análogo al modelo real o *real model* introducido por los trabajos anglosajones sobre modelación).

Se pretende que, en base a esta descripción de modelación, el identificar las dificultades de los alumnos al modelar contextos de mezclas de sustancias salinas en tanques de agua (Rodríguez e Illanes, 2011) así como el identificar las competencias de modelación a propósito del aprendizaje de uso de ED para modelar circuitos eléctricos RC, RL y RLC a propósito del tema de ED lineal (Rodríguez y Quiroz, 2012). Los resultados de estos trabajos permiten dar evidencias del desarrollo de competencias de modelación. Esta experiencia permite evidenciar que el diseño de actividades e implementación en base a la modelación permite dotar al objeto matemático ED de significados varios que un ambiente sin esta estrategia didáctica difícilmente podrían poner en juego.

Estudios más recientes sobre esta línea de trabajo han llevado a reflexionar en el papel de la tecnología en la enseñanza de las ED (Rodríguez e Illanes, 2011 y Rodríguez y Quiroz, 2012). En particular, y aunado a los hallazgos de Solís (2009), actualmente se deja ver el gran potencial de uso de tecnología en clase gracias a la riqueza de los diversos ambientes de aprendizaje que permitirán eventualmente modelar situaciones en contextos reales en el aula a través de las ED.

Los trabajos anteriormente presentados en este rubro ponen en evidencia la importancia de la enseñanza de las ED y de las Matemáticas a través de la modelación, sobre todo el trabajo previo del diseño de las actividades con base en las etapas del proceso previamente definidas y la importancia de llevar a los alumnos a transitar entre las diversas etapas y momentos claves de la modelación. Los diversos estudios hasta ahora realizados han permitido caracterizar las diversas competencias (matemáticas, extra-matemáticas o disciplinares, colaborativas y de discusión así como tecnológicas) que el alumno debe o puede desarrollar cuando se pretende estudiar las competencias de modelación. Además hemos podido reconocer que parte de la dificultad de implementar actividades de modelación en clase radica en el hecho de poner en juego todas esas competencias relacionadas a las de modelación pero al mismo tiempo esto evidencia la gran riqueza que genera el implementar en clase situaciones que permitan a los alumnos el modelar situaciones a través de las ED.

A manera de conclusión. Se formuló un programa núcleo de modelación y, como ejemplo, dos programas secuenciales. Debido a la riqueza de perfiles e intereses de los miembros del grupo, se espera organizar y sistematizar la gran gama de posibilidades de llevar al aula actividades de modelación. Sin embargo, el planteamiento anterior, por un lado muestra la manera en que es estudiada la modelación en el seno del Grupo de Investigación MyT, y por el otro lado muestra la conceptualización de la diversidad de perspectivas como una secuencia de programas de investigación, situación que ha permitido avanzar en la solidez de la investigación y en la conformación de una red latinoamericana plural.

Referencias bibliográficas

- Blum, W., & Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68.
- Briseño, E. y Cordero, F. (2010) Desarrollo del pensamiento variacional con el uso tecnológico en un ambiente de difusión del conocimiento. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 1003-1012. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cen, C. y Cordero, F. (2010). El uso de las graficas en el bachillerato. Una segmentación del conocimiento matemático. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 869-878. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.
- Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. R. Hernández (Coords.). *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377 – 399). Barcelona-México: Gedisa-Cinvestav.
- Cordero, F. (2012). *Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad*. Propuesta de Proyecto CONACyT Ciencia Básica 2012. Clave 0177368.
- Cordero, F., Suárez, L., Mena, J., Arrieta, J., Rodríguez, R., Romo, A., Cârsteanu, A., y Solís, M. (2009). La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1717-1725. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Cordero, F., Mena, J. y Montalto, M. (2010). *Il ruolo della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell'asintoto. l'insegnamento della Matematica*, 33B(4), 457-488.
- Gómez, K. y Cordero, F. (2010) Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 919-927.
- Hernández, P. y Solís, M. (2009). El comportamiento gráfico de la suma de funciones como argumento para resignificar las Ecuaciones Diferenciales. *Resúmenes de la Vigésima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Santo Domingo, República Dominicana, Editora Universitaria-UASD.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM* 38(3), 302–310. doi:10.1007/BF02652813
- Méndez, M. y Cordero, F. (2009). La función de la modelación en la resignificación de conocimiento matemático. *Memorias de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*,(pp. 194-209). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.
- Morales, A., y Cordero, F. (2009). La Modelación-Graficación y la Serie de Taylor en la Socioepistemología del Cálculo. *VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1043-1048). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Puerto Montt – Chile.
- Mendoza, J. y Cordero, (2011). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 77-84. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S. Sciences-New York*. Joseph Fourier Grenoble I. Recuperado el 30 de septiembre de 2012 de: <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf>
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(4-1), 191–210.
- Rodríguez, R. e Illanes, L. (2011). Modelación de Problemas de mezclas en un curso de Ecuaciones Diferenciales. *Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*,(pp. 318-325). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

- Rodríguez, R., y Quiroz, S. (2012). Modelación y tecnología en ecuacionesdiferenciales. *Memorias del VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Monterrey: Asociación Nacional de Investigadores en el uso de la tecnología en educación matemática.
- Solís, M. (2009). El comportamiento tendencial de las funciones en la resignificación de las ecuaciones diferenciales lineales: la relación entre predicción y simulación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 779-787. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Solís, M., Hernández, H., Muñoz, G., Poirier, P., Ordóñez, A. y Pérez, A. (2009). Situaciones de modelación para resignificar el conocimiento matemático en ingeniería. *Resúmenes de la Vigésima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.421-421). Santo Domingo, República Dominicana, Editora Universitaria-UASD.
- Zaldívar, J. y Cordero, F. (2010) Los usos de las gráficas en la resignificación de lo estable en un escenario de difusión de la ciencia. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 929-938. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.