



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



De la modelación concreta-dinámica al sistema matemático de signos del álgebra: Lectura/transformación de textos en la resolución de ecuaciones lineales

Minerva **Martínez** López

Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México

minemartinez2008@hotmail.com

M. Teresa **Rojano** Ceballos

Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México

rojanot@gmail.com

Resumen

Se presenta un estudio sobre la resolución de ecuaciones lineales realizado con alumnos de primero de secundaria, en el que se utiliza un modelo de la balanza en versión virtual y dinámica. Se adopta una perspectiva semiótica en la que las escenas del modelo interactivo se conciben como espacios textuales, que al ser leídos por el usuario, entran en un proceso en cadena de lectura/transformación, durante el cual hay producción de sentido. El análisis de los textos producidos por los alumnos, revela una evolución del trabajo de éstos con el sistema de signos del modelo hacia la manipulación simbólica en el sistema de signos del álgebra. Afirmamos que dicha evolución es resultado de la producción de sentido de parte de los alumnos respecto al método algebraico de resolución de las ecuaciones.

Palabra clave: Textos, espacios textuales, ecuaciones lineales, balanza virtual, semiótica.

Introducción

Los alumnos enfrentan retos y dificultades cuando se inician en el estudio del álgebra, por la limitación que tienen en el dominio de la sintaxis algebraica. Su apego al pensamiento numérico no les permite resolver ecuaciones; aún si son de tipo aritmético ($x \pm a = b$ siendo a y b números enteros y $a \geq b$). La dificultad es mayor cuando se les presenta otro tipo de ecuaciones tales como: $ax \pm b = cx \pm d$ siendo $a, b, c,$ y d números enteros, ya que para dar solución a éstas, no es suficiente la inversión de operaciones, más bien se debe entender la operación de la incógnita. Cuando el estudiante se enfrenta a éste tipo de ecuaciones, sus soluciones se sustentan en las operaciones básicas de la aritmética o simplemente no se resuelven. Investigadores como: Booth, (1984); Filloy & Rojano (1989); Gallardo, (2002); Kieran, (2006); Rojano, (1999); Sfard & Linchevsky, (1994) han demostrado que los errores sintácticos aparecen con frecuencia en los procesos de solución de estudiantes que se encuentran entre los 11-16 años.

En esta investigación el principal propósito va encaminado en analizar los procesos evolutivos de los alumnos hacia el Sistema Matemático de Signos (SMS) del álgebra, a partir de su interacción con el sistema de signos del modelo de la balanza virtual. Específicamente, interesa investigar los procesos de producción de sentido, en los actos de lectura/transformación del Espacio Textual (ET) inicial constituido por el modelo de la balanza virtual y los subsecuentes actos de lectura/transformación del Texto (T) producido.

Antecedentes

Ante la problemática que se conoce en el campo de la resolución de ecuaciones lineales, también se ha estudiado el papel que juegan los modelos “concretos” y se han reportado tanto resultados favorables (Carraher & Schliemann, 1991; Filloy & Rojano, 1989; Rojano, 1985; Vernaud & Cortés, 1986; Vlassis, 2002), como algunas dificultades, limitaciones y obstáculos que pueden presentar dichos modelos. Uno de los retos a vencer al encontrarse trabajando con modelos concretos es el arraigo al modelo, ya que en algunas ocasiones, los estudiantes no logran abstraer las acciones realizadas para recuperarlas en la resolución de ecuaciones con los métodos algebraicos. M. Bonilla (2009), en su investigación que realiza hace mención que la unidad interactiva de la balanza virtual, utilizada como herramienta para introducir al alumno al estudio del álgebra a través de la resolución de problemas con ecuaciones lineales ha sido favorable, ésta investigadora sigue la ruta didáctica que dicho modelo plantea hasta llegar a la resolución de problemas, así también, M. Martínez (2009) trabajó con el modelo de la balanza virtual, en su investigación demostró que la manipulación e interacción con dicho modelo, permite que los alumnos logren abstraer las acciones trabajadas en el modelo y las lleven a papel y lápiz, no obstante, se enfrenta a obstáculos en la operatividad de ecuaciones que presentan coeficientes negativos ya que para dar solución a éstos se observa el apego al modelo por parte de algunos de los participantes, también se tienen las soluciones negativas en el trabajo de papel y lápiz que no son aceptadas por parte de los alumnos. Algunos investigadores han señalado que las ecuaciones que incluyen sustracción de términos representan un obstáculo en el aprendizaje (Bruno & Martínón, 1997; Gallardo, 2002; Glaeser, 1981; Radford & Grenier, 1996; Vlassis, 2002, Rojano & Martínez, 2009).

