



i.cemacyc.org

I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

Santo Domingo, República Dominicana



Demostraciones visuales de integrales complejas

José Saquimux

Universidad de San Carlos

Guatemala

jsaquimux@yahoo.co.uk

Resumen

Se describen demostraciones visuales¹ desarrolladas en el ambiente dinámico e interactivo del *Cabri II Plus 1.4*, creadas para visualizar algunas integrales de línea y contorno cerrado en variable compleja. La parte real de la integral se visualiza como el flujo del campo de Polya a largo del contorno, la parte imaginaria, como el flujo de dicho campo que cruza el contorno. Aprovechando simetrías o por aproximaciones con regiones poligonales, los valores de las partes real e imaginaria se inducen, de áreas netas bajo las curvas de flujo tangencial y normal. El usuario puede explorar casos particulares de independencia de trayectoria, el teorema de Cauchy-Goursat, la fórmula de integral de Cauchy o el principio de deformación del contorno. Aún en prueba en el aula, se señalan sus bondes principales, se discuten aspectos problemáticos y se propone su uso reflexivo como apoyo significativo en la enseñanza habitual de variable compleja de ingeniería.

Palabras claves: Demostración visual interactiva, integral compleja, campo de Polya, Cabri

Introducción

En la enseñanza actual de matemática universitaria, las demostraciones visuales interactivas vienen usándose con más frecuencia y aceptación por varios profesores, ello porque con dichas herramientas se pueden proponer ambientes apropiados de aprendizajes basados en actividades de motivación, exploración, verificación, descubrimiento o investigación.

¹ En este documento, “demostración visual” o simplemente “demostración”, hacen referencia a un programa desarrollado en algún software, diseñado para visualizar en ambiente interactivo, interpretaciones geométricas de algún enunciado matemático. Comúnmente, como se menciona en diversos sitios de internet, con dicho nombre se designa a este tipo herramientas visuales. Una demostración visual no constituye ni reemplaza la prueba formal del enunciado que se visualiza, entendida esta última como una argumentación deductiva formal del enunciado.

Las demostraciones visuales ofrecen oportunidades de participación activa del estudiante en procesos de descubrimientos, convencimiento significativo, construcciones personales, y, como concluye Kawski (2007), se cree que pueden ayudar a construir raíces conceptuales profundas. En el mismo sentido, Tall (2004) afirma que las demostraciones visuales interactivas en las que el estudiante participa manipulando el “ratón” como interfaz enactiva, para seleccionar y controlar la imagen de la pantalla por medio de movimientos manuales intuitivos, le permite construir conceptos matemáticos basados en su percepción humana subyacente. Además cree que, su uso puede beneficiar a aquellos estudiantes que necesitan una visión intuitiva de ciertos conceptos matemáticos.

Para la enseñanza de integración compleja a nivel introductorio, se disponen de varias demostraciones dinámicas o interactivas creadas para visualizar distintas interpretaciones geométricas de integrales complejas. Por ejemplo; en Cabri, Mike (2004), presenta una demostración para visualizar integrales de potencias alrededor del origen, a través de su representación de una suma vectorial finita de Riemann. En Mathematica; Blinder (sin fecha) desarrolla una visualización de integrales de contorno alrededor de un polo simple, Custy (sin fecha) muestra la geometría de la integral de potencias alrededor del origen, mientras que Krug y Wilkingson (sin fecha), presentan campos de Polya sobre circunferencias para ilustrar su interpretación visual.

En este documento se describen brevemente demostraciones interactivas desarrolladas en el ambiente dinámico del Cabri II Plus, como propuestas en prueba, diseñadas para visualizar algunas integrales de línea y contorno cerrado de variable compleja (Saquimux, 2012) En ellas se visualizan las interpretaciones de integral compleja; la parte real como el área neta bajo la curva de flujo tangencial del campo de Polya de la función, mientras que la parte imaginaria como el área neta bajo la curva de flujo normal (Burn & Peterson 1998). Aprovechando simetrías o por aproximaciones con regiones de poligonales, los valores de las partes real e imaginaria se inducen, de áreas netas bajo las curvas de flujo tangencial y normal. Adicionalmente, se pueden visualizar los vectores de Polya y sus componentes tangencial y normal sobre el contorno.

En particular, se describen demostraciones visuales de integrales de funciones lineales sobre segmentos; de integrales de potencias de la forma $f(z) = 1/(z - z_0)^k$ $k = 0, \pm 1, \dots$ sobre circunferencias o cuadriláteros, con z_0 dentro, sobre o fuera del contorno; e integrales de $f(z) = \sin z/(z - z_0)$ sobre circunferencias.

Creadas para visualizar las integrales mencionadas y algunas propiedades o teoremas asociados, el usuario puede interactuar con dichas demostraciones; arrastrando un punto z sobre la curva de integración, modificando las líneas o contornos, deslizando el polo o cero de la función, o cambiando algunos parámetros de la función.

