I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Os Números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores

Ruy César **Pietropaolo**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, Brasil
rpietropaolo@gmail.com
Olga **Corbo**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, Brasil
olgacorbo@gmail.com
Tânia Maria Mendonça **Campos**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, Brasil
taniammcampos@hotmail.com

Resumo

Este artigo resulta de investigação sobre a imagem conceitual relativa aos números irracionais, constituída por um grupo de professores da rede pública da cidade de São Paulo. Consideramos as concepções explicitadas pelo grupo, em resposta a questionários envolvendo itens concernentes aos conhecimentos necessários ao professor, relativos ao conteúdo “números racionais e irracionais” e ao seu ensino. Os dados revelaram inconsistências nos conhecimentos dos participantes, quanto à ampliação dos campos numéricos, ressaltando fragilidades que poderiam levar alunos a ideias equivocadas sobre esse assunto. Constatamos, igualmente, que a incomensurabilidade de grandezas não constava do repertório de conhecimentos do grupo, implicando a ausência de conhecimentos pedagógicos sobre o tema. Tais resultados evidenciam falhas no estudo dos irracionais, não apenas na Educação Básica, mas também na formação dos professores, expondo a necessidade de colocar em discussão a relevância desses números nos currículos de Matemática e a importância de seu estudo nas diversas etapas escolares.

Palavras-chave: Números Irracionais, Educação Matemática, Conhecimentos para o Ensino, Formação de Professores.

Introdução

Conforme documentos oficiais de orientações educacionais (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998, p.83, Proposta Curricular do Estado de São Paulo, 2008, p.52 e Orientações Curriculares para o Ensino Médio, 2006, p.71), a abordagem inicial dos números irracionais está prescrita para os dois últimos anos do Ensino Fundamental, em estudo que deve ganhar continuidade ao longo do Ensino Médio, por meio da exploração de situações que favoreçam a consolidação desses conhecimentos.

No entanto, resultados de pesquisas já concluídas, por exemplo, por Tall & Schwarzenberger (1978), Miguel (1993), Fischbein et al (1995), Kindel (1998), Sirotic (2004) e Corbo (2005), indicam a necessidade de ampliar a discussão sobre a atenção dada a esse conteúdo, não apenas nos anos finais do Ensino Fundamental, mas também no Ensino Médio e, sobretudo, nos cursos de formação de professores.

A esse respeito, Sirotic (2004, p.187) observou que os conhecimentos relativos aos números irracionais demonstrados pelo grupo de futuros professores, sujeitos de sua pesquisa, configuravam-se como que "cimentados", no mesmo nível em que haviam sido construídos na Educação Básica.

Tais resultados confirmam aqueles discutidos por Fischbein et al (1995), no que concerne às inconsistências reveladas por estudantes de séries correspondentes ao Ensino Médio no Brasil, quanto às definições, às representações e à caracterização de números racionais, irracionais e reais.

Também no que respeita à interpretação geométrica dos números irracionais, foram detectadas fragilidades nos conhecimentos de estudantes do último ano do Curso de Licenciatura em Matemática, em estudo desenvolvido por Corbo (2005), indicando dificuldades relativas à compreensão do conceito de incomensurabilidade de grandezas e de sua relação com os irracionais.

Fundamentação Teórica e Metodologia

Esta pesquisa foi desenvolvida no âmbito do Observatório da Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante Anhanguera, com financiamento da CAPES.

Para o desenvolvimento da investigação pretendida a partir desses questionários, tomamos como base teórica, as categorias de conhecimentos necessários ao professor de Matemática, estabelecidas por Ball et al (2008), quais sejam: o conhecimento do conteúdo (comum/especializado), o conhecimento do conteúdo e do estudante, o conhecimento do conteúdo e do ensino e, finalmente, o conhecimento curricular do conteúdo.

Além disso, apoiamo-nos na noção de imagem conceitual definida por Tall & Vinner (1981), como estrutura cognitiva que se compõe na mente de uma pessoa a respeito de determinado conceito, a partir de experiências e estímulos vivenciados ao longo do tempo. Segundo essa perspectiva, todas as representações, propriedades, procedimentos, relações e processos relativos a um conceito constituem a imagem conceitual elaborada por essa pessoa, no que concerne àquele conceito.