En este documento se describe el análisis de las interacciones entre los alumnos y el sistema matemático de signos de un modelo de balanza virtual¹. También se hace referencia a elementos teóricos como T y ET. Refiriéndonos al modelo de la balanza como un ET, con el que interactuaron los estudiantes y dieron lugar a la producción de significado y sentido, a través del acto de lectura/transformación.

Marco de análisis.

Con la finalidad de analizar los datos obtenidos en las entrevistas y hojas de trabajo que realizaron los estudiantes participantes, se utilizó la noción de T elaborada en el trabajo de Talens & Company (1984), ésta se entiende como el resultado de un trabajo de lectura/transformación hecho sobre un ET que produce sentido en la mente del sujeto.

“El ET tiene existencia empírica, es un sistema que impone una restricción semántica a quien lo lee; el T es la nueva articulación de ese espacio, individual e irreplicable, realizado por una persona como consecuencia de un acto de lectura” (Puig, 2003).

En este estudio concebimos las escenas del modelo de la balanza virtual como una secuencia de ET, los cuales entran en proceso de lectura/transformación dando origen a nuevos T, que estarán en posición de ser leídos y transformados, así sucesivamente *ad infinitum*. Hemos adaptado elementos de la teoría sobre la relación triádica (S, O, I) de Charles Sanders Peirce, para describir esa cadena de actos de lectura/transformación. En la teoría de Peirce, tanto S como I son signos, e I es un nuevo signo S' que creará en una mente otro signo I' como interpretante del objeto O. Así O enlaza las dos tríadas (S, O, I) y (S', O, I') y de ahí se deriva como mero referente para trabajar la condición de apertura del signo en un proceso de semiosis que no tiene fin (Peirce, 1987). En nuestro trabajo, dicho proceso de semiosis se aplica a textos y no a signos como en la teoría de Peirce, lo cual nos permite hablar de cadenas del tipo T/ET/T, en las que la distinción entre T y ET es una distinción entre posiciones en un proceso, ya que T como resultado de una lectura de ET, queda en una posición de un nuevo ET para ser leído (transformado) y así, *ad infinitum* (Puig, 2003). También incorporamos la noción de Sistema Matemático de Signos (SMS), que es el producto de un proceso de abstracción progresiva en distintos momentos de la enseñanza (Fillooy, Rojano & Puig, 2008). Al realizar la lectura/transformación de un ET el alumno puede usar operaciones aritméticas, estratos del SMS del álgebra, utilizar los signos del modelo virtual y dinámico de la balanza o la combinación de todos ellos en los nuevos T producidos.

A continuación se presenta el modelo de enseñanza con el que se trabajó el estudio.

¹ Esta unidad interactiva “la balanza” fue desarrollada por el grupo de programación "Descartes" en el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa (ILCE) de México y forma parte de los materiales interactivos que la Secretaría de Educación Pública (SEP) ha distribuido en las escuelas tele-secundarias del país.

Modelo dinámico y virtual de la balanza.

Está constituido por dos tipos de balanza: balanza simple y balanza con poleas.

Balanza simple

Este tipo de balanza se utiliza para trabajar ecuaciones del tipo $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = cx + d$ siendo a , b , c y d números enteros. Dentro de esta balanza se encuentran cuatro ET los cuales llamaremos: 1) hallando el valor de la incógnita, consiste en hallar el peso desconocido colocando pesas de una unidad en el platillo del lado derecho, 2) representación de la ecuación, aquí se utilizan pesas de **x** y de **1** las cuales se colocan en los platillos de la balanza para representar la ecuación que es asignada al azar, 3) resolución de ecuaciones, aparece la ecuación representada en la balanza y se debe de tirar pesas hasta encontrar el valor de “x” y 4) resolución de ecuaciones con el uso correcto de operaciones, se tiene la balanza fija donde las acciones que se realizan aparecen desplegadas del lado derecho (ver figura 1).