Tienen importancia didáctica visualizar integrales de $f(z) = 1/(z - z_0)^k$, $k = 0, \pm 1, \dots$ sobre $|z - z_0| = r$, puesto que permiten apoyar al estudiante en su comprensión sobre propiedades que conducen al concepto de residuo y justifica el estudio de series de Laurent de funciones complejas (Mike, 2004)

Aunque cada una está elaborada para fines didácticos específicos, se cree que pueden relacionarse entre sí para generar secuencias didácticas de determinado tema.

En cuanto a su aplicación en aula, algunas están en fase de evaluación inicial, otras aún no (y se proyecta elaborar otras más), con la esperanza de construir un conjunto de demostraciones efectivas en la enseñanza de variable compleja a nivel introductorio en carreras de ingeniería.

Descripción de las demostraciones

Integrales de línea

La Figura 1 muestra una imagen de una demostración para visualizar las partes real e imaginaria de $\int_C (Az + B) dz$, con C la unión de los segmentos PQ y QR e integrando en el sentido PQR . El usuario puede explorar varios casos, modificando C (deslizando los puntos R , Q o P) o cambiando los coeficientes de la función A y B (deslizando los puntos A y B)

Los segmentos en rojo y azul representan las curvas de flujo tangencial y normal respectivamente. La parte real está representada el área neta en amarillo y la parte imaginaria el área en celeste. En el ambiente dinámico e interactivo del Cabri, siguiendo a los deslizamientos que realiza el usuario, la demostración va proporcionando el valor numérico de dichas áreas netas, y con ello los valores las partes real e imaginaria de la integral.

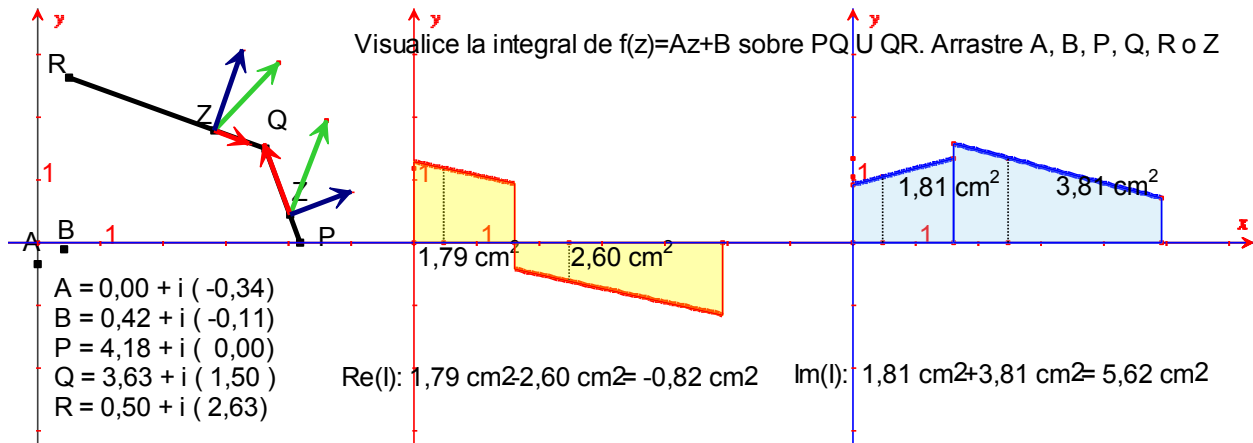


Figura. 1. Visualización de $\int_C (-i0.34z + 0.42 - i0.11) dz$, $C: PQR$, $P = 4.18$, $Q = 3.63 + i1.5$, $R = 0.5 + i2.63$, $ReI \cong -0.82$, $ImI \cong 5.62$. Vectores de Polya en verde, componente normal en azul y componente tangencial en rojo.

Como muestra la Figura 2, con P y R fijos, deslizando Q a otras posiciones, siempre que las curvas de flujo no corten al eje x como se muestran (restricciones de operación de la demostración), se visualiza que los valores de la parte real e imaginaria de la integral permanecen aproximadamente iguales.

Se pueden proponer actividades que favorecen, la exploración visual de la independencia de la trayectoria, discusiones sobre el teorema de Cauchy-Goursat, y la verificación en su forma compleja el teorema fundamental del cálculo para funciones lineales.

Adicionalmente, deslizando el punto z sobre los segmentos de integración, se puede explorar cualitativamente, relaciones entre magnitudes y direcciones de los vectores tangente y normal de Polya y, sentido de integración; con las coordenadas de los puntos sobre la curva de flujo correspondiente y el valor del área bajo la curva.

