



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica

José Carlos Pinto **Leivas**

Centro Universitário Franciscano de Santa Maria

Brasil

leivasjc@unifra.br

Eirilúcia Souza da **Silva**

Secretaria Municipal de Educação de Manaus

Brasil

erilucia_souza@yahoo.com.br

Resumo

A comunicação tem por objetivo apresentar resultados de uma pesquisa com professores em ação continuada, a qual foi realizada com alunos participantes de um mestrado profissionalizante em ensino de Física e de Matemática no Brasil, em uma disciplina de Geometria. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada na aplicação de uma oficina envolvendo atividades topológicas voltadas ao ensino básico, na qual se buscou verificar como os indivíduos redescobrem propriedades importantes para a formação de pensamento geométrico. Os dados foram registrados em escritas dos participantes, em vídeo e áudio e nas observações do pesquisador. Os resultados da investigação comprovaram a pertinência de realização dessas atividades para a formação dos professores de Matemática, atuais e futuros, sendo recomendado que o tema seja abordado em reformulações curriculares.

Palavras chave: intuição, topologia, educação matemática, formação de professores, ensino de geometria.

Introdução

Para Dienes e Golding (1977) as primeiras noções geométricas não são euclidianas, já que não levam em conta as questões relativas a medidas. Por sua vez, Piaget e Inhelder (1993) afirmam que a geometria da criança não é a de Euclides, sua intuição geométrica é mais topológica do que euclidiana. A uma criança interessam primeiramente as relações de estar dentro ou estar fora, pertencer e não pertencer, estar perto ou estar longe, estar junto ou estar separado, por exemplo.

Essas relações elementares, nem sempre são tratadas na formação inicial, seja nos cursos de Pedagogia ou na Licenciatura em Matemática. Se por um lado os que cursam a primeira possuem limitada formação matemática, para os da segunda, o assunto geralmente não consta dos currículos. Quando aparece na grade curricular da formação inicial do professor de Matemática, o assunto Topologia, em geral, é feito de forma teórica, sem que haja conexão com a escola básica.

Entendemos ser necessário introduzir novos conhecimentos na formação do professor de Matemática bem como na formação do pedagogo pelas razões anteriores, o que é recomendado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura da seguinte forma:

[...] a formação do matemático demanda do aprofundamento da compreensão dos significados matemáticos, a fim de que ele possa contextualizá-los adequadamente. [...] É preciso que estes conhecimentos também sejam considerados ao longo de sua formação como professor. (Brasil, 1999, p. 4)

A partir dessas considerações preliminares, foi feita uma pesquisa realizada num mestrado profissionalizante brasileiro para desenvolver, por meio da intuição e utilizando recursos materiais de baixo custo, noções de topologia geométrica. Nesta comunicação apresentamos um recorte da pesquisa realizada.

A respeito de intuição, podemos verificar que ela está engendrada em uma das correntes filosóficas da Matemática no transcorrer dos séculos. Para Hersh (1997), a corrente intuicionista surgiu após a logicista, enquanto que Davis e Hersh (1995) apresentam algumas definições e usos para a palavra intuição, das quais destacamos as que se seguem.

Intuitivo significa visual. Assim, a topologia ou geometria intuitiva diferem da topologia ou geometria rigorosa em dois aspectos. Por um lado, a versão intuitiva tem uma referência no domínio das curvas e superfícies visualizadas, que é excluído da versão rigorosa (isto é, formal ou abstrata). Nesse aspecto, a intuitiva é superior; tem uma qualidade que falta à versão rigorosa. Por outro lado, a visualização pode conduzir-nos a considerarmos óbvias ou evidentes afirmações que são dúbias ou mesmo falsas. [...]

Intuitivo significa confiarmos num modelo físico, ou em alguns exemplos importantes. Nesse sentido é quase o mesmo que heurístico. (p. 361)

Por sua vez, Fischbein (1987) classifica, inicialmente, as seguintes intuições: intuições afirmativas são representações ou interpretações de fatos aceitos como certos, evidentes e consistentes, que podem se referir a determinado conceito ou relação; intuições conjecturais estão associadas a um sentimento de dúvida; intuições antecipatórias representam uma visão preliminar de uma determinada solução de um problema, uma hipótese formulada, a qual, desde o início, está intimamente ligada a um sentimento de certeza e de evidência; e intuições conclusivas, as que fornecem uma visão definitiva, conclusiva e global da solução do problema.

