I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

La respuesta al problema de la medida de figuras planas en los antiguos griegos

Daniel Steven **Moran** Pizarro
Instituto de Educación y Pedagogía
Colombia
dmbourbaki@gmail.com

Resumen

El problema de la cuadratura del círculo ha sido de gran importancia a través de la historia, pues constituye un elemento movilizador de algunas ramas de la matemática como la Geometría Analítica, el Cálculo y el Análisis. Euclides de Alejandría (aprox. 300 a.C.) en su monumental obra Elementos da una respuesta parcial al problema, estableciendo un proceso para la cuadratura de figuras rectilíneas y deja implícito el proceso que posteriormente será el eje central de la medida. Estos resultados son retomados por Arquímedes para la cuadratura de figuras que no son rectilíneas. En el presente escrito se intenta abordar estos resultados de Euclides y su relación con los resultados de Arquímedes al problema de medir, uno de los ejes centrales en el desarrollo de las Matemáticas.

Palabras clave: historia de la integral, epistemología de las matemáticas, Euclides, Arquímedes, Medida, método exhaustivo, cuadratura.

El antiguo problema de medir

Medir, contar y ordenar son algunos aspectos que siguen motivando el desarrollo de las matemáticas. Desde los antiguos, la matemática va surgiendo y se va delineando como aquella respuesta que el mismo hombre va dando a problemas de tipo fenomenológico, estableciéndose una relación fuerte entre lo que es matemáticas y experiencia.

El problema primigenio de la medida tiene relación con lo geométrico. Para los antiguos medir es comparar, y se realizaba bajo un procedimiento llamado la *Antiphaeresis* desarrollada por los pitagóricos: Dada una magnitud AB, se mide con respecto a una magnitud referencial CD. El método consiste en ver cuántas veces cabe CD en AB. En caso de caber un número exacto de veces, el proceso ha terminado; en caso de no caber un número exacto de veces, la idea era buscar un segmento unidad de tal forma que "encajara" veces exactas en el segmento a medir (actualmente constituye el algoritmo de divisibilidad). Para los pitagóricos, este proceso siempre podría realizarse. En términos modernos, creían que siempre existían $n, m \in \mathbb{Z}^+$ tales que $nA = mB$. La apuesta filosófica de los pitagóricos entró en crisis cuando se dieron cuenta de la existencia de magnitudes para las cuales $(\forall n, m \in \mathbb{Z}^+)(nA \neq mB)$, problema conocido como la emergencia de las magnitudes inconmensurables (por ejemplo, la relación entre el lado del cuadrado y su diagonal; o la diagonal del pentágono con su lado).

Entre los problemas planteados por los antiguos griegos, se destacan tres especialmente:

la duplicación del cubo. Dado un cubo, construir un cubo cuya medida sea el doble del cubo inicial.

la trisección del ángulo. Dado un ángulo, hallar su tercera parte.

la cuadratura del círculo. Dado un círculo, encontrar un cuadrado equivalente.

El último problema dio mucho de qué hablar, no solo a los matemáticos de la época sino a todos los matemáticos posteriores, y la pregunta se transformó en la cuadratura de figuras en general. Euclides, en sus *Elementos* trató de dar una respuesta y culminó con la cuadratura de las figuras rectilíneas, que se considera como el gran resultado de sus dos primeros libros (Klein, 1972; Recalde, 2011).

La respuesta de Euclides: La cuadratura de figuras rectilíneas

Euclides no logra cuadrar el círculo, pero logra establecer la cuadratura de figuras rectilíneas; y en su monumental obra *Elementos* busca darle salida al problema de las cuadraturas (Heath, 1956; Euclides, 1970; Euclides, 1971).