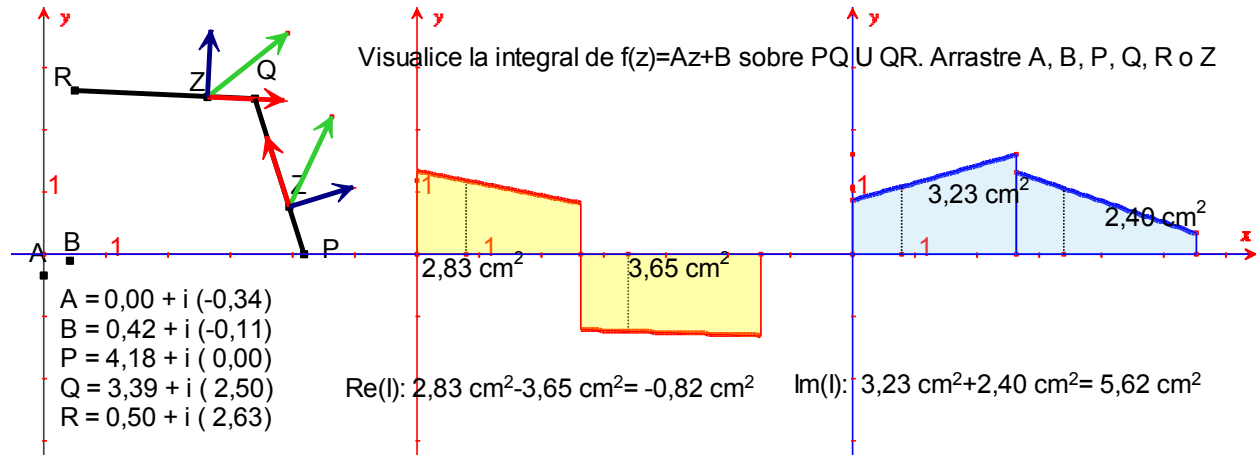


Figura. 2. Visualización de $\int_C (-i0.34z + 0.42 - i0.11) dz$, $C: PQR$, $P = 4.18$, $Q = 3.39 + i2.5$, $R = 0.5 + i2.63$, $ReI \cong -0.82$, $ImI \cong 5.62$.

Integrales de contorno cerrado

Se ha creado una demostración para visualizar las relaciones,

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^k} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{para } k = 1 \text{ con } z_0 \text{ dentro de } C: |z - z_1| = r \\ 0, & \text{para } k = 0, -1, \pm 2, \pm \dots, \text{ con } z_0 = z_1 \end{cases}$$

En esta demostración, el usuario tiene varias posibilidades participación activa; deslizar el centro de la circunferencia z_1 , deslizar el polo o cero z_0 de la función, variar el radio de la circunferencia, o seleccionar el valor del exponente k .

Al seleccionar $k = 1$, ubicar $z_0 = z_1$ y variando el radio de la circunferencia, se obtienen imágenes como la mostrada en la Figura 3, en la que se visualiza $\oint_C dz/(z - z_0) = 2\pi i$. El área bajo la curva de flujo tangencial en rojo es nula. El área bajo la curva de flujo normal en azul es el área de un rectángulo, aproximadamente 2π . La demostración permite visualizar este hecho para distintos $z_1 = z_0$ en el plano, en particular cuando $z_1 = z_0 = 0$ se visualiza $\oint_C dz/z = 2\pi i$

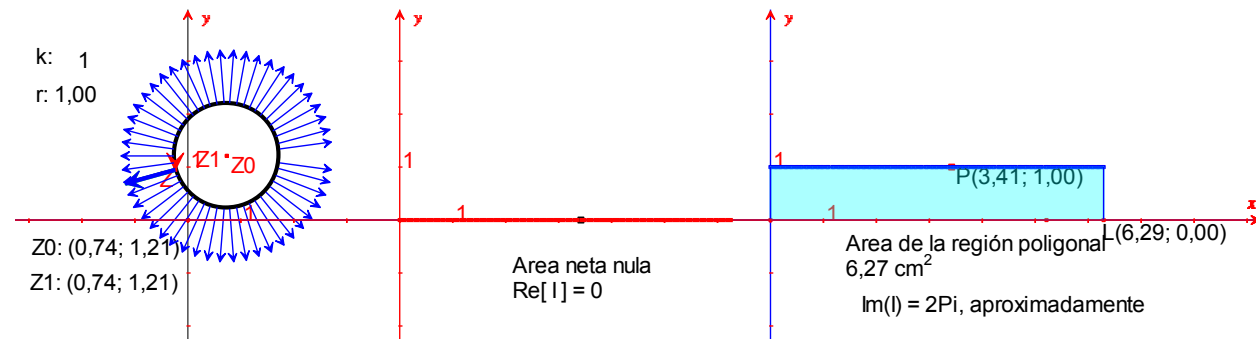


Figura 3. Visualización de $\oint_C dz/(z - z_0) = 2\pi i$ con z_0 en el centro de C . $ReI = 0$. $ImI \cong 2\pi$.