Posteriormente, Fischbein (1987) as classifica em primárias, que se desenvolvem nos indivíduos, independente de qualquer instrução sistemática como um efeito de sua experiência pessoal e, as secundárias, que são as que recebem influência de instruções novas e, a partir daí, novas crenças cognitivas podem ser criadas. Por sua vez, para Davis e Hersh (1995) intuição é a consequência na mente de certas experiências de atividade e manipulação de objetos concretos. Segundo os autores, temos intuição porque trazemos representações mentais de objetos matemáticos e, estas são adquiridas, não através da memorização de fórmulas verbais, mas por experiências repetidas, seja no nível elementar, com a manipulação de objetos físicos, seja no nível avançado, através de experiência de resolver problemas e descobrir coisas por nós mesmos.

A fim de compreender os efeitos da manipulação de objetos físicos, didáticos, manipuláveis, encontramos a indicação, feita por Nacarato (2005, p.1), da maneira descrita a seguir.

O uso de materiais manipuláveis no ensino foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações. No Brasil o discurso em defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920. (p. 1)

Entendemos que, aliar recursos materiais explorando intuição, pode ser um caminho para introduzir conceitos topológicos geométricos de forma agradável e acessível a diversos níveis de escolaridade o que pode ser feito por simples propriedades até noções mais avançadas, por exemplo, na construção da faixa de Möebius ou na Garrafa de Klein, objetos de descrição da presente comunicação. Essas duas superfícies têm propriedades relevantes, não triviais, e bem ilustram o ramos da Topologia Geométrica.

Segundo Courant e Robbins (2000), a Topologia estuda as propriedades das figuras geométricas que persistem mesmo quando as figuras são submetidas a deformações tão drásticas e todas as suas propriedades métricas e projetivas sejam perdidas. De fato, em uma transformação topológica, as propriedades métricas, como forma e tamanho, podem ser destruídas, mas propriedades como interior e exterior, ou vizinhança, não o são. Por isso, esta parte da Matemática também pode ser conhecida como “Geometria da Natureza”, “Geometria Elástica” ou “Geometria das Deformações”.

A comprovação da falta de conteúdos de Topologia na formação dos professores foi constatada em pesquisa realizada por Leivas (2009, p.46), junto a oito universidades gaúchas que oferecem curso de formação de professores de Matemática, comprovando o que segue.

[...]. Em apenas dois projetos aparecem itens que contemplam minimamente Geometrias Não Euclidianas. Dois programas tratam de Geometria Fractal e cinco fazem uso de recursos tecnológicos para o ensino, nem sempre explicitando que sejam para a Geometria. Três cursos trazem indicativos de abordagem de Topologia e Geometria Diferencial e quatro indicam tratamento de tendências atualizadas para o ensino.

A palavra Topologia originou-se do grego *topos*, lugar, e *logos*, estudo, e é considerada uma das geometrias que estuda as transformações contínuas. Entretanto ao falarmos em Topologia nos vêm à mente assuntos relacionados ao estudo da Matemática Pura, geralmente constante dos cursos de Análise, mais especificamente, a topologia da reta. Conforme Papas (1995), a Topologia surgiu, no século XVIII, a partir da solução do problema das pontes de Königsberg, resolvido por Euler (1707-1783), que usou a parte da Topologia conhecida hoje por

Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica

teoria dos grafos para solucionar o problema, a qual constou da pesquisa de mestrado mas não será abordado no presente trabalho.

Courant e Robbins (2000, pp. 292-293) apresentam a definição de um importante conceito para a o estudo de Topologia, como segue:

[...] uma transformação topológica de uma figura geométrica A em outra figura A' é dada por qualquer correspondência

$$p \rightarrow p'$$

entre os pontos p de A e os pontos p' de A', e que tem as duas propriedades seguintes:

1. A correspondência é bijetora. Isto significa que a cada ponto p de A corresponde apenas a um ponto p' de A', e vice-versa.
2. A correspondência é contínua em ambas as direções. Isto significa que se tomarmos dois pontos quaisquer p e q de A e deslocarmos p de modo que a distância entre ele e q se aproxime de zero, então a distância entre os pontos correspondentes p' e q' de A' também se aproximará de zero, a recíproca é verdadeira.

Podemos exemplificar uma transformação topológica usando um balão cheio de ar, se o achatarmos levemente sem furá-lo, a vizinhança dos pontos será preservada. Porém, se furarmos o balão, deixaremos de ter uma transformação topológica, já que as propriedades acima expostas não serão respeitadas. Outro exemplo de transformação topológica é apresentado na figura 1.