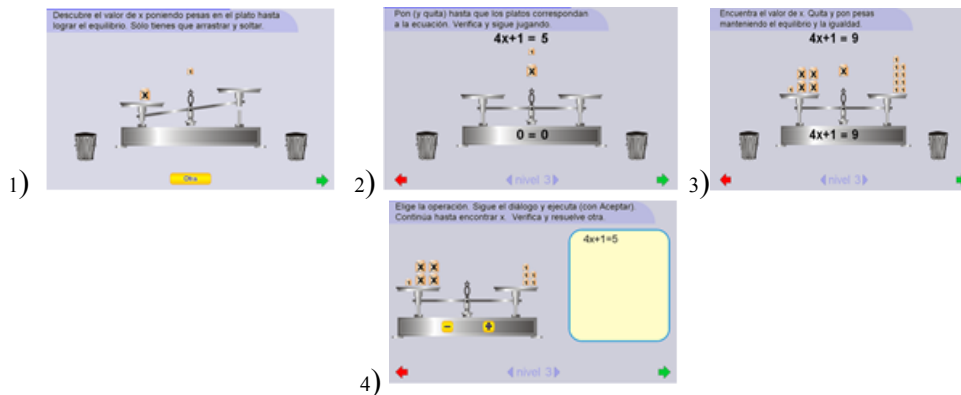


Figura 1. Las imágenes muestran los cuatro Espacios Textuales de “la balanza simple”

Balanza con poleas

Su estructura permite visualizar la “representación” correcta de una ecuación con términos negativos, ya que las poleas que la componen restan peso dando la idea de la representación de los negativos, porque los términos en sí; son todos positivos no existen pesos negativos. Esta balanza está constituida por tres ET: 5) representando la ecuación, al igual que en la balanza fija se colocan pesas de “x” o de una unidad, 6) resolviendo la ecuación, aquí el alumno puede transponer términos de derecha a izquierda y posteriormente eliminarlos para así hallar el valor de lo desconocido y 7) resolviendo la ecuación seleccionando la operación correcta, el alumno hace uso de la sintaxis algebraica utilizando la operación correcta, trabajando la ecuación como una transformación y verificando dichas transformaciones en la parte derecha. Este modelo de balanza se presta para que el alumno a través de la manipulación trabaje la transposición de términos, respetando así la metáfora del equilibrio y la eliminación de términos (ver figura 2).



Figura 2. Espacios textuales que presenta la balanza con poleas para las ecuaciones que contienen términos negativos.

Método y recolección de datos

El estudio, es de corte cualitativo con intervención, participaron ocho estudiantes de primero de secundaria, de 12 y 13 años de edad los cuales no habían recibido instrucción alguna de tipo algebraico en la resolución de ecuaciones lineales. Se trabajó un pre-cuestionario conformado por tres apartados 1) balanzas diagramáticas, 2) ítems del tipo $\square + 3 = 8$, y 3) ecuaciones del tipo $x + a = b$, $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$ (siendo a , b , c y d números enteros); la finalidad fue verificar los conocimientos y estrategias de solución que tenían los alumnos. En pantalla desplegable se explicó el funcionamiento del software y cada alumno trabajó de forma individual en la computadora, el estudio se llevó a cabo en seis sesiones. Al finalizar la enseñanza de cada sesión en el ET, se les proporcionaron hojas de trabajo las cuales fueron elaboradas con ítems de estructura semejante a la que manejan los ET trabajados. El objetivo fue conocer la evolución en el SMS del álgebra que emplea el alumno después del acto de lectura/transformación. Se aplicaron tres entrevistas. La primera se realiza después de la familiarización con el modelo y después de haber transitado por los tres primeros ET de la balanza simple (ver figura 1), esta entrevista se compone por siete ítems con estructura $x + a = b$, $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$ siendo a , b , c , y d números enteros mayores a los que se trabajaron en los ET ya mencionados. La segunda entrevista se aplicó al terminar la sesión “resolución de ecuaciones con el uso correcto de operaciones”, los ítems que lo constituyen contienen coeficientes y términos independientes con números mayores a los que presenta el ET del modelo. La tercera y última entrevista se aplica al finalizar los tres ET de la balanza con poleas, está constituida por ítems aritméticos y algebraicos con estructura que sale un poco fuera de la que se ha trabajado. El propósito general de las entrevistas, va encaminado a conocer más a fondo la ruta de pensamiento del alumno y los correspondientes SMS en los que el alumno realiza las acciones.