Seleccionando $k = 1$ y deslizando el polo z_0 alrededor del centro de la circunferencia, o el centro de la circunferencia z_1 alrededor del polo z_0 , o cambiando el radio de la circunferencia bajo la condición de que el polo z_0 esté cerca de z_1 ; se visualizan imágenes como la Figura 4

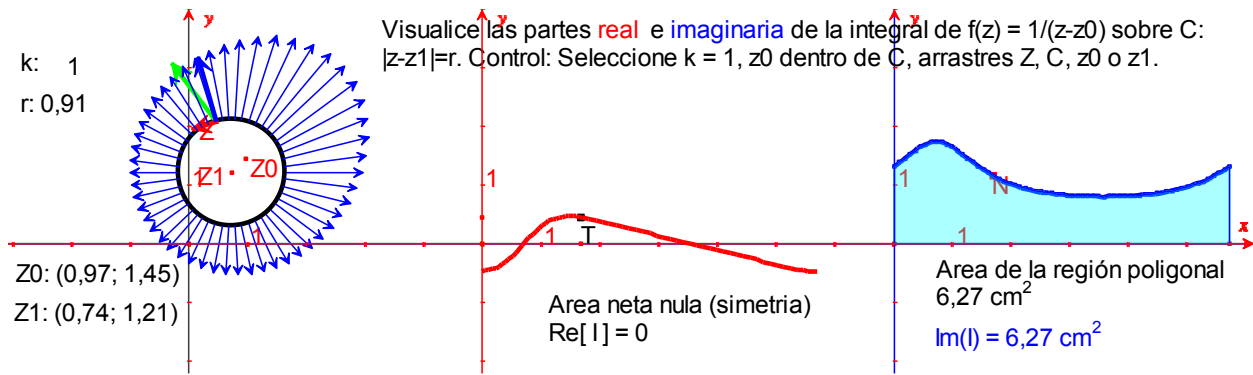


Figura 4. Visualización de $\oint_C dz/(z - z_0) = 2\pi i$ con z_0 dentro de C . $ReI = 0$. $ImI \cong 2\pi$.

En esta imagen se observa, por simetría, que el área neta bajo la curva de flujo tangencial en rojo es cero; mientras que área de la región poligonal bajo la curva de flujo normal en azul se mantiene aproximadamente igual a 2π . Con estas actividades se induce $\oint_C dz/(z - z_0) = 2\pi i$, con el polo z_0 dentro de C . Adicionalmente, permiten explorar o verificar un caso particular, del teorema del residuo en la integral $\oint_C dz/(z - z_0)$, con el punto singular z_0 dentro de C .

Seleccionando $z_0 = z_1$, variando r y seleccionando $k = 0, -1, \pm 2, \pm \dots$ se puede visualizar $\oint_C dz/(z - z_0)^k = 0$. Se observa que las curvas de flujo tangencial y normal son senoidales, con $|k - 1|$ ciclos completos sobre $[0, 2\pi r]$ (el perímetro de la circunferencia), por lo que las áreas netas bajo las curvas de flujo son nulas, mostrando que $ReI = ImI = 0$. La Figura 5 muestra la imagen para $k = 3$.

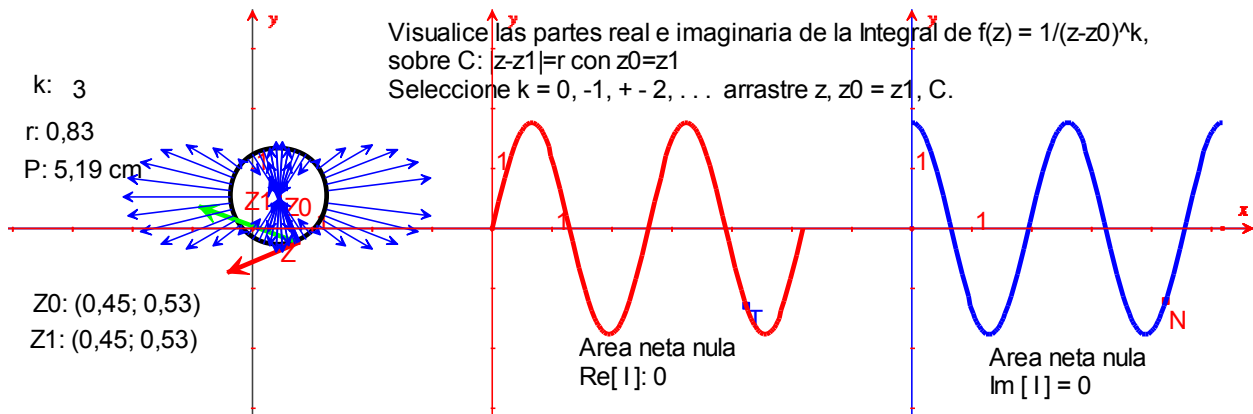


Figura 5. Visualización de $\oint_C dz/(z - z_0)^3 = 0$ con z_0 en el centro de C . $ReI = ImI = 0$.

Las visualizaciones de $\oint_C dz/(z - z_0)^k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ con $C: |z - z_0| = r$, se puede pueden aprovechar para motivar el estudio del desarrollo de Laurent de una función y su uso en el cálculo de algunas integrales complejas.