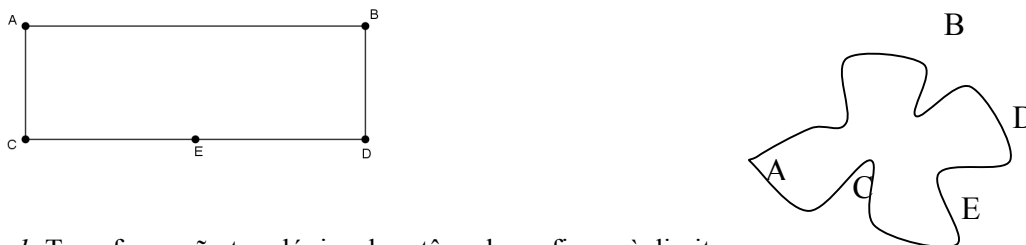


Figura 1. Transformação topológica do retângulo na figura à direita.

Observamos que, apesar de os lados e os ângulos do retângulo terem sofrido alterações, em ambas as figuras, os pontos C, E e D permanecem, respectivamente, entre os pontos A e E, C e D, E e B. Embora a distorção sofrida pela transformação, o ponto E, que se encontra entre os pontos C e D, permanece entre A e D, após a transformação, mostrando que “estar entre” é propriedade topológica, ou seja, o que é caracterizado como “relação de ordem”.

A Faixa de Möebius é uma superfície importante para a Topologia e foi descoberta pelo matemático alemão Augustus Möebius (1790-1868), daí a origem de seu nome. Segundo Courant e Robbins (2000), aos 68 anos de idade, Möebius realizou uma apresentação concisa à Academia de Paris sobre superfícies unilaterais, porém este trabalho foi abandonado por anos nos arquivos da Academia até ser tornado público pelo próprio autor.

A faixa é extraordinária por ser uma superfície que apresenta apenas uma face, construída em um tira retangular de papel com as pontas colocadas após uma torção de 180°, como ilustrada na figura 2. Para verificar sua unilateralidade basta percorrer toda ela com um lápis sem o levantar do papel e iremos ver que conseguimos realizar todo o percurso sem enfrentar nenhuma fronteira. Esse procedimento ilustra de forma intuitiva a relação topológica de continuidade. Para percorrer uma faixa comum, que apresenta duas faces, é necessário atravessar uma fronteira para percorrê-la.

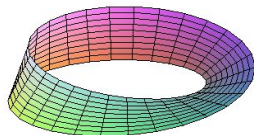


Figura 2. Faixa de Möebius.

A Faixa de Möebius, também é encontrada na literatura como Banda de Möebius e, de acordo com Pappas (1995, p. 45), “A banda de Möebius tem aplicações interessantes na indústria, tal como no caso das correias de ventoinha dos carros ou em correias de outros dispositivos mecânicos, visto que sofrem um desgaste mais uniforme do que as correias convencionais”.

A Garrafa de Klein (figura 3) é outra superfície topológica e foi inventada pelo matemático alemão Félix Klein (1849-1925). A garrafa tem a propriedade de não ter distinção entre o seu exterior e o seu interior, da mesma forma que a Faixa ou Banda de Möebius, e poderíamos verificar isso derramando água em um dos furos, que sairia pelo mesmo lugar por onde entrou.

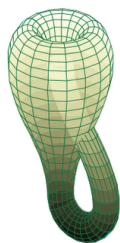


Figura 3. Garrafa de Klein.

Estas duas superfícies topológicas estão relacionadas, pois podemos formar uma Garrafa de Klein com duas Faixas de Möebius, ou dito de outra forma, a partir de uma Garrafa de Klein obter duas Faixas de Möebius. Para tal, basta cortar a garrafa ao meio no sentido longitudinal. O presente artigo aborda como essas duas superfícies foram construídas e exploradas suas propriedades junto ao grupo focado na pesquisa, o que será descrito no próximo item.

A pesquisa

A pesquisa realizada teve cunho qualitativo no sentido apontado por Alves-Mazzotti (1999), a partir da sua diversidade e flexibilidade, pois tais pesquisas “não admitem regras precisas, aplicáveis a uma ampla quantidade de casos. Além disso, as pesquisas qualitativas diferem bastante quanto ao grau de estruturação prévia, isto é, quanto aos aspectos que podem ser definidos já no projeto” (p. 147). Por sua vez, para Lüdke e André (1986, p.11), “a pesquisa qualitativa supõe contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra, através do trabalho intensivo de campo”.