Tendo em conta a importância de apresentar, aos alunos, a Matemática não só como ferramenta necessária à resolução de problemas práticos, mas também como estrutura harmoniosamente organizada, fruto do esforço da mente humana, e, ao mesmo tempo, considerando a relevância dos números irracionais nos currículos de Matemática, para a ampliação do conceito de número, entendemos que o estudo desses números deve ir além da exploração de propriedades e operações com radicais. Isto é, deve também favorecer a compreensão de ideias que são essenciais no processo de construção do conceito de número real.

Assim, para abordar os números irracionais em suas aulas, um professor precisa de um repertório abrangente de conhecimentos, ou ainda, é necessário que ele tenha à sua disposição uma imagem conceitual bastante rica, relativa a esse assunto, a fim de que possa adequar suas instruções aos alunos com os quais está trabalhando e também possa estabelecer conexões entre esse tema e outros conteúdos dominados pelo aluno.

A coleta dos dados analisados ao longo deste artigo teve o propósito de delinear a imagem conceitual constituída pelos professores sujeitos de nossa pesquisa, com relação aos números irracionais – conteúdo específico (comum e especializado) –, assim como com relação aos conhecimentos pedagógicos também concernentes a esse mesmo tema.

Examinamos as respostas dos professores, considerando que sua imagem conceitual relativa aos números irracionais seria constituída, por exemplo, por: definições, representações, propriedades, operações, estratégias diferenciadas de abordagem, o tratamento formal necessário à compreensão dos irracionais, as relações que podem ser estabelecidas entre esses números e outros conjuntos numéricos, as relações que podem ser estabelecidas entre esses números e outros conteúdos da Matemática ou de outras áreas do conhecimento, as orientações curriculares relativas a esse tema e as dificuldades inerentes ao processo de construção desse conhecimento.

Analisando os resultados de nosso estudo

Apresentamos, a seguir, nossa interpretação dos dados que permitiram o delineamento da imagem conceitual que constituía, naquele momento, o repertório de conhecimentos relativos aos números irracionais, dos professores participantes de nosso estudo.

Sobre as definições, representações e campos numéricos

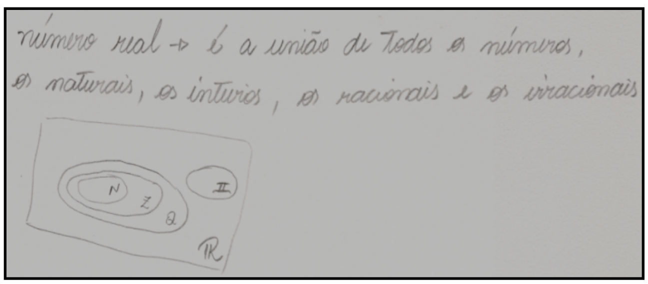
A análise das definições apresentadas pelo grupo revelou falhas nos conhecimentos dos professores, em relação à ampliação dos campos numéricos, desde o conjunto dos números naturais. Os extratos a seguir ilustram as respostas do grupo, à questão enunciada por "Como você define (ou definiria), em suas aulas, os conceitos de número racional, número irracional e número real?":

Número real – números naturais/positivos (Prof.F),
Números racionais são todos os números inteiros (somente) e positivos. (Prof.C);
Número irracional é todo número representado em forma de fração ou de decimal; e está representado dentro dos números reais. (Prof.C);
Número real – todos os números que fazem parte do nosso universo. (Prof. A);
Real – é o conjunto formado por todos os números racionais. (Prof. U).

Tais afirmações trazem à tona concepções inconsistentes relativas à caracterização dos conjuntos numéricos e às relações que se estabelecem entre esses conjuntos. Por exemplo, da forma como se expressou o professor (U), no último excerto, o conjunto dos números irracionais não estaria contido em R, o que dispensaria a criação deste último.