Euclides se ha reconocido por ser quizá un gran sistematizador[1] (Se utiliza el término sintetizador en atribución a la incorporación de un corpus teórico en base a un método que será el que marque la pauta en la forma de hacer matemáticas: Método hipotético-deductivo) de toda la matemática de la época, pero esto ya constituye un aporte a la genialidad de Euclides: ¿Cómo es posible saber que la construcción de toda una época de la matemática reposa en un triángulo equilátero? En su obra, Euclides logra demostrar los teoremas que no sabemos si Tales de Mileto demostró o no, también demuestra teoremas de gran trascendencia escolar (clásicos), que uno, como educador matemático (y como matemático) debería conocer: teoremas de paralelismo, desigualdad triangular, los ángulos internos de un triángulo que suman dos rectos, el teorema de Pitágoras, entre otros. Se conocen muchas demostraciones del teorema de Pitágoras, pero la demostración que da Euclides es una muestra de genialidad matemática, en donde se percibe el

[1] Para profundizar más acerca de la axiomática en Euclides ver (Levi, 2000)

espíritu del libro I de los *Elementos* en su máxima expresión: las aplicaciones de áreas para la medida de las figuras planas, cuestión que históricamente constituye la simiente de la noción de área. Lo que se quiere encontrar es esa área, pero entonces surge la pregunta: ¿Qué es el área? La respuesta se da muy posteriormente en base a poder establecer una función:

$$\{\text{figuras planas acotadas}\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

Pero para poder darle un valor numérico a eso que llamamos área, pero necesitamos de mucho tiempo para poder establecer esa reglilla de números que mida ($\mathbb{R}$) y poder establecer dicha función[2]. Euclides en el libro I demuestra el teorema de Pitágoras, y con ayuda de la proposición 5 del libro II, resuelve el problema de la cuadratura de las figuras rectilíneas.

Proposición II,14. Dada una figura rectilínea, encontrar un cuadrado equivalente.

En las proposiciones anteriores, Euclides ha enseñado las aplicaciones de áreas, y en la proposición 45 del libro I muestra la forma de construir un rectángulo equivalente a una figura rectilínea. Sea el paralelogramo rectángulo $ABCD$ equivalente en área a la figura rectilínea Σ.

Se prolonga DC hasta G tal que CG sea igual CB. Se halla el punto medio de DG y con centro en F y radio FD se describe una semicircunferencia. Se prolonga BC hasta E y se traza FE (ver figura 1).

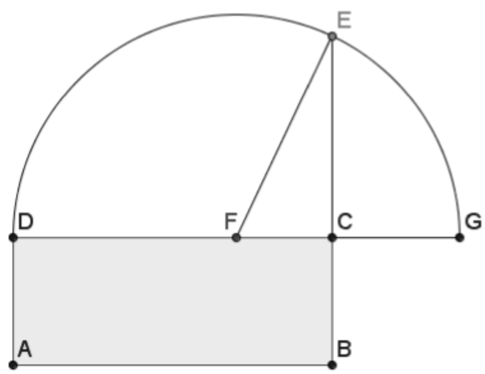

Figura 1. Construcción de II,14.

Se obtienen las siguientes igualdades:

[2] Para profundizar acerca de la relación número-magnitud ver (Dhombres, 1980).

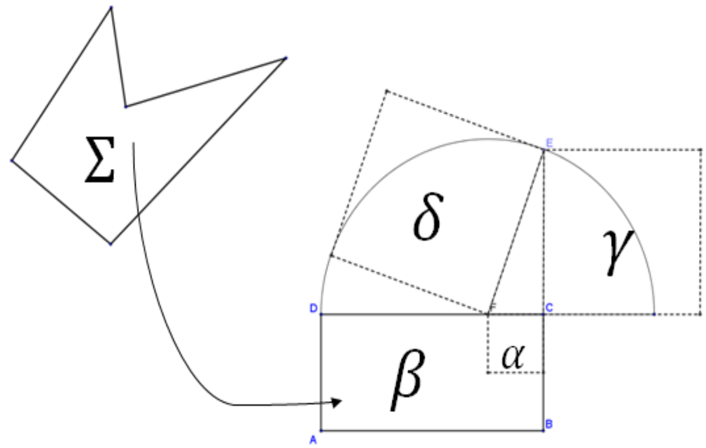

Figura 2. Gráfico ilustrativo de las igualdades de II,14

Sea el $\beta =$ rectángulo $ABCD = \Sigma$, por el teorema de Pitágoras se cumple que $\alpha + \gamma = \delta$.
También $\beta + \alpha = \delta$ por Prop.(II, 5), luego, por transitividad, $\alpha + \gamma = \beta + \alpha$;
por consiguiente $\gamma = \beta$. Y como β es equivalente a la figura rectilínea Σ.