Seguindo esses passos, a pertinência do tema e do levantamento bibliográfico realizado, elaboramos o seguinte problema de pesquisa: quais são as contribuições que noções de Topologia Geométrica, abordadas de forma intuitiva, podem trazer para o ensino de Geometria na formação de um grupo de mestrandos de Matemática do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática?

A fim de responder ao problema de pesquisa propusemos um questionário inicial, no qual buscamos informações a respeito do conhecimento dos indivíduos sobre o assunto; elaboramos uma oficina pedagógica utilizando recursos manipulativos construídos com material de baixo

Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica

custo pelos participantes; realizamos atividades exploratórias com base na intuição, buscando a descoberta de propriedades topológicas elementares tais como: vizinhança, separação, ordem, circunscrição ou envolvimento, continuidade, etc. Finalmente, realizamos a análise dos instrumentos coletados, por meio das respostas dos questionários, da análise de áudios e vídeos e da observação direta do pesquisador.

Além disso, em pesquisas qualitativas, a observação participante é a estratégia mais utilizada pelos pesquisadores, e extremamente valorizada, segundo Alves-Mazzotti (1999). Conforme esta autora, “Na observação participante, o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação” (p. 166). Dessa forma, a análise da realização das atividades tem como foco principal nossa interpretação dos fatos ocorridos durante o processo das oficinas.

Outro instrumento utilizado na pesquisa, importante para nossas conclusões, foi a análise de fichas entregues aos participantes da oficina para que formulassem hipóteses nas atividades propostas e realizadas. Segundo Alves-Mazzotti (1999), “considera-se como documento qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação.” (p.169).

Os participantes da pesquisa foram 12 alunos da turma de 2011 do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática de uma instituição particular do estado do Rio Grande do Sul, Brasil. Os participantes responderam a um questionário inicial e a outro final e participaram da oficina durante duas sessões de quatro horas realizadas em dias de aula da disciplina Fundamentos de Geometria do curso, ministrada pelo segundo autor, no ano de 2012. Dividimos a oficina em três módulos, dos quais os dois primeiros foram aplicados no primeiro encontro e o terceiro ficou para o segundo encontro.

Foi construída a Faixa de Möebius, sem lhe dar o nome, apenas a pesquisadora orientava sua construção, acompanhando o processo e fazendo registros. Alguns mestrandos apresentaram dificuldades em realizar a torção na tira retangular para sua posterior colagem. Pelos relatos orais durante a realização e pelos registros obtidos em vídeo, pudemos constatar problemas na construção em si. Utilizando marcas tracejadas em um dos lados, como na figura 4, chegamos à pretendida superfície.

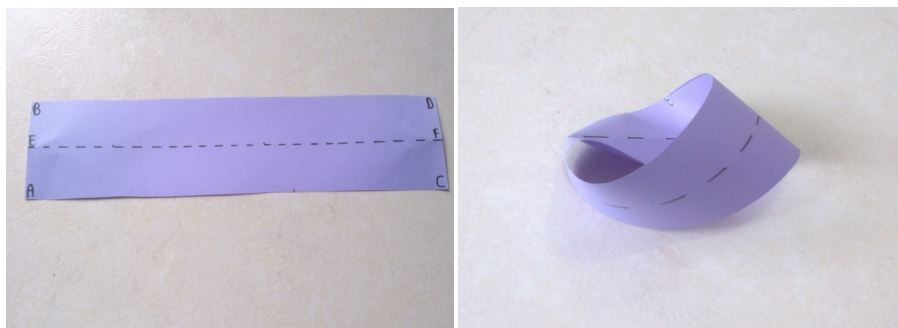


Figura 4. Faixa de Möebius construída pela pesquisadora.

A fim de não identificar os alunos investigados, os mesmos foram nomeados por $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}, M_{11}, M_{12}$.

Na sequência, lançamos a primeira questão: *escreva sua hipótese a respeito de quantos lados possui a nova superfície* e solicitamos fosse feito o registro na ficha. Emergiram quatro

categorias de respostas. Categoria de respostas com quatro lados: M_8 ; respostas com três lados: M_4 , M_{10} , M_{12} ; respostas com dois lados: M_1 , M_2 , M_3 , M_5 , M_7 , M_{11} e resposta com um lado: M_6 .