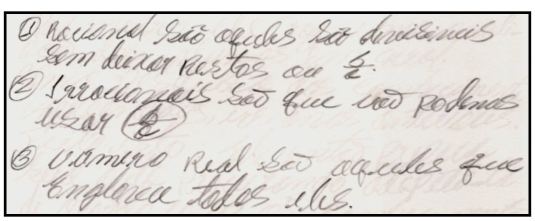
Outras definições apresentadas sugerem a introdução dos números reais independentemente do estudo dos irracionais. Interpretamos dessa forma, visto que, para alguns professores, os números irracionais não fazem parte do conjunto dos reais, como se pode observar em respostas formuladas por: “nº real é todo nº que conhecemos, menos os nºs irracionais e complexos” (Prof. O) e “nºs Reais: é o conjunto que abrange os N (naturais), Q (racionais) e Z (inteiros)” (Prof. V).

Ainda em relação aos campos numéricos, os diagramas de Venn apresentados por alguns dos participantes deixam margem a interpretações incorretas e podem levar os estudantes a formar uma ideia equivocada a respeito do conjunto dos números reais. Por exemplo, o professor (Q), embora tenha definido corretamente o conjunto dos números reais, como se vê no protocolo a seguir, desenhou um diagrama que poderia levar um aluno a imaginar que existem outros números reais que não são racionais, nem irracionais.



Protocolo Prof. (Q)

Quanto à definição de números irracionais, apenas quatro professores fizeram referência à impossibilidade de representá-los na forma $\frac{a}{b}$, e em alguns casos, omitindo condições indispensáveis, que devem ser observadas para essa representação. O protocolo do professor (N), a seguir, justifica nossa interpretação:



Protocolo Prof. (N)

Não havendo, em definições como essa, a restrição que indica o conjunto a que devem pertencer os termos da razão $\frac{b}{c}$, o número $\frac{\sqrt{7}}{3}$, por exemplo, poderia ser classificado como racional.

De forma geral, a ideia de número irracional, neste grupo de professores, estava essencialmente baseada na representação decimal, tendo sido explicitada por 17 dos 23 professores, em respostas como: “irracionais são nºs decimais, que não são dízimas periódicas, tendendo ao infinito” (Prof. V) ou “para iniciar números irracionais, digo que é um número que não tem fim. Mostro alguns exemplos como π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,....” (Prof.H).

Tais definições, de certa forma, restringem a abordagem desse conjunto de números, afastando a possibilidade de um aprofundamento que inclua, por exemplo, a prova formal da irracionalidade de um número, no caso de haver interesse e nível de compreensão suficiente, por parte dos alunos.

Em nossa interpretação, esses resultados evidenciaram falhas nos conhecimentos deste grupo, no que diz respeito às definições, às representações e à classificação de números racionais, irracionais e reais, o que pode prejudicar qualquer abordagem, ainda que introdutória, em que se proponha a discussão sobre a ampliação dos campos numéricos a alunos da Educação Básica.

Sobre o processo de ensino dos números irracionais

No que diz respeito às estratégias de abordagem dos números irracionais – o que, segundo Ball et al (2008), requer a seleção de representações, ilustrações e exemplos adequados e, da mesma forma, a escolha de justificativas convincentes que poderiam facilitar a compreensão desse conteúdo pelos estudantes, 9 dos 23 professores sugeriram atividades empíricas envolvendo a medição de segmentos, ou do comprimento e do diâmetro de circunferências, para a apresentação do número π, sem, no entanto, qualquer menção sobre a obtenção de valores aproximados ou sobre a insuficiência dessa abordagem, para uma caracterização dos números irracionais.

Por outro lado, as operações com resultados irracionais são mencionadas por sete professores, provavelmente como estratégia que provoque a percepção da impossibilidade de se obter um resultado racional. A esse respeito, um dos participantes explicou que "o professor pode deixar os alunos fazerem as divisões de números fracionários, alguns com resultados com finitas casas decimais, outros com infinitas casas decimais mais periódicas e outros com infinitas casas decimais não periódicas" (Prof. B), admitindo, implicitamente, que é possível representar um número irracional, na forma fracionária.