A continuación, se presentan resultados obtenidos en las hojas de trabajo y entrevistas de tres de los alumnos.

Análisis de resultados

Los alumnos participantes mostraron gran avance en la resolución de ecuaciones. Como resultado de los procesos de lectura/transformación del modelo, con la abstracción progresiva de un SMS lograron adquirir una sintaxis algebraica que permitió dar significado y sentido a cada uno de los nuevos T producidos por ellos mismos.

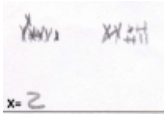
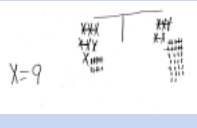
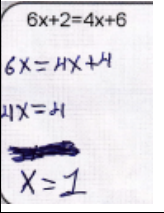
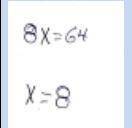
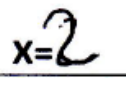
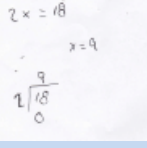

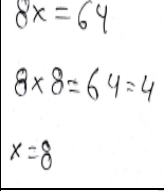
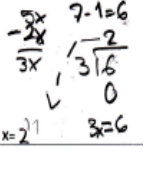
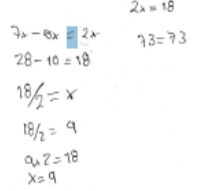
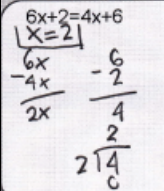
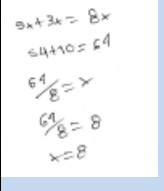
En el pre-cuestionario que se encontraba constituido por tres apartados *identificación del equilibrio, llenado del cuadro vacío y hallar el valor de la incógnita*, identificaron correctamente el equilibrio en las balanzas diagramáticas. Sus soluciones en los ítems *llenado del cuadro vacío*

($25 + \square = 85$, $\square + 188 = 53$) se sustentan en ensayo refinamiento, es decir, realizan cálculos numéricos para hallar el valor buscado. Cuando se pide *hallar el valor de la incógnita*, no hay lectura correcta en la estructura de la ecuación, por lo tanto, las ecuaciones que presentan la ocurrencia de la incógnita en ambos lados no las resuelven y mucho menos las que presentan sustracción de términos.

Trabajo con la balanza simple

Al interactuar con los ET de la balanza simple, se desencadenan procesos de lectura/transformación en los cuales hay producción de sentido en las acciones que realizan en el modelo y que posteriormente aplican al trabajo en papel y lápiz, como se muestra en la tabla 1, Jonathan realiza sus propias producciones sígnicas para dar solución a la ecuación planteada, es decir evoca los intertextos de los ET trabajados en el modelo dinámico y a su manera lo ilustra. Damaris simplemente anota el resultado que es correcto pero no deja huella del desarrollo realizado y finalmente Bogar que nos deja ver la mezcla de un Sistema Matemático de Signos (SMS) tanto algebraicos como aritmético. Cuando en las hojas de trabajo y entrevistas se les presentan ecuaciones con coeficientes mayores a los trabajados durante la sesión de enseñanza, se advierte cómo se mantiene el apego al modelo concreto (balanzas diagramáticas). En el trabajo de los alumnos existe una mezcla de signos, tanto del modelo, como de la aritmética y del álgebra, que surgen como cadenas de textos, es decir cada texto nuevo presenta características distintas al texto inicial. Las imágenes de cada T presentado en la tabla 1, lleva consigo diferencias que no se contemplan en los T anteriores, la lectura/transformación modifica constantemente los ET que lee el alumno incluso los que él mismo produce. Jonathan inicialmente mantiene su apego al modelo realizando sus propias producciones sígnicas para dar solución a la ecuación planteada, manipula la balanza fija y al trabajar la ecuación se equivoca, finalmente fortalece su SMS y abandona los intertextos (dibujos de balanzas) logrando dar solución con sus propia sintaxis. En el caso de Damaris podemos observar la mezcla de signos de la aritmética y el álgebra, se puede observar que en las actividades que se le han planteado con la balanza fija no existe producción de sentido, la corrección constante de las acciones realizadas demuestra la inseguridad que aún persiste en el trabajo de papel y lápiz, en la segunda entrevista demuestra un poco de confusión, con gran dificultad logra llegar a la respuesta correcta. La balanza fija permitió que algunos de los participantes utilizaran métodos propios de solución en las ecuaciones, incluyendo agrupación y simplificación de términos semejantes. En algunos casos persiste el trabajo aritmético, los alumnos han adoptado estrategias de solución que les han permitido dar solución a las ecuaciones planteadas y que difícilmente dejarán atrás, tal es el caso de Bogar. (Ver tabla 1).