Dessa categorização e das justificativas, destacamos as seguintes:

M_{12} : “dois lados, um liso e outro com a linha desenhada”. Podemos perceber nessa resposta que M_{12} não tem uma intuição da alteração ou transformação da figura, mantendo-se presa aos dois lados da faixa plana em virtude de um conter a linha tracejada e o outro não.

M_6 respondeu que a superfície tinha infinitos lados e M_8 que tinha “4 lados”. Tais respostas comprovam o que afirmam Courant e Robbins (2000) “É raro alguém que não esteja familiarizado com a faixa de Möebius preveja este comportamento, tão contrário à intuição do que ‘deveria’ ocorrer” (p. 316).

A partir das hipóteses registradas pelos estudantes nas respectivas fichas, solicitamos que percorressem a faixa, com uma caneta pincel sem levantá-la do papel para que comprovassem ou não a hipótese feita. O registro em vídeo identificou a dúvida de M_3 quanto a percorrer os dois lados da faixa. Alguns apresentavam dificuldades em conservar o pincel na folha ao percorrê-la e/ou, percorriam até onde havia a colagem, paravam e perguntavam se deveriam seguir. Podemos perceber aqui, a intuição conjectural, uma das classes de intuição propostas por Fischbein (1987) e que se refere a intuições que estão associadas a um sentimento de dúvida, segundo o autor. Apesar da intuição inicial ser correta para muitos, ainda apresentaram certo conflito devido à colagem, ou seja, sua intuição está associada a um sentimento de dúvida, como coloca o autor.

A segunda questão investigada foi a seguinte: *compare com hipótese que você escreveu no item anterior. Ela se comprova ou não?*

M_1 , M_2 , M_3 , M_5 , M_7 e M_{11} registraram e comprovaram suas hipóteses, já que anteriormente haviam registrado que a figura construída possuía apenas um lado. Por sua vez, M_4 , M_9 , M_{10} e M_{12} não confirmaram suas hipóteses de que a figura possuía dois lados. Também, M_6 que havia anotado que a figura tinha infinitos lados e M_8 que a figura tinha quatro lados.

Podemos perceber aqui intuição antecipatória, outra das classes de intuição sugeridas por Fischbein (1987). A categoria na qual enquadrámos as respostas acima comprovou que suas hipóteses nesta atividade foram superiores, se comparadas às outras categorias, pois suas conjecturas apresentaram uma visão preliminar da solução do problema.

Apresentamos o nome da superfície construída: Faixa de Möebius e exploramos sua principal propriedade, a saber, a unilateralidade. Mostramos que uma superfície tridimensional com um único lado e sem fronteiras foi construída a partir de uma figura plana com dois lados ou faces, com fronteiras. Expusemos algumas aplicações e utilizações da faixa, como por exemplo, em correias de carros e na psicanálise.

A terceira atividade consistiu da seguinte proposta: *levante uma segunda hipótese – se a nova superfície, a Faixa de Möebius, for recortada no sentido longitudinal, que tipo de superfície se obtém? Ela é unilateral?*

Feitos os registros nas fichas, verificamos que M_1 , M_3 , M_8 , M_{10} , M_{11} , realizavam esse caminho de forma imaginária, usando sua intuição, para poder levantar suas hipóteses. Houve discussões entre os participantes a respeito da superfície que seria formada. Obtivemos as cinco seguintes categorias de respostas aos questionamentos:

1. uma superfície, mais alongada e estreita: M_1 , M_4 ;

Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica

2. uma superfície unilateral: M_5, M_{11}, M_{12} ;

3. duas superfícies: M_3, M_7, M_9, M_{10} ;

4. figura plana: M_6, M_8 ;

5. três superfícies semelhantes: M_2 .

M_{10} afirmou: “acho que ela se abre formando uma faixa como a inicial, e uma superfície com dois lados”. Notamos que apenas M_1 continuou apresentando uma intuição antecipatória, da mesma forma que apresentou nas atividades anteriores. A intuição antecipatória de M_2, M_3, M_5, M_7 e M_{11} não emergiu nesta questão.