Também sugerindo uma abordagem por meio de operações, o professor (P) propõe: "... podemos resolver uma raiz quadrada não exata até cairmos no decimal não periódico", em estratégia que, supostamente, indica o uso da calculadora (com resultado aproximado por um racional) ou a aplicação do algoritmo para o cálculo da raiz quadrada (que não figura entre os conteúdos indicados para o trabalho em sala de aula). Além disso, a expressão "até cairmos no decimal não periódico" utilizada por esse professor sugere uma garantia que não existe: a de que, a partir de certa quantidade de algarismos na parte decimal, seria possível afirmar que não haverá formação de período.

Três professores mencionaram a calculadora como recurso para abordar o conceito de número irracional. Entretanto, não explicitaram se esse estudo teria início pela obtenção de aproximações racionais para números irracionais e também sem esclarecimentos sobre as estratégias que induziriam os alunos a perceber que os valores obtidos com o auxílio da calculadora representam uma aproximação de um número cuja representação decimal é infinita e não periódica:

> Usar a calculadora facilita muito os cálculos com números irracionais, que tal uma competição?! (Prof. C)
> Pedir ao aluno que digite alguns números na calculadora: a tecla do π; a raiz quadrada de 2; a raiz quadrada de 3. (Prof. O).

Observamos finalmente, que nenhum dos participantes mencionou a possibilidade de introduzir os números irracionais por uma abordagem geométrica que envolva, por exemplo, a aplicação do

Teorema de Pitágoras e as construções com régua e compasso, visando despertar a percepção da existência de pontos na reta que não correspondem a números racionais.

Quatro professores mencionaram, como estratégia de apresentação dos números irracionais, aos alunos, a determinação da medida da diagonal de um quadrado de lado unitário ou de lado "l " ou a construção geométrica de triângulos retângulos, para a obtenção da medida da hipotenusa, mas, nenhum dos participantes do grupo se referiu ao estudo da incomensurabilidade de segmentos de reta, como parte do trabalho dedicado à construção do conceito de número irracional, possivelmente indicando a ausência desse conhecimento no repertório deste grupo de professores, e implicando, sob o ponto de vista de Ball et al (2008), igual ausência de conhecimentos para a sua exploração em sala de aula. Ou seja, a ausência de conhecimentos sobre a interpretação geométrica dos números irracionais significa também desconhecimento das necessidades que resultaram na criação desse conjunto numérico e, assim sendo, implica a falta de argumentos convincentes sobre a importância de estudar esse conteúdo no Ensino Fundamental ou em outra fase escolar.

Além disso, reduz as possibilidades de seleção, organização e elaboração de atividades, posto que um professor que desconhece o que são segmentos incomensuráveis não irá elaborar atividades que envolvam essa ideia e, assim sendo, também não poderá favorecer o acréscimo desse conhecimento à imagem conceitual de seus alunos.

Sobre a aprendizagem dos números irracionais

São classificados como conhecimentos do conteúdo especializado aqueles que, dentre outras particularidades, capacitam o professor a identificar os erros e as causas desses erros, em materiais produzidos pelos estudantes. (Ball et al, 2008).

No que diz respeito às dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem do conceito de número irracional, foram mencionadas pelos professores aquelas relacionadas à compreensão da ideia de grandeza, à imaginação de grandezas incomensuráveis, à aceitação e compreensão de "números infinitos", "muito grandes ou muito pequenos", à localização de números irracionais na reta numérica.

Observamos, no entanto, que, embora os professores tenham apontado dificuldades relacionadas às grandezas – inclusive as incomensuráveis –, esse tema parece não figurar na prática destes professores, pois não consta das estratégias por eles indicadas para a introdução de números irracionais, assim como não há nenhuma menção, por parte dos professores, a respeito da necessidade dos números irracionais, para resolver o problema da medida de grandezas incomensuráveis.