Tabla 1. Ítems resueltos en el trabajo con la balanza simple.

Alumno Ítems	$5x + 1 = 2x + 7$ Ítem resuelto después del trabajo "Resolución de ecuaciones"	$7x + 10 = 5x + 28$ Primera entrevista	$6x + 2 = 4x + 6$ Ítem resuelto después del trabajo en la balanza fija	$5x + 3x = 54 + 10$ Segunda entrevista
Jonathan				
Damaris				
Bogar				


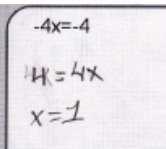
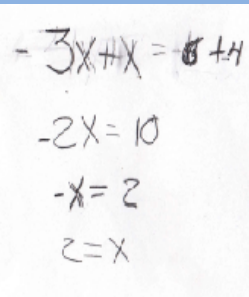
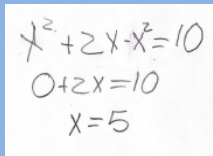
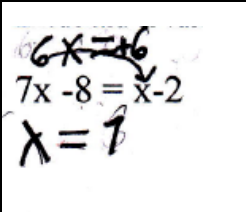
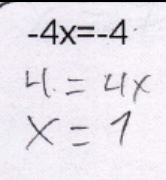
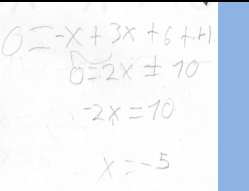
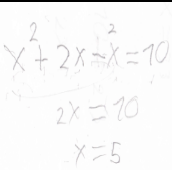
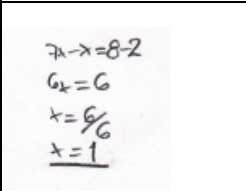
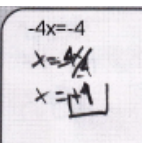
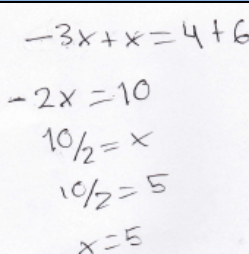
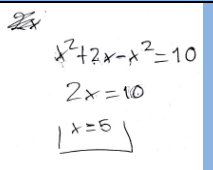
Notas Las columnas que se encuentran sin color corresponden a respuestas que dieron los alumnos después de manipular la balanza y la sección colorida son soluciones dadas en las entrevistas.

Trabajo en la balanza con poleas.

El trabajo con la balanza simple fue de vital importancia para entender el ET de la balanza con poleas, la estructura de esta balanza permitió que los alumnos realizaran la transposición de términos, inicialmente de forma virtual y posteriormente llevarla a papel y lápiz en el álgebra simbólica. En la tabla 2, se puede observar como uno de los alumnos (Jonathan) hace uso del sistema de signos del modelo y del SMS del álgebra para trabajar la ecuación que se le presenta, los otros dos alumnos trabajan la ecuación como una transformación en forma vertical, no existe resistencia en trabajar con ecuaciones que contienen sustracción de términos. Realizan la transposición de términos para cambiar el signo menos y así poder hallar el valor de la incógnita. En el caso de Jonathan podemos observar que la manipulación de términos en éste tipo de ecuaciones es aceptable ya que realiza la transposición de términos semejantes y agrupación de los mismos aunque comete algunos errores de operación que no le favorecen al querer hallar el valor de la incógnita. En el caso de Emmanuel se muestra el uso correcto del SMS del álgebra, la lectura/transformación de los ET de la unidad interactiva favorecieron la producción de sentido en el desarrollo de las ecuaciones, llevando a la construcción de significado. Las acciones que los alumnos realizaron en el modelo ayudaron a evolucionar paulatinamente sus textos producidos en el nivel sintáctico algebraico. En el desarrollo de Bogar se puede observar que le ha costado trabajo modificar su SMS, ya que desde el inicio adoptó una estrategia que le ha facilitan dar solución a las ecuaciones planteadas y que también lo ha llevado a cometer

errores, tal es el en la tercera entrevista donde invierte los términos al querer hallar el valor de equis y olvida el desarrollo que se aplica en los términos negativos. En esta tercera y última entrevista, se advierte como los alumnos son capaces de trabajar ecuaciones con una estructura distinta a las que presenta el modelo, ésta es: $x^2 + 2x = x^2 + 10$ (ver tabla 2), en el pre-cuestionario los alumnos no fueron capaces de dar solución a este tipo de ecuación, sin embargo al finalizar el trabajo con la unidad interactiva y con un poco de intervención el alumno logra resolver la ecuación planteada.

