I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano.

Osiel **Ramírez** Sandoval
Cinvestav - IPN
México
osielr@cinvestav.mx
César Fabián **Romero** Félix
Cinvestav - IPN
México
cesar.rfelix@gmail.com
Asuman **Oktaç**
Cinvestav - IPN
México
oktac@cinvestav.mx

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación, realizada con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, basados en el análisis de una entrevista que incluye diversas situaciones de Transformaciones Lineales. Utilizando la teoría de registros de representación semiótica se analiza la coordinación de registros por parte de los estudiantes y su relación con el éxito y eficiencia al resolver las situaciones planteadas. Se incluyen descripciones de algunos casos exitosos de coordinación y de una situación donde no se logró ésta. Con base en las representaciones usadas por los estudiantes así como sus explicaciones verbales durante la entrevista, se concluye que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros exitosamente al presentársele alguna situación matemática, busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverlas.

Palabras clave: Algebra Lineal, Transformaciones Lineales, Registros de Representación Semiótica, Coordinación de Registros.

1. Objetivos de Investigación

La presente investigación toma como marco de referencia a la teoría de registros de representación semiótica de Duval (1999) centrándose en el concepto de Transformación Lineal (TL), con el objetivo de explicar la relación que guarda la coordinación de registros con el éxito al resolver situaciones matemáticas, y de dar ejemplos concretos de casos de coordinación y no coordinación.

Sin negar la complejidad intrínseca del concepto de TL como un factor en su aprendizaje, partimos de que "la ausencia de coordinación entre los diferentes registros produce con mucha frecuencia un handicap para los aprendizajes conceptuales" (Duval, 1999, p. 30) y que de no llevarse a cabo la coordinación de registros, la comprensión conceptual de este tópico podría converger tarde o temprano a un fracaso.

2. Aspectos Metodológicos

Los datos para la investigación se obtuvieron de una entrevista a estudiantes que cursaban Álgebra Lineal en una universidad pública de la Ciudad de México. Apoyándose en las propuestas metodológicas para investigaciones con un enfoque semiótico de Duval (2008); donde se señala que una aproximación semiótica permite describir al menos un procedimiento de análisis, el cual se compone de tres etapas:

(1) Las observaciones se realizan en el contexto de un problema; es esencial empezar por hacer el mapa representacional de todo el campo de trabajo de representaciones… en el que la búsqueda de la solución puede ser gestionada por los estudiantes. Esto no depende de lo que los estudiantes han hecho, sino de lo que se les da o lo que se espera de ellos.

(2) Este campo de trabajo es una herramienta para romper la producción de cada estudiante en segmentos o unidades interpretables en función de:

— los pasajes que él / ella hace o no hace … entre los diferentes registros de representación

— el registro elegido por el alumno para realizar un tratamiento.

(3) Por último, sobre esta base, una comparación verificable puede llevarse a cabo entre las distintas producciones conseguidas. Naturalmente, esta comparación puede estar correlacionada con el nivel de habilidades matemáticas, sin confundirse con ellas. Y, esta comparación se puede extender también a las producciones conseguidas durante largos períodos de tiempo, con el fin de observar si la comprensión evoluciona en profundidad o no. (p. 57)

Para los fines de la presente investigación, estas etapas se interpretan de la siguiente manera: En la primera se realizó la descripción de los registros y sus relaciones, así como un análisis a priori de cada actividad de la entrevista; en el segundo momento se segmentó la producción de los estudiantes en situaciones de coordinación y no coordinación; y en la etapa final se analizaron las producciones de los estudiantes, incluyendo sus expresiones verbales y gestuales, buscando relaciones entre la coordinación y el éxito al resolver las situaciones.

3. La Teoría de Registros de Representación Semiótica

En este apartado señalamos brevemente algunos de los elementos que componen la teoría de registros de representación semiótica, en los que nos apoyamos en la investigación presentada.