Es de señalar que las demostraciones descritas están diseñadas para deslizamientos en las que se mantiene z_0 en el interior del contorno no “muy” cerca de la circunferencia; para deslizamientos de z_0 en el interior de la circunferencia cercanos a la misma, las curvas de flujo presentan valores extremos grandes que dificultan visualizar las áreas netas bajo dichas curvas.

Con la intención de mostrar casos particulares de $\oint_C f(z)dz = 0$ cuando $f(z)$ es analítica dentro de C , se ha creado una demostración para explorar el teorema de Cauchy-Goursat con visualizaciones de $\oint_C dz/(z - z_0)^k = 0$ $C: |z - z_1| = r, k = 0, 1$ y 2 , y z_0 fuera de C . La Figura 6 muestra una imagen para $k = 1$. En ella deslizando el z_0 , fuera de la circunferencia y a la izquierda de la curva punteada, se visualiza que las partes real e imaginaria se mantienen aproximadamente igual a cero, obtenidas por simetría o aproximación del área neta de una región poligonal bajo las curvas en rojo y azul respectivamente.

Esta demostración presenta ciertas dificultades de uso, la curva de flujo normal en azul es “muy sensible” a deslizamientos de z_0 y a la variación de k , presentando dificultades para aproximar el área neta bajo la curva, por lo que la demostración proporciona visualizaciones aceptables solamente en la región de deslizamiento de z_0 mencionada. Ello exige elaborar demostraciones diseñadas para operar en otras regiones de deslizamiento de z_0 en el plano, y para valores de k particulares.

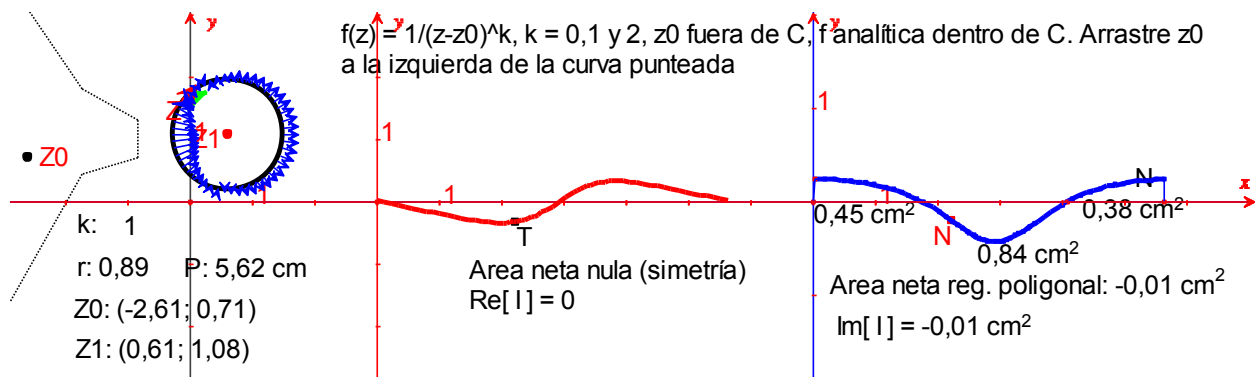


Figura 6. Visualización de $I = \oint_C dz/(z - z_0) = 0, \text{Re} I = 0, \text{Im} I \cong 0, f(z) = 1/(z - z_0)$ analítica dentro de C

La Figura 7, muestra una imagen de la demostración elaborada como complemento a las anteriores, para visualizar $\oint_C dz/(z - z_0) = \pi i$, cuando el punto singular z_0 está ubicado sobre la circunferencia. Deslizando z_0 sobre la circunferencia, deslizando el centro z_1 o variando el radio de la circunferencia, se visualiza que el valor de la integral se mantiene aproximadamente igual a πi . Con esta actividad se pueden promover discusiones sobre el valor principal de Cauchy.