Tabla 2. La tabla muestra el trabajo realizado en la balanza con poleas. En la columna resaltada se muestran dos de los ítems que resolvieron los alumnos en la tercera entrevista.

Alumno ítems	$7x - 8 = x - 2$ Resolución de ecuaciones en la balanza con poleas	$-4x = -4$ Resolución de ecuaciones en la balanza con poleas fija.	$-6 - 3x = -x + 4$ Entrevista 3	$x^2 + 2x = x^2 + 10$ Entrevista 3
Jonathan				
Emmanuel				
Bogar				

Con la perspectiva teórica adoptada, fue posible profundizar en los procesos de producción de sentido, así como visualizar las producciones signícas que dejaron impresadas en los T producidos y esto se dio con base en la lectura/transformación de los ET del modelo virtual. Como se observó en las tablas 1 y 2, la adquisición de un SMS algebraico fue de manera gradual por medio de la interacción con los distintos sistemas de signos que corresponden a la balanza virtual.

Discusión final.

Al finalizar el estudio podemos afirmar que el modelo concreto virtual es una herramienta que favoreció el aprendizaje de la sintaxis algebraica en la resolución de ecuaciones lineales. Desde la perspectiva teórica adoptada, se puede decir que los ET del modelo dinámico son leídos y modificados no solo de forma mental sino también físicamente, provocando que exista producción de sentido en las acciones que se realizan en el modelo virtual, lo cual conduce a la construcción de significado. Como se muestra en las tablas 1 y 2, los ET de la balanza fija favorecieron la producción de sentido en los estudiantes participantes, ya que el observar las acciones realizadas al seleccionar la operación correcta permitió dar paso a la sintaxis algebraica, entendiendo el SMS del álgebra simbólica.

Investigadores como: Vlassis, (2002); Gallardo, (2002), Radford & Grenier, (1996) que se han dedicado a trabajar ecuaciones con sustracción de términos, han llegado a concluir que la sintaxis algebraica no enseñada correctamente provoca que los alumnos presenten confusión al trabajar el álgebra, específicamente la resolución de ecuaciones lineales. En esta investigación, podemos decir que el uso de la balanza con poleas permitió que los alumnos descubrieran la regla de transposición de términos en el trabajo de la adición y sustracción de los mismos (lo antes mencionado lo podemos corroborar con las entrevistas realizadas). Así también se dio la agrupación de términos semejantes. Todos los alumnos terminaron resolviendo y aceptando ecuaciones con sustracción de términos. Cabe mencionar que estamos hablando de ecuaciones que presentan la misma estructura a las trabajadas en el modelo, quedando exentas las ecuaciones con exponentes mayores que la unidad.

Para trabajar con esta unidad interactiva de la balanza, se requiere de una labor de enseñanza adicional para que el alumno pueda entender el funcionamiento del sistema de signos del modelo y de esta manera poder transferir las acciones a papel y lápiz, ya que el modelo por sí solo no conduce al aprendizaje deseado de las ecuaciones lineales. Se han realizado otras investigaciones con este modelo concreto que también apuntan al aprendizaje y resolución de ecuaciones lineales, las cuales han tenido intervención por parte de los investigadores porque como bien se dijo anteriormente el modelo virtual por sí solo no conduce a nada M. Martínez (2009), trabaja la resolución de ecuaciones lineales, ella busca la abstracción de la sintaxis algebraica por medio de la interacción y manipulación de las escenas del modelo. M. Bonilla (2009), indaga en la resolución de problemas verbales, iniciando con la resolución de ecuaciones lineales presentes en la unidad interactiva de la balanza virtual y M Bonilla (2013) realiza una investigación donde analiza cómo las *affordances* (cualidades de los objetos, o entornos, que permiten a un individuo realizar una acción) que se encuentran presentes en el Modelo de la Balanza virtual son reconocidas y transferidas por los sujetos a la sintaxis algebraica.