3.1. Registro de Representación Semiótica

Duval (1993) manifiesta que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. De tal manera, un sistema de signos puede ser un **registro de representación**, si permite las tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1. La formación de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación.
3. La conversión de una representación.

Acerca de la tercera actividad, Duval (2006) comenta que "es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones cuyos contenidos tienen muy seguido nada en común" (p. 112). Más precisamente, es común que dos representaciones de un mismo objeto en distintos registros no sean congruentes. La congruencia de representaciones está determinada por tres condiciones según Duval (1999):

> "… correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y [la posibilidad de] convertir una unidad significante en la representación de salida en una sola unidad significante en la representación de llegada" (p. 6)

Siendo las unidades significantes las partes más pequeñas en que se puede descomponer una representación. Es importante señalar que cuando se tiene congruencia entre dos representaciones en un sentido, no necesariamente se mantiene la congruencia en el otro sentido de la conversión. Asimismo se pueden cumplir parcialmente, en diferente medida, los tres criterios de congruencia lo cual nos permite comparar la congruencia entre distintas representaciones y hablar de representaciones más o menos congruentes que otras.

Diversos conceptos en Álgebra Lineal como por ejemplo sistemas de ecuaciones, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales al trabajarlos en R^2 ó R^3, pueden representarse en por lo menos tres registros. Uno de los objetivos de la presente investigación es identificar los que emplearon los estudiantes entrevistados y las conversiones que realizaron.

3.2. Registros de representación en Álgebra Lineal

Existen diversas investigaciones que describen las características de los registros de representación usados o recomendados para el estudio del Álgebra Lineal (Pavlopoulou, 1993; Soto, 2003; Soto et al., 2012), sin embargo para los propósitos de este artículo nos parece necesario precisarlas aún más. En esta sección presentamos una descripción que aunque no exhaustiva, proporciona mayor detalle sobre las características de los cuatro registros que pueden emplearse para dar solución a las situaciones que aparecen en las entrevistas.

Cabe aclarar que los conceptos de Álgebra Lineal que aparecen en las preguntas de la entrevista tales como espacio vectorial, vector y transformación lineal pueden ser representados en los cuatro registros descritos en este apartado. La descripción está enfocada en la manera particular que cada registro permite representar a estos objetos, en algunos tratamientos elementales y en características de algunas conversiones, coincidiendo en general con la descripción hecha por Pavlopoulou (1993).

Del análisis a priori, destacamos que los conceptos de Álgebra Lineal que aparecen en las preguntas de la entrevista pueden ser representados en cuatro registros: el registro algebraico donde se forman expresiones del tipo $Z=a*V+c*W$; el registro matricial, donde se representan arreglos rectangulares de otros objetos; el registro gráfico-sintético donde los vectores son representados con flechas definidas por su magnitud, dirección y sentido; y el registro gráfico-cartesiano que se caracteriza por utilizar ejes para definir a los vectores con las coordenadas relativas a éstos.

3.2.1. Registro gráfico sintético. Este registro tiene algunas reglas de formación que lo distinguen fácilmente, por ejemplo, para representar a un vector fijo se puede utilizar cualquier flecha de una familia infinita con la misma magnitud, dirección y sentido ya que comparten características definitorias en el registro; esto implica que la traslación de las flechas es un tratamiento neutro, en el sentido de que las representaciones conservan la misma información después de realizado el tratamiento.

Sobre los tratamientos esenciales en este registro, retomamos de Soto (2003) que existen dos tratamientos para la suma de vectores: regla del paralelogramo y regla del triángulo. Para sumar dos vectores con la regla del paralelogramo se traslada uno hasta que coincidan los puntos iniciales de ambos de manera que forman los lados adyacentes de un paralelogramo; los otros dos lados se construyen dibujando copias de los dos vectores iniciales, cada uno iniciando en el punto final del otro; el vector suma se representa entonces como la flecha que coincide con la diagonal del paralelogramo. Con la regla del triángulo, se traslada una flecha de modo que el punto inicial de ésta coincida con el punto final de la segunda flecha y el vector suma se representa con la flecha formada con el punto inicial del segundo vector y el punto final del primero.