Logo a seguir foi feito o recorte indicado, obtendo uma única superfície em forma de oito e bilateral, como era esperado. A superfície encontrada, com o recorte, não confirma a hipótese feita por M_3, M_7 e M_9 , pois registraram que encontrariam duas superfícies ou, por M_6, M_8 e M_{10} , que registraram que a superfície voltaria a ser plana ou, ainda, por M_2 que conjecturou que encontraria três superfícies. Entretanto, com esta atividade os participantes verificaram que, ao recortarem longitudinalmente a faixa obtiveram uma superfície bilateral, diferente da Faixa de Möebius que foi construída inicialmente.

M_1 fez o seguinte relato:

Nas questões 1 e 2, pude compreender intuitivamente, pois quando tinha 9 anos, um primo estava brincando de mágica, sem compreender o processo que envolvia nos recortes realizados falava: com esta argola, vou recortar e vejamos o que vamos obter. Eu achava que a argola se “desmancharia”, mas formava uma única argola, a seguir fez novamente outro recorte, e obtive duas argolar entrelaçadas. Fiquei intrigada até hoje com esta situação.

A intuição que esta participante apresenta está contida em duas das classes que Fischbein (1987) propôs, a das intuições antecipatórias, já citada anteriormente e, a das intuições conclusivas, uma vez que, na sua infância, já havia tido contato com a faixa. Porém, somente na oficina pode vislumbrar a solução definitiva do problema proposto por seu primo.

Após a realização de outras atividades exploratórias com a Faixa de Möebius, as quais não caberiam para nossos propósitos nesta comunicação, passamos a descrever a pesquisa realizada em sua segunda parte, a saber, com a construção e representação simétrica da Garrafa de Klein. Neste momento da pesquisa os participantes M_9 e M_{12} não estavam presentes.

Entregamos o material a ser utilizado para a construção e solicitamos que marcassem os vértices A, B, A' e B' na tira retangular e os pontos médios C e C' dos lados AB e $A'B'$, respectivamente, conforme a figura 5.



Figura 5. Tira retangular. Foto da pesquisadora.

Concluídas as marcações pedimos que dobrassem as tiras ao meio e colassem somente os pontos BC' , AC' , $B'C$ e $A'C$, conforme a figura 6. Notamos que, se fosse colada toda a extremidade e não somente os pontos indicados, a boca da garrafa não teria a entrada.



Figura 6. Garrafa de Klein. Foto da pesquisadora.

Nesta segunda parte da construção da Garrafa de Klein alguns participantes tiveram dificuldades em alinhar e colar os pontos indicados pela investigadora. Após todos concluírem a construção de suas garrafas, apresentamos seu nome e passamos à seguinte questão investigativa: *O que acontece se cortarmos a Garrafa de Klein longitudinalmente ao meio? Formule suas hipóteses nas fichas.*

Notamos que os participantes idealizavam o que aconteceria com o corte. Transcrevemos as hipóteses dos sujeitos presentes na realização dessa atividade, uma vez que, sendo uma pergunta de resposta livre, cada um apresentou sua forma específica de resposta, dificultando uma categorização das mesmas.

M_1 : o líquido da garrafa escapará.

M_2 : se cortar na linha pontilhada acredito que a garrafa se abrirá.

M_3 : se cortar na linha pontilhada vai formar duas Faixas de Möebius.

M_4 : acredito que a garrafa irá se abrir.

M_5 : longitudinalmente ficará uma superfície unilateral.

M_6 : transformasse em duas linhas de Möebius.

M_7 : poderá originar uma superfície bilateral.

M_8 : se cortarmos longitudinalmente a figura se desmancha.

M_{10} : cortando na linha pontilhada a garrafa vai ficar aberta.

M_{11} : se cortarmos a garrafa na linha pontilhada a figura se dividirá em duas faixas de Möebius.

Registradas as hipóteses, solicitamos que os participantes realizassem o corte e comprovassem, ou não, as mesmas. Apenas M_3 , M_6 e M_{11} intuiram que seriam obtidas duas novas superfícies ao cortarmos a Garrafa de Klein longitudinalmente ao meio, como as da figura 7. Esperávamos com esta questão que os participantes conjecturassem que conseguiriam duas novas superfícies distintas com o recorte. Notamos que apenas M_3 , M_6 e M_{11} intuiram que seriam obtidas duas peças e, ainda, que fossem Faixas de Möebius.