∴Dada una figura rectilínea es posible encontrar un cuadrado equivalente.■

Euclides no tiene aquella reglilla llamada *números reales* que permita darle una medida a una magnitud dada, pero modernamente establece una función:

$$f: \{\text{figuras planas rectilíneas}\} \to \{X : X \text{ es el lado del cuadrado}\}$$

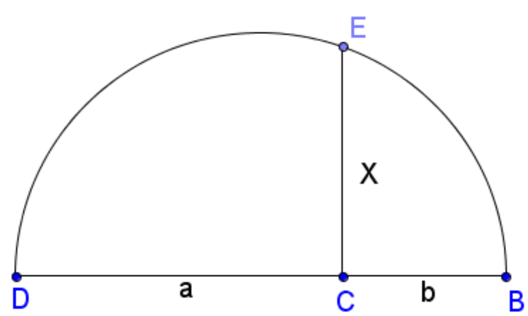

Figura 3. Construcción de la media proporcional entre dos segmentos

También podemos ver (figura 3) que el segmento CE corresponde a ser media proporcional de DC y CB. Llamemos $a = DC$ y $b = CB$, por tanto, de acuerdo a la proporcionalidad:

$$\frac{a}{X} = \frac{X}{b} \text{ entonces } X^2 = ab$$

Es decir, que el rectángulo de lados a y b es igual a un cuadrado de lado x, operación que no se puede hacer en la época de Euclides, pues no se ha definido el producto de segmentos; pero es una interpretación del resultado de Euclides. Estas cuestiones son retomadas posteriormente por Descartes, incorporando la multiplicación de segmentos, base fundamental en su *geometría analítica*.

Euclides en su libro V (atribuido a Eudoxo) habla sobre teoría de razones y proporciones. Dice algo acerca lo que es magnitud, no la define como tal, pero entendemos que tiene la misma concepción aristotélica de un "pedazo de recta continuo". Define la propiedad arquimediana (elemento fundamental para poder establecer una razón entre magnitudes) y establece la igualdad entre razones, que en términos modernos, sería algo como lo siguiente:

> **Def V,5 (Sobre la igualdad entre razones).** Sean A, B, C y D magnitudes. Entonces A y B están en la misma razón que C y D – simbólicamente $A\colon B = C\colon D$, cuando para todo entero n y m, se tiene que si $nA \gtreqless mB \rightarrow nC \gtreqless mD$.

El libro X de los *Elementos*, llamado comúnmente la cruz de los matemáticos, es el libro más extenso de los *Elementos*. Consta de más de 100 proposiciones y trabaja las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Para nuestros propósitos, la proposición más importante es la proposición X,1: Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda, una magnitud mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará al final una magnitud que será menor que cualquiera de las dos magnitudes dadas.

En términos modernos, tenemos que si

$$M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n \text{ entonces } \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, M_n < \varepsilon$$

Euclides demuestra, en el libro XII de los *Elementos*, que "Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros", evidenciando el siguiente hecho (visto desde una perspectiva moderna): dado un círculo C, una sucesión $\{P_n\}$ (estrictamente creciente) de polígonos inscritos en C, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, C - P_n < \varepsilon$.

Estos son dos importantes ingredientes por los cuales puede decirse que los *Elementos* de Euclides constituye un primer tratado en donde existe una teoría de la medida inducida. Si bien, Euclides no logra contestar al problema de la cuadratura del círculo, pero sus respuestas parciales y los fundamentos conceptuales que desplegó, marcaron, en muchos aspectos, el derrotero de la evolución de las matemáticas durante más de veinticinco siglos (Recalde, 2007).