Es común encontrar dificultades al utilizar este registro en Álgebra Lineal por la multitud de representaciones válidas para la misma situación (sea para vectores o para sumas) o por las muy distintas interpretaciones que se les puede atribuir a una misma representación, como la que trata con la forma de la letra "M" en el plano (Figura 1).

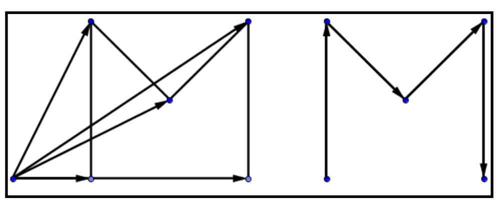

Figura 1. Interpretaciones posibles de una figura con forma de "M" en el plano

La ambigüedad del registro puede implicar complicaciones para su uso en determinadas situaciones al poder significar cosas considerablemente distintas, como podremos ver más adelante.

3.2.2. Registro gráfico cartesiano. Comúnmente en los cursos de Álgebra Lineal se deja de utilizar el registro sintético para representar a los vectores pasando a un nuevo registro gráfico que tiene inicialmente distintas reglas de formación para las representaciones. En este otro registro gráfico, los vectores también son representados por flechas pero ahora todas las flechas comparten el punto inicial; este punto inicial común es llamado el origen y generalmente es definido por la intersección de dos rectas perpendiculares llamadas ejes. Los ejes pueden estar graduados y de tal manera las flechas pueden estar acompañadas de etiquetas como en el otro registro gráfico o con etiquetas de coordenadas como (2,3).

En este segundo registro, dos flechas representan al mismo vector sólo si tienen el mismo punto final (o coordenadas), por lo que sólo hay una flecha para cada vector, y el vector cero es representado por el origen. La suma de vectores puede realizarse sólo con la regla del paralelogramo ya que no es válido desplazar una flecha de modo que su punto inicial sea distinto al origen. El registro cartesiano no comparte la ambigüedad del registro sintético al facilitar una única interpretación de representaciones como la de la letra M (y en general de cualquier región del plano) que podía ser vista en el registro sintético de dos formas distintas; la interpretación en el registro cartesiano corresponde a las flechas que van del origen a cada punto de la región indicada.

3.2.3. Registro algebraico y registro matricial. Presentamos estos dos registros en la misma subsección porque, a diferencia del par de registros gráficos, estos pueden ser utilizados simultáneamente sin mayores complicaciones y sin generar ambigüedad en las representaciones involucradas.

El registro algebraico es quizá el más usado cuando se definen conceptos o se redactan teoremas. En este registro se utilizan letras, números y símbolos para representar diversos tipos de objetos como vectores, escalares y operaciones, formando expresiones como la combinación lineal de tres vectores $\mathrm{a} \cdot \mathrm{V} + \mathrm{c} \cdot \mathrm{W} + \mathrm{d} \cdot \mathrm{Z}$; o la definición de vectores propios para una transformación $\mathrm{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\exists \mathrm{U} \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \wedge \exists \mathrm{k} \in \mathbb{R}: \mathrm{T}(\mathrm{U}) = \mathrm{k} \cdot \mathrm{U}$$

En este registro dos letras representan al mismo vector si se declara explícitamente, es decir, el vector V es igual al vector W si se tiene la expresión V=W, o si se puede inferir a partir de tratamientos algebraicos como la sustitución de expresiones equivalentes. En general el registro algebraico permite una organización más eficiente del conocimiento matemático, ya que facilita la representación de situaciones complejas de una manera más precisa y compacta aunque con las desventajas propias del formalismo (ver Duval, 1999 y Soto et al., 2012).