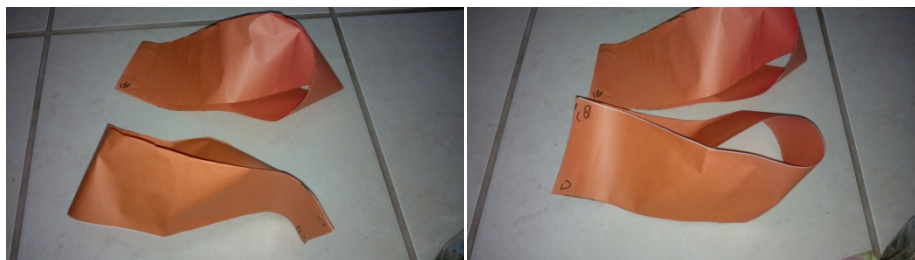


Figura 7: Faixas de Möebius obtidas a partir do corte da Garrafa de Klein. Foto da pesquisadora.

A intuição percebida pela pesquisadora nas construções de M_3 , M_6 e M_{11} , confirma o que afirmam Davis e Hersh (1995). Para esses autores a intuição é consequência na mente de certas experiências de atividade e manipulação de objetos concretos.

Podemos perceber aqui que os estudantes têm em mente certa ideia global oriunda do material que os levou à solução do problema objeto da investigação. A esta forma de intuição Fischbein (1999) denomina intuição antecipatória, algumas vezes denominada ‘iluminação’, pois o que a caracteriza é o esforço que o indivíduo produz para a resolução bem como um sentimento de convicção, de certeza, mesmo sem uma demonstração formal.

Ao finalizarmos esta etapa da pesquisa e que nos propusemos apresentar no artigo, enunciamos a seguinte questão: *as duas peças obtidas na atividade anterior são Faixas de Möebius? Formule suas hipóteses na ficha.*

Nesta atividade, com exceção do participante M_2 , todos os outros concluíram que as superfícies obtidas eram faixas de Möebius. A participante M_{11} afirmou “as duas são faixas de Möebius porque imaginei fazendo o trajeto com uma caneta e consigo fazer sem tirar a caneta do papel”. Assim, podemos comprovar o que afirmou Leivas (2009), quando o pesquisador afirma que a imaginação, aliada à intuição e à visualização, complementa a tríade fundamental do pensamento geométrico.

Deste modo, atingimos o propósito da atividade, na qual os participantes da oficina deveriam verificar, por meio do recorte, que as duas peças obtidas eram Faixas de Möebius. Ao responder a esta questão exploramos a relação da Garrafa de Klein com a Faixa de Möebius, ou seja, com uma garrafa podemos obter duas faixas.

Resultados e conclusões

Apresentamos neste artigo um recorte de uma pesquisa na qual investigamos sobre intuição envolvendo atividades de Topologia Geométrica, realizadas com alunos de pós-graduação numa instituição brasileira. Particularizamos para analisar as atividades da pesquisa que envolveram Faixa de Möebius e Garrafa de Klein.

Por meio de um questionário final foi possível analisar a validade da pesquisa realizada em função de que no questionário inicial foi comprovada a ausência quase que total de conhecimentos sobre a área de Topologia, oriunda da formação inicial dos investigados. Os que apontaram já terem estudado alguns aspectos relacionados à Topologia da reta real, entretanto, afirmaram não se lembrarem e, ao final, indicaram não terem ideia de possibilidades de conexão de um conteúdo, tido como de Matemática de nível avançado, estar diretamente ligado à formação inicial de um pensamento geométrico desde a infância.

Ao serem questionados: *você acredita que as atividades de Topologia Geométrica realizadas na oficina contribuirão para sua vida profissional? Por quê?*, os dados comprovaram que a maioria dos participantes acredita que sim, que as atividades desenvolvidas na oficina contribuirão para a sua atividade profissional e nenhum dos participantes assinalou a alternativa não. Expomos algumas justificativas dos participantes.

M_1 : porque as atividades instigam o professor a buscar atividades diferenciadas das comumente apresentadas em sala de aula.

M_3 : me deu uma visão mais ampla sobre a geometria. Novos conceitos foram adquiridos e posso levar esses conceitos até os alunos.

M₅: pois foram trabalhados nas atividades conceitos como unilateral, etc. de uma forma prática, onde pode ser trabalho com qualquer aluno.

M₈: acredito que como professores da educação básica devemos mostrar aos nossos alunos esta geometria não euclidiana

M₁₁: Contribuíram muito, acredito que as atividades geraram um novo olhar sobre a geometria.