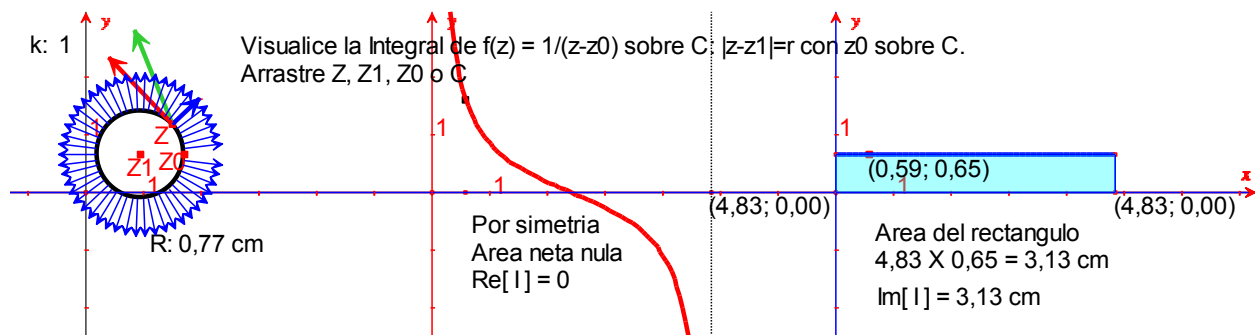


Figura 7. Visualización de $\int_C dz/(z - z_0) = \pi i$ cuando z_0 esta sobre C

Con la intención de proponer exploraciones sobre el teorema de deformación del contorno, se dispone de una demostración para visualizar las integrales $\int_C dz/z^k = 0, k = 0, -1, \pm 2, \pm \dots$, con C un rombo con centro en el origen. La Figura 8 presenta una imagen de esta demostración, para $k = 2$. Ubicando los puntos A, B, C o D a fin de que el contorno C forme un rombo, y variando $k = 0, -1, \pm 2, \pm \dots$ se visualiza que las curvas de flujo tangencial (en rojo) y normal (en azul) son simétricas con respecto al eje horizontal. Las áreas netas bajo dichas curvas son nulas, por lo que, tanto la parte real como imaginaria de la integral son cero.

Con $k = 1$ y aproximando el área neta bajo las curvas de flujo normal, se visualiza que el valor de integral es igual a πi .

Articulando apropiadamente las demostraciones de $\int_C dz/z^k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ con C circunferencias o rombos centrados en el origen, se puede visualizar el principio de deformación del contorno para estas integrales y contornos.

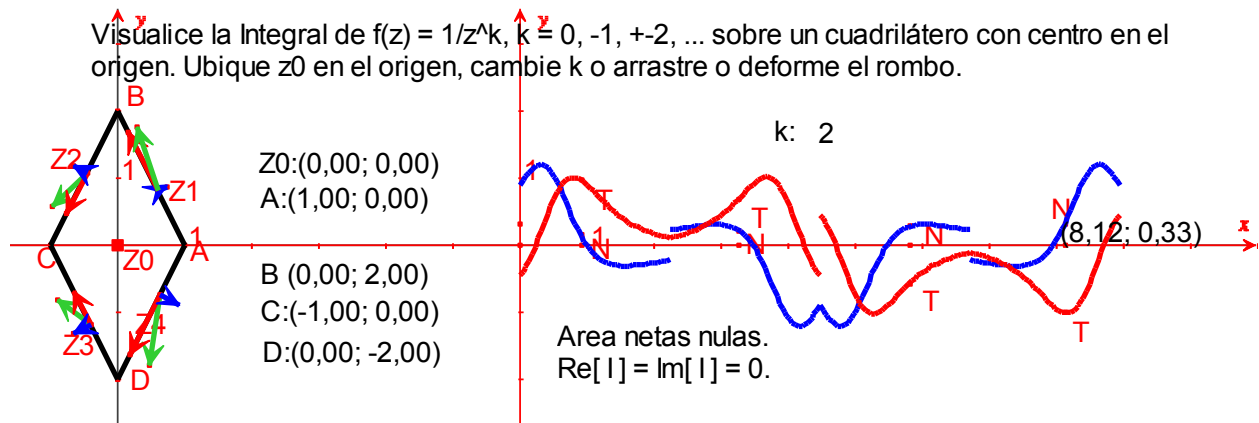


Figura 8. Visualización de $\int_C dz/z^2 = 0$ con C un rombo con centro en el origen

Esta demostración puede usarse para otras regiones de deslizamiento de z_0 o deformaciones del cuadrilátero, pero, de acuerdo a las curvas de flujo que genera, se deben construir regiones poligonales y aproximar las áreas netas bajo dichas curvas, situación que para ciertas regiones resulta complicada.

Finalmente, la Figura 9, muestra una imagen de una demostración para visualizar la fórmula $\int_C [\sin z / (z - z_0)] dz = 2\pi i \sin(z_0)$, con C la circunferencia $|z - z_1| = r$ para z_0 y z_1 reales, y z_0 dentro de C .

Deslizando z_0 sobre el eje real se visualiza, que el área neta bajo la curva (en rojo) de flujo tangencial es cero (por simetría), y el área de la región poligonal bajo la curva (en azul) de flujo normal es aproximadamente igual a $2\pi i \sin(z_0)$. Variando el radio de la circunferencia se visualizan curvas similares, y que el valor de integral no cambia. Para fines de comparación, para cada ubicación descrita del polo simple z_0 , la demostración exhibe los valores numéricos de $2\pi \sin z_0$ y del área neta bajo la curva de flujo normal. Con esta actividad se pueden explorar casos particulares la fórmula de la integral de Cauchy.