El registro matricial permite representar en forma de matriz una gran diversidad de objetos del Álgebra Lineal. Por un lado las matrices son arreglos rectangulares de otros objetos (números, polinomios, otras matrices, etc. Por otro lado mediante ellas se pueden representar conceptos de otra naturaleza como cambios de base, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones. En el caso de una transformación lineal, ésta se puede representar con una matriz que al multiplicarla por cualquier vector se obtenga la imagen de tal vector bajo la transformación lineal.

La naturaleza de las matrices como arreglos de otros objetos provoca que en cierta forma se "hereden" algunas características de estos y de sus representaciones. De tal manera, es importante tener en cuenta que los tratamientos matriciales son generalmente derivados o influenciados por los tratamientos de las componentes de éstas. Si se tiene una matriz con entradas racionales de la forma a/b el tratamiento de suma es significativamente distinto a si la matriz tuviera entradas enteras o entradas algebraicas. Esta característica de los tratamientos matriciales nos puede llevar a interpretar partes de éstos, por ejemplo la suma de componentes, como tratamientos de otros registros.

En las situaciones relevantes para este artículo nos podemos encontrar con arreglos de números, como $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemento de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$; o de arreglos de polinomios como $\begin{pmatrix} 2 \cdot x + y \\ x - 3 \cdot y \end{pmatrix}$.

El uso simultáneo de estos dos registros puede ser observado en expresiones del tipo $\alpha \cdot U + \beta \cdot V = \alpha \cdot \binom{1}{2} + \beta \cdot \binom{2}{3}$. Es común encontrar en libros o en producciones de los estudiantes expresiones mixtas que, en el mejor de los casos, implican que se ha desarrollado la coordinación de esos registros a tal grado de poder realizar conversiones de manera espontánea en una misma expresión. A pesar de que se pueden encontrar abundantes ejemplos de expresiones mixtas, no significa que los registros matricial y algebraico sean en su totalidad congruentes, como muestra Pavlopoulou (1993) en casos de conversión de matrices a sistemas de ecuaciones.

Atribuimos la abundante utilización de estas expresiones algebraico-matriciales al nivel de congruencia entre algunas representaciones en estos dos registros. Las reglas de formación en ambos registros tienen varias coincidencias, como se aprecia en la representación de una combinación lineal de vectores. Las unidades significantes en las expresiones de combinación lineal mantienen el mismo orden para la suma y para el producto por escalar. De tal manera, una simple sustitución puede ser suficiente para la conversión de una combinación lineal entre los registros matricial y algebraico.

3.3. Coordinación de Registros de Representación Semiótica

La coordinación consiste en la movilización y la articulación "inmediatas" de los registros de representación semiótica y supone como condición principal la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro (Duval, 1999).

Una persona con una buena coordinación de registros podría resolver situaciones matemáticas trabajando en un solo registro, no porque no pueda emplear otros, sino porque decidió que la manera más eficiente de llegar a la solución es trabajar en ese único registro, considerando los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en los diferentes registros y la solución a la que desea llegar. De esta manera no se requiere la utilización hacia el exterior de representaciones de los registros coordinados en la situación que se esté tratando.

4. Análisis de la entrevista

A continuación presentamos el análisis de algunas situaciones realizadas durante la entrevista, poniendo especial énfasis en los casos donde las situaciones guardaban estrecha relación con la coordinación de registros, así como en algunos usos inapropiados de representaciones.

4.1. Definición de Transformación Lineal, según los estudiantes

La primera pregunta que se les presentó a los estudiantes, tenía el propósito en situar su concepción de Transformación Lineal, al cuestionarles ¿Qué entiendes por Transformación Lineal? La mayoría de los estudiantes hicieron alusión a la definición que se muestra en sus libros de texto, especialmente la definición que ofrece Grossman (2008, p. 460):

> Sean V, W dos espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α,

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

y

$$T(\alpha v) = \propto Tv$$

Por ejemplo, durante la entrevista Natalia[1] presentó su propia *"definición"* de la siguiente manera:

> Natalia: Me basaría en lo que es la definición, entonces: Se supone que una transformación lineal, es tal que pasa un vector α∈ V, lo pasa a ser otro vector y el cual pertenece a un espacio vectorial diferente de V o puede ser el mismo. Esa es la definición, que yo daría por así decirlo.