Cualquier matemático posterior que quiera hablar de medida e integración, debe tener en cuenta esos aspectos, y el primero en hacerlo fue Arquímedes: Retoma algunos aspectos conceptuales de Euclides, inaugurando el método exhaustivo, que será el método por excelencia y es la respuesta de los antiguos para el problema de la medida, interés central de este escrito.

La respuesta de Arquímedes: El método exhaustivo

En Siracusa florece Arquímedes y cambia algunas concepciones de la Geometría de Euclides. Dos aspectos importantes a resaltar de Arquímedes son, por una parte, que generaliza con resultados cuantitativos, un gran avance con respecto a la geometría sintética de Euclides que era puramente relativa; y por otro lado, es que trata de establecer un formalismo para los procesos infinitos. Recordemos que un gran resultado de los *Elementos* es la cuadratura de figuras rectilíneas, y uno podría pensar que como el círculo puede verse como un polígono de infinitos lados, entonces es posible realizar su cuadratura.

El problema yace en las veces que se debe hacer ese proceso (actualmente que es por el *paso al límite*). Vamos detrás de la formalización de procesos infinitos que se corresponde muy posteriormente con una nueva rama de las matemáticas cuyos objetos son las funciones y se incorpora una nueva operación: *paso al límite*. Esa rama es el Análisis.

Euclides nos dio en sus *Elementos* las bases conceptuales del método exhaustivo, pero quién lo formaliza como proceso matemático es Arquímedes.

Haciendo cierta transposición, tenemos lo siguiente:

Sea una región no rectilínea R.

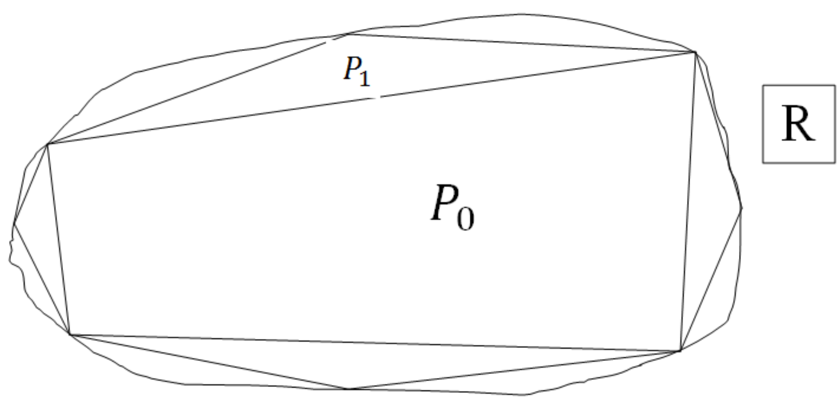

Figura 4. Método exhaustivo aplicado una figura en general.

Se define una sucesión de polígonos $P_0, P_1, \dots, P_n$, donde $\{P_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente. Se define una sucesión de diferencias como sigue:
$M_0 = R - P_0, M_1 = R - P_1, \dots, M_n = R - P_n$, que es una sucesión estrictamente decreciente, donde se tiene que:

$$M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n$$

que corresponde al principio de Eudoxo (proposición X,1) de los *Elementos*.

Tenemos entonces que si:

$$\left(M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n\right) \text{ entonces } \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, M_n < \varepsilon$$

$$(\{P_n\} \to P) \text{ entonces } \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, P - P_n < \varepsilon$$

Entonces

$R = P$

Si suponemos que $R > P$, entonces $R - P > 0$. Por tanto, existe n tal que $R - P_n < R - P$, de lo que se tiene que $P_n > P$. $\rightleftarrows$.

Si suponemos que $P > R$, entonces $P - R > 0$. Por tanto, existe n tal que $P - P_n < P - R$, de lo que se tiene que $P_n > R$. $\rightleftarrows$.

Por tanto, $R = P$.

Esto es de suma importancia, pues se está demostrando que una figura curvilínea se puede *agotar* con polígonos inscritos haciendo que la diferencia entre la figura R y la sucesión $\{P_n\}$ de polígonos sea *tan pequeña como se quiera*. Cualquier parecido con la integral de Riemann no es pura coincidencia: estos son los elementos primigenios de la Integral de Riemann.