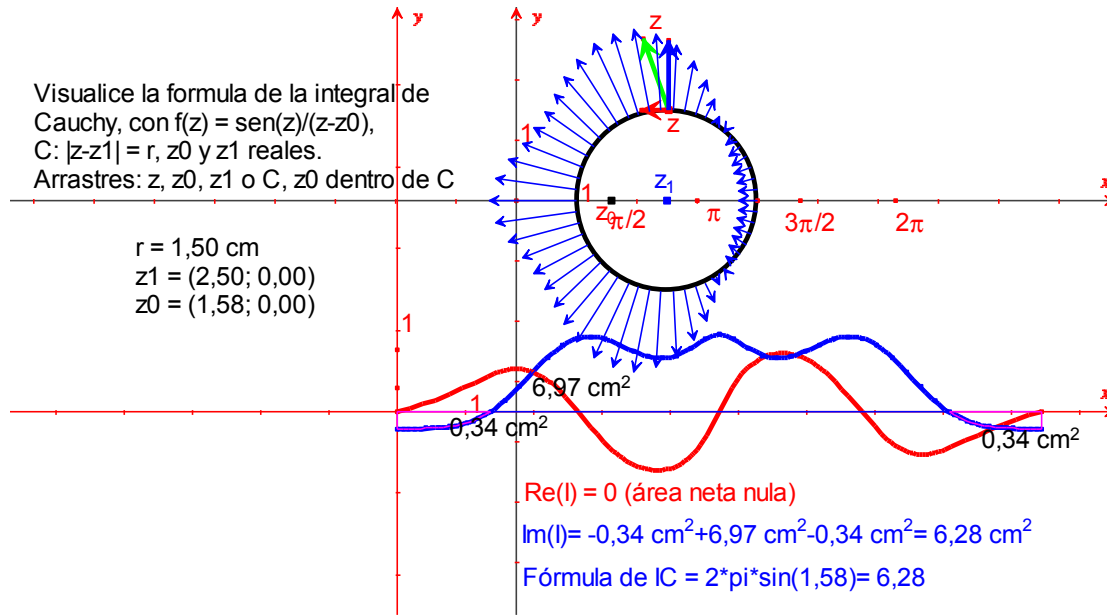


Figura 9. Visualización de $\int_C [\text{sen}z/(z - z_0)]dz = 2\pi i \text{sen}(z_0)$, con z_0 y z_1 reales, y $z_0 \cong \pi/2$ dentro de C . $ReI = 0$ e $ImI \cong 2\pi i \text{sen}(\pi/2)$.

Esta demostración puede usarse para otras regiones de deslizamiento con z_0 o z_1 complejos y el punto singular z_0 dentro del contorno, pero, de acuerdo a las curvas de flujo específicas que genera, se deben construir regiones poligonales para ellas, y aproximar áreas netas bajo dichas curvas.

Discusión y conclusiones

Como se describieron, las demostraciones propuestas, ofrecen varias posibilidades de uso, como herramienta didáctica apropiada para un fin específico; u organizarlas para proponer actividades de ilustración, exploración, verificación o aún más, de establecimiento de conjeturas, de algunos conceptos relevantes de integración compleja, en un ambiente de enseñanza, visual, interactivo y dinámico.

Con dichas demostraciones se espera proponer situaciones de enseñanza interactivas donde el estudiante pueda visualizar interpretaciones geométricas de algunas integrales complejas asociadas al campo de Polya. Pero también se espera adecuarlas u organizarlas para explorar o verificar relaciones particulares asociadas con, el teorema fundamental del cálculo en variable compleja, el teorema de Cauchy-Goursat, el valor principal de Cauchy, la fórmula de integral de Cauchy, el teorema del residuo, el principio de deformación del contorno. O también, para motivar el estudio de la expansión de Laurent.

Una ventaja adicional de la visualización de integrales en términos de campos de Polya es que permite relacionar esa interpretación con sus aplicaciones en el estudio de campo de velocidades de fluidos en carreras de ingeniería.

En cuanto a algunos aspectos problemáticos se pueden resaltar,

- Estudio adicional del campo de Polya. Su puesta en acción requiere su coordinación, dentro del contenido del curso, con el estudio adicional de campos de Polya e

interpretación analítica de la integral con este campo. La ausencia de esta interpretación en algunos textos de uso común representa una dificultad de coordinación apropiada de enseñanza, así como un contenido adicional a enseñar.

- Relativas al Cabri. Debido a aproximaciones decimales en los cálculos y a la calidad de información que ofrece la imagen que se visualiza; algunas demostraciones tienen regiones de operación restringidas en las que son confiables o aceptables; de hecho, bajo ciertas condiciones de operación pueden inducir conclusiones falsas, o bien donde de ella no se puede proponer ninguna conjetura.
- Relativas a la visualización. En ensayos de actividades de exploración visual de algunas áreas netas; se ha observado que algunos estudiantes usan percepciones o argumentos falsos, generan procesos que le conducen a conjeturas falsas, o bien no logran establecer ninguna conjetura.