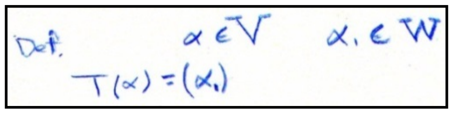

Figura 2. Definición de Natalia de Transformación Lineal

Natalia aporta una "*definición*", que no incluye suficientes condiciones para definir a una Transformación Lineal, aunque el siguiente extracto muestra que ella conoce la definición formal al explicarla de la siguiente manera:

> Natalia: …claro, si ya nos lo explican en los libros, bueno nos dice que la definición, dado dos vectores, su transformación cada uno; bueno, que la transformación lineal de la suma de los dos vectores es igual a que si fuera la transformación por separado y que si dado un escalar β, entonces este β al multiplicarlo por el vector, es como si tuviéramos al escalar β multiplicando a la transformación lineal, bueno ésta es la definición que he visto en los libros.

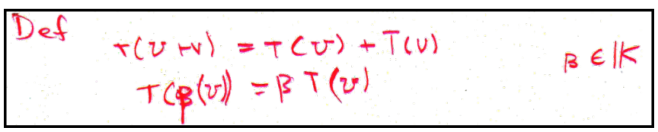

Figura 3. Definición formal representada por Natalia

Sin embargo ella insiste en usar su propia definición y nuevamente la explica, empleando el siguiente diagrama:

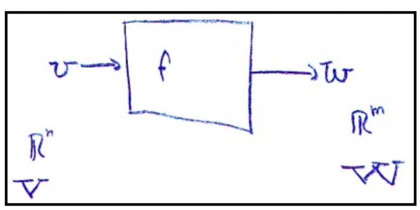

Figura 4. Diagrama de Transformación Lineal de Natalia

Esta figura, evoca a la presentación elemental de función que emplean algunos libros de cálculo al verla como una "caja negra" que trasforma los valores u objetos de entrada en los valores u objetos de salida. Natalia muestra confusión entre el concepto de función y el concepto de Transformación Lineal, ya que emplea algunos elementos distintivos de un curso de Cálculo. La concepción de Natalia consiste en el cambio de un vector en el dominio a uno del

[1] Todos los nombres de los estudiantes son pseudónimos.

contradominio, sin considerar condiciones de linealidad. Como veremos más adelante esto afectará su desempeño en el resto de la entrevista.

Por otro lado, el estudiante Luis al abordar la misma actividad, explica de manera más detallada lo que entiende por transformación lineal.

> [Luis] (Escribe): Por transformación lineal, entiendo una función que va de un subespacio dado a otro subespacio o en su defecto al cuerpo de los escalares en el cuál se esté trabajando, que cumple con la siguiente propiedad: Dados 2 elementos del subespacio (u,v) y un escalar (α) del cuerpo correspondiente, se tiene que
>
> $$\alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v)$$

Al parecer, Luis se apega a la definición presentada en uno de sus libros de texto, donde se define la Transformación Lineal de la siguiente manera (Hoffman y Kunze, 1973):

> Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo F. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que
>
> $$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T(\beta)$$
>
> para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F. (p. 67)

La definición personal de Luis corresponde a la definición formal, y esto influye positivamente en su desempeño durante la entrevista.