Al igual que otros modelos concretos, la balanza virtual también tiene sus limitantes, tanto en lo tecnológico, como en lo didáctico y en la metáfora del equilibrio. En lo tecnológico, podemos decir que se tiene la restricción a diez pesas tanto de equis como de una unidad, por lo que se recomienda utilizarla como material didáctico para la introducción en el tema resolución de ecuaciones lineales. Con respecto a lo didáctico nos encontramos frente a un modelo que solo considera coeficientes y soluciones enteras dejando de lado las ecuaciones con estructura decimal y por último dentro de la metáfora del equilibrio también tenemos limitantes puesto que la balanza no admite soluciones negativas. Como bien se mencionó anteriormente el modelo concreto que se utilizó en esta investigación es recomendable para trabajarlo como herramienta

que nos permitirá iniciar de forma dinámica la introducción a la resolución de ecuaciones permitiendo facilitar y entender el trabajo venidero.

Agradecimientos

Al proyecto Conacyt (Ref. 168620), “Diálogos inteligentes con estudiantes de educación media y superior. El caso de los modelos parametrizados en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas”

Referencias.

- Bonilla, M. (2009). *Del lenguaje natural al lenguaje simbólico: un estudio con alumnos de secundaria en la resolución de problemas verbales*. Tesis de maestría. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. México.
- Bonilla, M. (2013). Tesis doctoral (en proceso)
- Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics project*. Windsor; England: NFER-NELSON
- Bruno, A. & Martínón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(2), 249-258.
- Carraher. & Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México, Editorial Siglo XXI
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equation: the Transition from Arithmetic to Algebra, *for the learning of mathematics*, Montreal, Quebec. Canada, 9.2, (19-24)
- Filloy, E.; Rojano T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Berlin Heidelberg, New York: Springer.
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra *Educational Studies in Mathematics*, 49 171-192 Kluwer
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres négatifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.
- Kieran, C. & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The Case of Equivalent Expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(1). Center for Teaching/Learning of Mathematics.
- Kieran, C. (2006). ‘Research on the Learning and Teaching of Algebra: A broadening of sources of meaning. *In handbook of research on the psychology of mathematics education: Past present, future*, ed. A. Gutierrez and P. Boero 23-49. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Martínez, M. (2009). *De la modelación concreta a la sintaxis algebraica: Estudio con alumnos de secundaria sobre la resolución de ecuaciones lineales utilizando el modelo virtual de la balanza*. Tesis de maestría. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. México. P. 148.
- Peirce, Ch. (1987). *Obra Lógica Semiótica*. Madrid. Taurus.
- Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos (Signs, texts and mathematical sign systems). In E. Filloy (Eds.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual (Mathematics education: Aspects of contemporary research)* (pp. 174-186). México: Fondo de cultura Económica and Cinvestav.

- Radford, L. & Grenier, M. (1996). Les apprentissages mathématiques en situation. *Revue des Sciences de l'éducation*, XXII (2), 253-276.
- Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra: Un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad*. Tesis doctoral. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. México. P. 625.
- Rojano, T. (1999). Mathematics Learning in the junior Secondary School: Students' access to significant mathematical ideas, Chapter 8, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouwns.
- Rojano, T. & Martínez, M. (2009). *From concrete modeling to algebraic syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance model*. En Swars, S. L., Stinson, D. W. & Lemons-Smith, S. (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Atlanta, GA: Georgia State University. Vol. 5, pp 235-243.
- Sfard, A. & Linchevsky, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. En: *Educational Studies in Mathematics* 26:191-228. The Netherlands.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, IV*, 190-197.
- Talens, J. & Company, J. M. (1984). The textual space: On the notion of text. *The journal of the Midwest Modern Language Association*, 17(2), 24-36.
- Vlassis, J. (2001). Solving equations with negatives or crossing the formalizing gap. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 375-382.
- Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear responses to timed mathematics test. *Educational Studies in Mathematics*, 49, pp. 341-359.
- Vernaud, G & Córtes, (1986). "Introducing algebra to low level 8th and 9th graders", en *Proceedings of the 10th International Conference of Psychology of Mathematics Educational*, Londres, pp. 319-324