En relación a su puesta a prueba inicial en cursos de variable compleja de ingeniería, solamente se dispone de observaciones cualitativas generales. Se han observado sentimientos de motivación, sorpresa, interés y convencimiento estudiantil, tanto durante actividades de demostración pasiva como en actividades de exploración activas. En cuanto a formación o evolución de conocimientos, se ha notado que algunos estudiantes, hacen observaciones o interpretaciones erróneas, presentan dificultades con relacionar correctamente información visual, y dificultades con el traslado correcto de información entre representaciones visual y analítica; obviamente para estos estudiantes, las demostraciones les genera confusión u obstáculos en su aprendizaje. Sin embargo, para otros estudiantes, el grado de interacción dinámica que ofrecen las demostraciones propuestas, constituyen apoyo adicional en la construcción significativa de algunos conceptos involucrados en la teoría de integración compleja.

En cuanto a consideraciones para su puesta en acción, principalmente se recomienda; explorarlas, determinar sus potencialidades, limitaciones o conflictos didácticos que puedan generar; informar al estudiante sobre la naturaleza aproximada de la información visual que ofrece el Cabri; aprovechar la generación de conjeturas para promover discusiones entre los estudiantes que conduzcan a la necesidad de formalizarlas, probarlas o refutarlas en ambiente simbólico; usarlas como apoyo o fortalecimiento de la comprensión del estudiante sobre conceptos y relaciones de integración compleja en su correspondiente discusión simbólico formal; y coordinar su presentación con demostraciones interactivas en las que se visualizan otras argumentaciones e interpretaciones; principalmente, con aquellas relacionadas con la definición de integral compleja.

En relación al uso del Cabri y su aplicación como herramienta para visualizar integrales complejas; aunque este software no ha está desarrollado específicamente para trabajar con cantidades complejas y elaborar visualizaciones de variable compleja, sus numerosas capacidades, diversas opciones y características de operación para generar visualizaciones de aspectos geométricos de conceptos matemáticos, pueden aprovecharse para construir secuencias didácticas interesantes intencionadas para visualizar interpretaciones geométricas de integrales complejas. Su potencial de interacción dinámica y manipulación directa de resultados en ambientes táctil y visual, y su poder de proporcionar visualizaciones generalizadas, hace de este una herramienta aprovechable y convincente en la enseñanza de variable compleja a nivel

introductorio en general (Jackiw, 2003), y en la enseñanza de aspectos geométricos de integrales complejas en particular.

Finalmente, es posible realizar mejoras en algunas demostraciones propuestas, rechazar las deficientes, o elaborar otras, a fin de crear en un conjunto efectivo, el cual pueda usarse como herramienta de ayuda exitosa en algunas secuencias didácticas. Aún confiando en lo que afirman Kawski (2004) y Tall (2008) en relación a sus aspectos beneficios del uso de demostraciones visuales en la enseñanza de la matemática en general, falta, realizar investigaciones específicas y detalladas sobre su influencia y efectividad en la construcción del conocimiento estudiantil sobre integración compleja a nivel introductorio.

Referencias

- Blinder, S. (sin fecha) Contour Integral around a Simple Pole. Recuperado el 16 de mayo de 2013, de <http://demonstrations.wolfram.com/ContourIntegralAroundASimplePole/>
- Burm, J. and Peterson, A. (1998) Interpretation of the complex contour integral. Resources for teaching complex analysis. Recuperado el 20 de abril de 2009, de <http://faculty.gvsu.edu/fishbacp/complex/polya2.PDF>
- Cabri II Plus 1.4, <http://www.cabri.com>. Visitado en mayo de 2013
- Custy, J. (sin fecha) The Geometry of Integrating a Power around the Origin. Recuperado el 16 mayo de 2013, de <http://demonstrations.wolfram.com/TheGeometryOfIntegratingAPowerAroundTheOrigin/>
- Jackiw, N. (2003) Visualizing complex Functions with the Geometers's Sketchpad. Triandafillidis, T. and Hatzikiriakou, K. Eds. *Proceedings of the 6th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. 291-299 (Volos, Greece: University of Thessaly.)
- Krug, D. & Wilkinson, S. (sin fecha) Pólya Vector Fields and Complex Integration along Closed Curves. Recuperado el 18 de mayo de 2013, de <http://demonstrations.wolfram.com/PolyaVectorFieldsAndComplexIntegrationAlongClosedCurves/>
- Mathematica. www.wolfram.com. Visitado en marzo de 2013
- Miki, S. (2004) Dynamic Visualization of Complex Integrals with Cabri II Plus. Recuperado el 10 de junio de 2011, de <http://epatcm.any2any.us/10thAnniversaryCD/EP/2004/2004C195/fullpaper.pdf>
- Saquimux, J. (2012) Integral de Contorno 1 y 2 con Cabri (Cadena de búsqueda. Estudiantes, Curso: Matemática Aplicada 5, Tipo de Archivo: Problemas Resueltos). Recuperado en mayo de 2012, de http://mate.ingenieria-usac.edu.gt/search_parameters.php
- Tall, D. Smith, D. & Piez, C. (2008, p. 5). Technology and Calculus. Recuperado el 04 de Mayo de 2013 de <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>