Teniendo esto como base, Arquímedes llega a dos grandes resultados, que se consideran como dos joyas y pilares de la antigüedad griega: Realiza la cuadratura de la parábola (Realmente Arquímedes encuentra este resultado usando dos métodos, el método mecánico (que no se considera riguroso matemáticamente por apelar a resultados físicos) y el método exhaustivo que será el que se mostrará en este escrito) y encuentra una figura rectilínea equivalente al círculo.

Proposición 24 (De la cuadratura de la parábola). El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento.

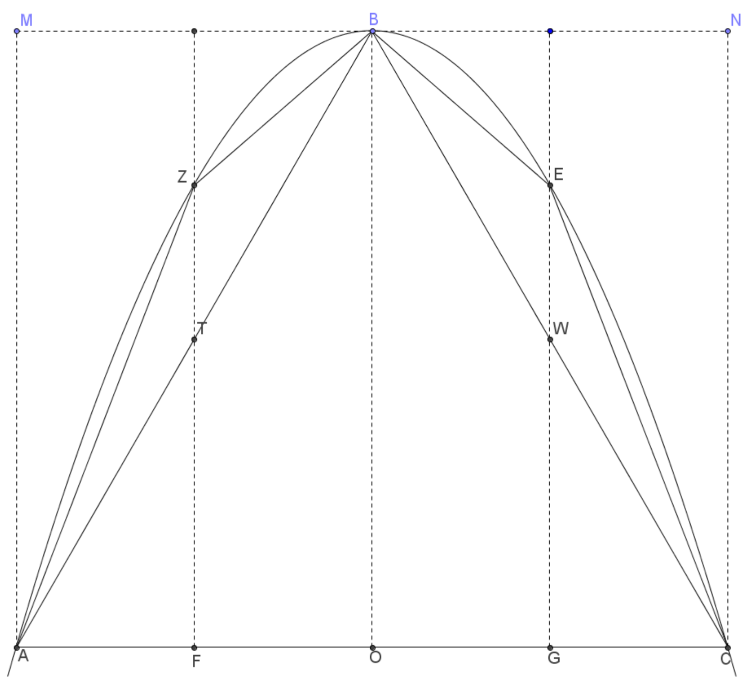

Figura 5. Cuadratura de la parábola, método exhaustivo

Sea ABC la parábola, donde B es el vértice.

A continuación se inscriben triángulos así:

Se inscribe el ΔABC donde O es el punto medio de AC.

Sea F punto medio de AO. Trazamos una perpendicular que intercepta la parábola en Z, y se construye el triángulo AZB y análogamente con OC.

Se tiene la siguiente sucesión:

$$P_0 = \Delta ABC$$

$$P_1 = P_0 + \Delta AZB + \Delta BEC$$

$$\vdots$$

(y de la misma forma para $P_2, \dots, P_n$). *Para* esto se divide AC en cuatro partes iguales y se trazan FZ, GE paralelas a OB. Teniendo en cuenta algunas propiedades de la parábola y usando algunas proposiciones del libro I de los *Elementos* de Euclides, se puede demostrar que:

$$\Delta ABC = 4(\Delta AZB + \Delta BEC)$$

Por tanto,

$$a(P_1) = a(P_0) + \frac{1}{4}(P_0)$$

A través de razonamientos análogos se demuestra que:

$$a(P_2) = a(P_0) + \frac{1}{4}a(P_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a(P_0)$$

$$\vdots$$

$$a(P_n) = a(P_0) + \frac{1}{4}a(P_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a(P_0) + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a(P_0) \dots$$

Es decir,

$$P_n = P_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k P_0$$

Ahora Arquímedes se apoya en el siguiente resultado:

$$\left(\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = \frac{4}{1}\right) \rightarrow A + B + C + D + E = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$$

Y como la relación entre el polígono que se inscribe y el siguiente es de 4 a 1, y si denominamos a S como el área del segmento parabólico, concluye que:

$$\mathrm{S} = \frac{4}{3}P_0 - \frac{1}{3}\frac{P_0}{4^n}$$

Pero, como el sustraendo puede ser tan pequeño como se quiera, Arquímedes concluye que:

$$S = \frac{4}{3}P_0.$$

Este resultado que acaba de mostrar Arquímedes es importante, pues ha encontrado la cuadratura de una figura que no es curvilínea[3] y la parábola, al ser una de las secciones del cono de Apolonio, lleva ya gran importancia.