No olhar e na fala desses participantes podemos notar a importância atribuída às atividades de Topologia Geométrica na sua formação e que foram exploradas durante a oficina. Podemos, também, concluir que a oficina contribuiu para o surgimento de uma nova que visão no ensino da geometria nestes participantes. De acordo com Costa (2005) as novas percepções de formação dos professores, sejam elas inicial ou continuada, não podem mais tratar teoria e prática separadamente como partes estanques do processo de formação e, neste sentido, a oficina vem contribuir na formação dos mestrandos/professores participantes da pesquisa.

Ao serem perguntados: *você pretende partilhar as experiências que teve ao participar da oficina com seus colegas de profissão? Por quê?*, todos os participantes responderam que pretendem partilhar as experiências obtidas com as oficinas, porém com algumas ressalvas daqueles que assinalaram ‘em parte’, cujos argumentos prendem-se à necessidade de aprofundar o assunto, emprego de tempo maior do que para realizar atividades rotineiras e convencionais, insegurança em partilhar novas experiências. Quanto aos participantes que responderam sim, destacamos a justificativa de M₄: ‘É muito importante compartilhar os conhecimentos, apesar de algumas pessoas serem resistentes é muito bom, pois algum dia será aproveitado de alguma forma as experiências’.

Como todos os participantes são professores da escola básica perguntamos: *você acredita que haveria melhoria na aprendizagem em Geometria se os conteúdos de Topologia Geométrica fossem inseridos nas grades dos cursos de mestrado e/ou licenciatura?*

A maioria respondeu que sim, apenas M₁₁ respondeu ‘em parte’ e registrou a seguinte justificativa: ‘Acredito que são importantes e fazem parte da Geometria. Porém causam algumas dúvidas, e isso compromete a aprendizagem caso não haja um bom embasamento teórico e metodológico’. Dentre os que responderam que sim, exibimos a seguir algumas justificativas:

M₃: certamente haverá melhoria, mas acredito que a própria geometria euclidiana deveria ser trabalhada com mais detalhes nesses cursos, o aluno sai sem preparo das universidades.

M₄: os conteúdos só são vistos de forma estática e através da arte de decorar, com a topologia isto mudaria sim.

M₅: claro, pois a nossa graduação tem muitas lacunas, os conteúdos (a maioria) não tem uma parte prática e uma ligação de uma disciplina com a outra.

M₈: não se admite continuarmos estudando apenas a geometria de Euclides, precisamos conhecer novos conceitos.

M₉: trazendo conteúdos de Topologia Geométrica estaríamos fornecendo um novo olhar a um conteúdo por vezes tido como complicado, ou uma nova forma de ver a própria Geometria.

Ao analisar estas justificativas notamos a importância da inserção de conteúdos de Topologia Geométrica nas grades de cursos de licenciatura e/ou mestrado, na opinião destes participantes.

Concluirmos indicando que as atividades realizaram proporcionaram verificar que a maioria dos investigados apresentou intuição antecipatória, uma das classes de intuição proposta

Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica

por Fischbein (1987). Isso vem corroborar o que Davis e Hersh (1995) afirmam de que temos intuição não por memorização de fórmulas verbais, mas por experiências repetidas, com a manipulação de objetos físicos e por meio da resolução de problemas. Comprovamos também que uma das principais contribuições da oficina foi o novo olhar sob a forma de ensinar a Geometria e um novo conhecimento além da Geometria Euclidiana.

Referências e bibliografia

- Adair Mendes Nacarato. (2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*. v. 9, n. 9-10, p. 1-6.
- Alda Judith Alves-Mazzoti. (1999). O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira.
- Brasil, Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. (1999). *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>>. Acesso em: 28 mai. 2011.
- Efrain Fischbein. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.
- Efrain Fischbein. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38: 11-50.
- Jean Piaget; Bärbel Inhelder. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- José Carlos P. Leivas (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. (Tese de Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 294 p.
- Menga Lüdke; Marli André. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Philip J. Davis; Reuben Hersh. (1985). *A experiência matemática*. tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves.
- Reginaldo R. da Costa. (2005). *A formação continuada do professor de matemática a partir da sua prática pedagógica*. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.
- Reuben Hersh. (1997). *What is Mathematics, really?* New York: Oxford University Press.
- Richard Courant; Herbert Robbins. (2000). *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda.
- Theoni Pappas. (1995). *Fascínios da Matemática: a descoberta da matemática que nos rodeia*. Lisboa: Editora Replificação.
- Zoltan P. Dienes; Edward W, Golding. (1977). *Exploração do espaço e prática da medição*. São Paulo: E.P.U.