Ademais, as referências à incomensurabilidade de grandezas foram feitas de maneira bastante vaga, como pode ser visto nas respostas a seguir, levando-nos a conjecturar sobre a ausência de uma definição (ou de uma compreensão) para esse conceito e, da mesma forma, sobre a ausência de conexão entre números irracionais e grandezas incomensuráveis no repertório de conhecimentos deste grupo de professores:

> Acredito que eles confundem os conjuntos. Os primeiros conjuntos vistos como naturais e inteiros são confundidos, mas acabam assimilando no decorrer das séries, mas com relação aos racionais e irracionais eles não conseguem imaginar, mesmo com o passar das séries, ou seja, existe a incomensurabilidade de grandezas. (prof.A).

Acho importante trabalhar só com o conceito, porque assim os alunos poderão ter uma noção de grandezas incomensuráveis. (prof. M)

Sobre a relevância do ensino dos números irracionais no Ensino Fundamental

Explicitando razões que poderiam justificar a presença dos números irracionais nos currículos de Matemática do Ensino Fundamental, oito professores avaliaram como adequada/suficiente uma abordagem apenas introdutória que proporcione um primeiro contato com os irracionais, incluindo definições e exemplos, com vistas à familiarização dos estudantes com esse conjunto numérico – apenas o bastante para estabelecer a ponte entre os racionais e os reais e para permitir o acesso a outros conteúdos como: os números reais, as grandezas incomensuráveis, ou algum assunto tratado no Ensino Médio. Os extratos expostos a seguir contêm respostas nesse sentido:

Eu considero importante a partir do momento que, eles precisam ter essa noção pelo menos do que é um número irracional, pois no ensino médio usa-se o conjunto dos números reais e dentro deste conjunto tem os números irracionais. (prof. A, o destaque é nosso).
Sim, pelo menos introduzir a noção básica, para que ele possa entender determinados assuntos que serão trabalhados nas séries seguintes. (prof. J, o destaque é nosso).
Introduzir sim, mas não se aprofundar, pois nesta fase ainda é muito complicado para o aluno esses conceitos, no entanto, é importante que ele tenha um primeiro contato e algumas noções para que consiga diferenciá-los dos outros. (prof. R, o destaque é nosso).

Todos os participantes consideraram importante a introdução e o estudo dos irracionais no Ensino Fundamental, observando, todavia, que esse estudo precisaria ter restrições.

Importante sim, mas indispensável não. Será importante iniciar o conteúdo com os alunos, colocando o que é o conjunto, onde usamos, atividade concreta (jogo, atividade com calculadora,etc.). (Prof. W).
Eu considero importante termos no currículo o conceito de número irracional no ensino Fundamental, desde que se encontre um significado para este aluno. Seja despertado o interesse no aluno em saber o porquê temos o número irracional e onde podemos usá-lo na prática. O uso da calculadora ajuda muito o aluno nos exercícios. (prof. C).

Possivelmente, tais respostas sejam uma indicação da ausência de um exame crítico a respeito da indispensabilidade dos irracionais no currículo de Matemática ou a respeito da possibilidade de uma organização diferenciada do currículo, no que se refere a esse conteúdo.

Sobre as orientações curriculares para a introdução do conceito de número irracional

A fim de avaliar os conhecimentos curriculares relativos aos números irracionais dos professores, submetemos à apreciação e análise do grupo, uma atividade sugerida pela Proposta Curricular de 2008, para a introdução desses números na 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental, sob uma perspectiva geométrica.

Tabela 1

Atividade proposta no caderno do professor da Proposta Curricular.

O Caderno do Professor (2008) destinado à 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental sugere que o professor inicie o estudo do conceito de número irracional, propondo a seguinte questão:

> *"É sempre possível representar a razão de dois segmentos quaisquer com um número racional? Como isso pode ser feito? (Para quaisquer segmentos AB e CD é sempre possível* $\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}$ *, ou seja,* $AB = \frac{p}{q}.CD$*, com p e* $q \in Z$ *).*
>
> ....

.....

É muito provável que os alunos, nesse momento, afirmem que 'é sempre possível representar a razão de dois segmentos quaisquer com um número racional', principalmente pelo fato de poder subdividir a Unidade quantas vezes quiserem; em outras palavras, eles poderão utilizar submúltiplos cada vez menores" (p. 13).