Una curva de gran relevancia de la antigüedad es el círculo (sección cónica también). El problema: "Dado un círculo, encontrar un cuadrado equivalente" lo resuelve Arquímedes (de cierta manera). Este es un gran resultado: ¡Encuentra una figura rectilínea equivalente al círculo!

> **Proposición 1. (Medida del Círculo).** Un círculo es equivalente a un triángulo cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

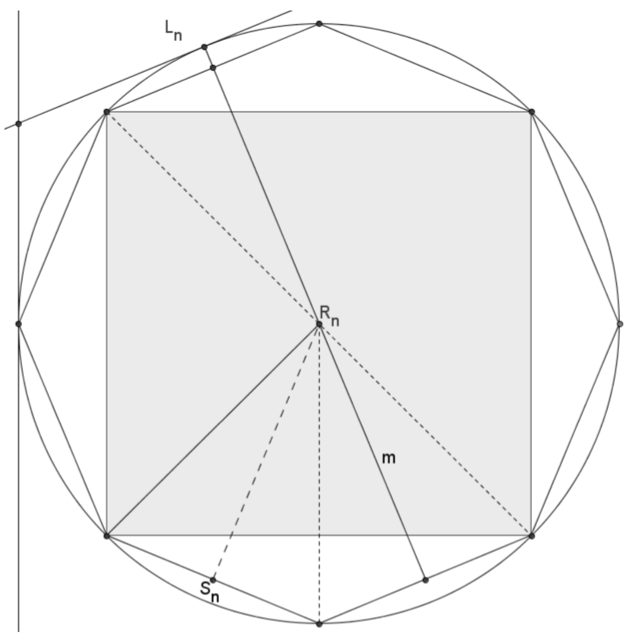

Figura 6. Circulo equivalente a un triángulo

Si se supone que $a(C) > a(T)$, es decir $a(C) - a(T) > 0$ donde T es ΔABC. Entonces por la proposición XII,2 $\exists P_n$, polígono inscrito en la circunferencia, tal que $a(C) - a(P_n) < a(C) - a(T)$ de lo que se tiene que $\boxed{a(P_n) > a(T)}$. De otro lado si consideramos $\mathrm{l(C)}$ como la longitud de la circunferencia se tiene:

$a(P_n) = nS_n\frac{1}{2}m < \frac{1}{2}lR$ porque $nS_n < l$ y $m < R$, entonces $a(P_n) < a(T)$ $\uparrow\downarrow$

Luego $a(T) \nless a(C)$

[3] Aunque no es el primero en encontrar la cuadratura de figuras curvilíneas, ya Hipócrates de Quíos había encontrado la cuadratura de algunas lúnulas.

Si se supone que $a(C) < a(T)$, es decir $a(T) - a(C) > 0$. Entonces por la proposición XII,2 $\exists \mathrm{Q_n}$, polígono circunscrito en la circunferencia, tal que, $a(Q_n) - a(C) < a(T) - a(C)$ de lo que se tiene $\boxed{a(Q_n) < a(T)}$. De otro lado:

$a(Q_n) = nL_n \frac{1}{2} R_n > \frac{1}{2} Rl$, entonces $a(Q_n) > a(T)$ ↿⇂

Luego $a(T) \ngtr a(C)$

Por consiguiente $a(C) = a(T)$.

Y como el triángulo es en sí figura rectilínea, entonces es posible encontrar un cuadrado equivalente. El problema yace en que este triángulo no es posible construirlo, pues el hacerlo implica la construcción del número π, que bien sabemos, no es un número construible con regla y compás, pues es trascendente (no es solución de ninguna ecuación con coeficientes racionales). Por tanto, Arquímedes no ha resuelto completamente el problema de la cuadratura del círculo.