4.2. Ejemplos de Coordinación de Registros

La elección del registro adecuado para iniciar la solución de un problema y la articulación de los demás registros que se decida utilizar contribuyen al éxito de la solución del problema matemático. Situaciones que provocan este tipo de decisiones se presentaron en diversos momentos de la entrevista, por ejemplo, se pidió a los estudiantes un *ejemplo de una TL*. El estudiante Luis propuso la siguiente expresión algebraica:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ -5y \\ z+x \end{pmatrix}$$

Figura 5. Transformación Lineal propuesto por Luis

Además de proporcionar un ejemplo, decidió demostrar su validez y en el transcurso de esta actividad, reveló la coordinación de diversos registros al emplear acertadamente conversiones en diferentes momentos para validar su propuesta. Empezó por definir dos vectores (u y v); continuó con una serie de conversiones del registro algebraico al matricial, realizando casi en su totalidad la demostración en este último registro. Posteriormente, aplicó su TL al resultado de la suma de los vectores, y aplicó algunos tratamientos matriciales para obtener una expresión en este registro que presentara un alto nivel de congruencia con la expresión algebraica *c*T(u)+T(v)*; permitiéndole realizar la conversión del registro matricial al algebraico, concluyendo su demostración al comprobar la condición de linealidad con la igualdad que propuso en su definición:

$$c\begin{pmatrix} x_1+2y_1-3z_1 \\ -5y_1 \\ z_1+x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+2y_2-3z_2 \\ -5y_2 \\ z_2+x_2 \end{pmatrix} = c\,T(u) + T(v)$$

Figura 6. Conversión del registro matricial al algebraico

En esta última acción el estudiante transita del registro matricial al algebraico de manera inmediata; la alta congruencia entre las representaciones que utiliza en estos registros puede ser un factor determinante para lograrlo.

Una situación de coordinación semejante a la anterior se aprecia cuando se solicita al mismo estudiante que proporcione un ejemplo de una Transformación No Lineal.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ z \\ y^3 \end{pmatrix}$$

Figura 7. Transformación no lineal propuesto por Luis

Luis proporciona un ejemplo en el registro matricial y haciendo un análisis similar a su ejemplo de transformación lineal, demuestra que éste no lo es. La estrategia que emplea consiste primero en trabajar el resultado obtenido al evaluar $T(c\alpha + \beta)$, posteriormente trabajar la expresión $c(T\alpha) + T(\beta)$ y averiguar la igualdad. Debido a que no son iguales los resultados, concluye que su ejemplo no corresponde a una Transformación Lineal. De esta manera Luis llega a demostrar que el ejemplo que propuso, efectivamente corresponde a una Transformación No Lineal. De la misma manera que en la situación anterior, parece diseñar un plan de acción que involucra los dos registros para luego transitar libremente entre ellos, lo que muestra su habilidad de coordinación.

4.3. Ejemplo de No Coordinación de Registros

La ausencia de coordinación de registros crea obstáculos en el aprendizaje, provocando incluso el fracaso en la resolución de problemas. Por ejemplo Natalia, al solicitarle un ejemplo de TL, inicia planteando la expresión:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^3$

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(\alpha) = \beta$ $\quad \beta \in \mathbb{R}$.

Figura 8. Propuesta de Natalia de Transformación Lineal

Al pedirle que especificara cómo sería la TL, recurre al registro matricial para señalar que sería del tipo α=(4,5,7) con T(4,5,7)=(6,2), sin aclarar la naturaleza de T; revela dificultades para trasladar su ejemplo del registro algebraico al matricial. Para indagar sobre esta dificultad, se le solicita proporcionar el arreglo matricial correspondiente a la TL que propuso; ella nuevamente acude al registro algebraico para argumentar que la TL solicitada tendría la forma $\mathrm{Tx} = \mathrm{Ax};\ \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{nxm}}$. Argumentando que "*la matriz tendría que ser de…2x2…bueno, sería buscar entonces una matriz, tal que al multiplicarse entonces diera al producto, entonces como éste es un vector* (x, y, z) *la matriz que buscamos nos va a mandar a R2*". En su intento por trasladar la representación algebraica al registro matricial, erra nuevamente y al percatarse que no puede obtener la matriz termina por no lograr proporcionar un ejemplo de TL.