(A) Como você avalia essa abordagem para o conceito de número irracional?
(B) Com que finalidade um professor poderia propor essa questão?
(C) Você já experimentou iniciar uma abordagem do conceito de número irracional de acordo com essa sugestão? Que dificuldades os alunos demonstraram, ao responder a essa questão?

As considerações feitas pelos professores, em resposta a esta atividade revelam tanto brechas em seus conhecimentos sobre a abordagem geométrica dos números irracionais – indicadas por respostas evasivas ou vagas –, quanto ausência de oportunidades de discussão e reflexão no coletivo, sobre orientações pedagógicas oferecidas em documentos oficiais de referência curricular, relativas a esse conteúdo. Ilustramos a seguir, as respostas do grupo:

Muito complexa, poderia abordar com valores na prática. (prof.K).
É uma forma interessante, apesar de não ser a única. (prof. V).
Acho que é uma abordagem interessante, pois abre discussões que levam os alunos a refletirem mais sobre o verdadeiro conceito de números irracionais. (prof. R).
É razoável, mas nem sempre os alunos chegarão a uma razão que represente um número irracional, mesmo usando os submúltiplos cada vez menores. Eles precisam aprender a assimilar estes conceitos. Mas é preciso já estarmos trabalhando isto com os alunos. (prof.E).

Apenas um professor explicitou compreensão e convicção sobre a importância de abordar os números irracionais no Ensino Fundamental, em comentário que poderia resultar em uma discussão profícua com os alunos sobre a necessidade desse conjunto de números para a ampliação dos campos numéricos:

Acho que é uma abordagem muito boa. O aluno pode não precisar de outro número, além do racional, em um caso, em outro, mas terá um momento que esse número não vai dar conta. (prof.I).

Considerações finais

Analisando tais resultados sob a perspectiva de Tall & Vinner (1981), concluímos que a *imagem conceitual* construída pela maioria dos participantes de nosso estudo, relativa aos números irracionais, era prevalentemente constituída por noções que pertencem ao campo numérico, contendo, em alguns casos, concepções incorretas – por exemplo, relativas às representações e à classificação desses números.

A incomensurabilidade de grandezas – interpretação geométrica dos números irracionais – conceito cuja discussão pode favorecer a compreensão da indispensabilidade dos números irracionais, para representar a medida de quaisquer grandezas –, não constava do repertório de conhecimentos do conteúdo específico acumulados pelos professores, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos.

Tais resultados colocam em destaque a necessidade de promover, nos cursos de formação inicial e/ou continuada, discussões sobre a relevância dos números irracionais nos currículos de Matemática, sobre as dificuldades vivenciadas pelos estudantes quando iniciam a construção desse conhecimento e sobre a importância de seu estudo nas diversas etapas escolares.

Referências e bibliografia

Ball, D., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? In: *Journal of Teacher Education*, November/December, vol. 59.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. *Publicação do Ministério da Educação*. Brasília: MEC/SEF.

_____ Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. (2006). Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Volume 2. *Publicação do Ministério da Educação.* Brasília: MEC/SEB.

Corbo, O. (2005). Seção Áurea: um contexto para desenvolver a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta. *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)*. Acedido em 07 de outubro de 2013 em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/olga_corbo.pdf . São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Fischbein, E., Jehiam, R., Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics,* Boston: Kluwer Academic Publishers, p. 29-44.

Kindel, D. S. (1998). Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade. *Dissertação de Mestrado.* Rio de Janeiro: USU.

Miguel, A. (*1993).* Três estudos sobre história e Educação Matemática. *Tese de doutorado, Faculdade de Educação*. Campinas: UNICAMP.

São Paulo. (2008). Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. *Publicação da secretaria de Estado da Educação de São Paulo.* São Paulo: SEE.

Sirotic, N. (2004). Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality. *Dissertação*. Canadá: Simon Fraser University.

Tall, D. O., Schwarzenberger, R. L. E. (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits,* in: Mathematics Teaching, 82, 44-49. University of Warwick.

Tall, D., Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.