Algunas consideraciones finales

Ni Euclides ni Arquímedes han resuelto el problema de la cuadratura del círculo, pero le dejan a la posteridad los aspectos conceptuales y el método, que es por excelencia el método de medida de magnitudes.

El método exhaustivo, concerniente a ir agotando a la figura tanto como se quiera es el método que los matemáticos heredan de la antigüedad. Cualquier parecido con la integral de Riemann no es pura coincidencia, ya que sus raíces están en el método exhaustivo. Ese tan pequeño como se quiera se formaliza matemáticamente con el concepto de límite, siendo el Análisis la rama de la matemáticas que legaliza esos procesos infinitos. El problema del triángulo que Arquímedes no puede construir hace que el problema de la cuadratura del círculo cambie un poco: Ya que se encontró una figura rectilínea equivalente al círculo, ¿Cómo se construye esta figura?, es decir, ¿Cómo se construye π? Esta pregunta hizo el que grandes ramas de la matemática fueran surgiendo, como respuesta a la construcción de π, que aunque se demuestra contundentemente la imposibilidad de su construcción al ser un número trascendente, abrió paso a considerar teorías sobre series y convergencia.

El problema de la medida pasa por muchas manos, siendo un problema de relevos, donde culmina con desarrollos grandes de las teorías de la matemática, con surgimientos de ramas de la matemática misma, como lo son: Descartes con su Geometría Analítica, Cavalieri con su teoría de indivisibles, Newton y Leibniz con el Cálculo, la instauración de $\mathbb{R}$ con Cantor y Dedekind, Cauchy con el Análisis, las redefiniciones de integral por Cauchy y Riemann, las nociones de medida de Jordan y Borel; y culminando con la tesis doctoral de 1902 de Henri Lebesgue: *Integral, Longitud, Área*, en donde se encuentra una primera buena respuesta al problema del área. Una pregunta quizá ingenua en la Antigua Grecia dio paso a grandes teorías de la matemática.

Cauchy ha definido analíticamente la integral, siendo redefinida por Riemann, que posteriormente, por los resultados de Dini, se llega a que lleva a contradicciones. En 1902, Lebesgue se da cuenta que el problema de la medida se encuentra en las raíces de esta misma, y cambia el concepto de medida relativa de los antiguos por el de medida absoluta. Para poder hacer esto, vuelve a leer a Euclides y Arquímedes, comprendiendo que aquí está la respuesta. Lo olvidado es nuevo, y las teorías matemáticas no se construyen muchas veces por un solo matemático, sino que este lleva en sus hombros un conglomerado de conceptos que han sido construidos a través de muchos siglos, épocas, creencias, concepciones y filosofías, matizadas a través del tiempo, buscando cada vez más contundencia en las teorías matemáticas.

Referencias y Bibliografía

Arquímedes. (1970). De la cuadratura de la parábola. *Científicos griegos* (Vol. II, pp. 220-237). Madrid: Aguilar.

Arquímedes. (1970). Medida del círculo. *Científicos griegos* (Vol. II, pp. 94-99). Madrid: Aguilar.

Bobadilla, M. (2012). Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. Tesis doctoral. Universidad del Valle.

Dhombres, J. (1980). *mesure et continu*. *Épistémologie et histoire*. Nantes: CEDIC/Fernand Nathan.

Euclides. (1970). Elementos de Geometría. *Científicos griegos* (Vol. I, pp. 689-959). Madrid: Aguilar.

Euclides. (1991). *Elementos*. (M. L. Puertas, Trad.) Madrid: Gredos.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of the Elements.* New York: Dover, (segunda edición).

Klein, M. (1972). El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días (Vol. I). Madrid: Alianza.

Levi, B. (2000). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2000.

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: enseñanza universitaria, XV* (2), pp.103-127.

Recalde, L. (2011). *Lecciones de Historia de la Matemática*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.