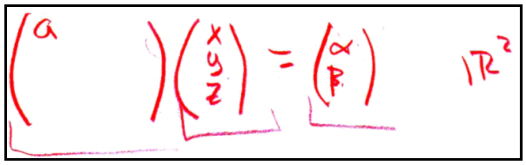

Figura 9. Registro matricial propuesto por Natalia

Natalia no pudo realizar la conversión de la igualdad escrita algebraicamente al registro matricial como consecuencia de la definición incompleta que utiliza. Sin embargo el hecho de que no se diera cuenta de qué datos le faltaban implica que no reconoce algunas unidades significantes en ambos registros, las que describen la relación entre las componentes de la matriz y la ecuación algebraica, y por tal razón se clasifica su intento como no coordinación.

5. Conclusiones

En esta investigación se obtuvo evidencia que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros, al presentársele alguna situación matemática busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverla. Sin embargo, el hecho de que resuelva alguna situación no implica que tenga esta habilidad. Por ejemplo el estudiante Franco al solicitarle una TL responde con la transformación identidad, caracterizándola con $T(I)=I$ y comprobando algebraicamente las propiedades de la definición. Aunque el estudiante proporcionó una respuesta correcta, la pregunta no nos permite averiguar si el estudiante realiza o no coordinación; simplemente pudo haber recordado un ejemplo trivial de TL.

Analizando únicamente las producciones de los estudiantes no se tendrían elementos suficientes para decidir si hay o no coordinación. Esto parece especialmente complicado en los casos que las producciones externas (verbales o en papel) son únicamente de un registro en particular. Un observador podría suponer que no hubo coordinación si no hace preguntas de seguimiento para averiguar qué tipo de representaciones que el estudiante tomó en cuenta al diseñar su estrategia para resolver la situación.

Por otro lado, se presentaron situaciones donde se muestra una gama de registros no coordinados, donde el intento de solución incluye representaciones de varios registros pero no lo consideramos coordinación porque sólo se realizan conversiones entre los registros que se recuerdan o son sugeridos por el investigador, partiendo de información incompleta, lo que impide tomar en cuenta algunas unidades significantes y el no hacerlo implica no cumplir la condición principal para la coordinación.

Observamos que la coordinación favorece la solución eficiente de situaciones matemáticas, mas no la garantiza. Las soluciones algorítmicas de problemas prototipo en la enseñanza mono-registro son un caso claro de esta situación. La importancia mayor de la coordinación según la teoría es para la aprehensión conceptual (Duval, 1999), ya que favorece la comprensión integrativa. Finalmente, proponemos la siguiente interrogante:

¿A parte de la conversión qué hay que desarrollar para lograr la habilidad de la coordinación?

La respuesta a esta pregunta contribuirá a mejorar teoría al esclarecer las relaciones entre la coordinación de registros y el aprendizaje conceptual; asimismo facilitará el desarrollo de propuestas de enseñanza que generen comprensión integrativa.

Referencias

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Ed. Hitt), 173-201, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France; México: Grupo editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61.1-2**, 103-131.

Duval, R. (2008). Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics. En . L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (eds.) *Semiotic perspectives in the teaching and learning of mathematics series. Semiotics in Mathematics Education, Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 39-63). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Grossman S. (2008). *Álgebra Lineal*. México: Sexta Edición, McGraw-Hill Interamericana.

Hoffman K. & Kunze R. (1973), *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Pavlopoulou, K. (1993), Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation, *Annales de didactique et de sciences cognitive* **5**, 67-93.

Soto, J. L. (2003), *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en R^2 y R^3*, Tesis doctoral, Cinvestav - IPN, México.

Soto, J. L., Romero, C. F. & Ibarra, S. E. (2012), El concepto de transformación lineal: una aproximación basad en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra, en *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (Eds. Hitt & Cortés), 38-49, Quebec, Canada, Loze-Dion éditeu.