I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Visualizando conjuntos en la recta real y el plano

Mónica del Rocío **Torres** Ibarra
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
mtorres@matematicas.reduaz.mx
Elvira **Borjón** Robles
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
eborjon@matematicas.reduaz.mx
Leticia **Sosa** Guerrero
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
lsosa@matematicas.reduaz.mx
José Iván **López** Flores
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
jilopez@matematicas.reduaz.mx

Resumen

En esta investigación se reportan resultados relacionados con los errores comunes respecto al tema de conjuntos en la recta real y en el plano que presentan los alumnos que han concluido el bachillerato y que iniciaron una carrera de licenciatura en matemáticas, así como aquellos que han cursado el primer semestre de la misma carrera.

Se realizan sesiones de trabajo de dos tipos: Unas en un ambiente tradicional y otras en un ambiente mediado con las herramientas que proporciona la tecnología TI-NSpire. Con la intención de que los alumnos visualicen (Zimmermann y Cunningham, 1991) distintos tipos de conjuntos (intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos, desigualdades con valor absoluto y conjuntos finitos y discretos) en la recta real y en el plano, así mismo, trabajamos las diferentes representaciones semióticas (Duval, 1998) de estos conjuntos.

Finalmente, se realizó una comparación entre ambos grupos de alumnos, obteniendo los resultados que aquí se exponen.

Palabras clave: Representaciones semióticas, conjuntos, recta real, plano, visualización matemática

Introducción

Dada la importancia que tienen los diferentes subconjuntos de la recta real y del plano cartesiano en diferentes materias (cálculo de una y varias variables, variable compleja, análisis real, estadística, etc.) de la formación de un licenciado en matemáticas, en particular cuando se calculan límites de funciones de una y varias variables por definición, se requiere que los estudiantes tengan la habilidad de utilizar este tipo de conjuntos. Se diseñó, aplicó y analizó un instrumento que permitió poner en juego tres diferentes representaciones semióticas de los subconjuntos, a saber: la analítica, la sintética y la gráfica. Así mismo, en el mismo instrumento se consideraron las características de los conjuntos en cuanto a que si eran finitos, infinitos, discretos o continuos, abiertos o cerrados o ninguna, con la finalidad de detectar si a partir de la visualización de los conjuntos en sus diferentes representaciones, los errores más comunes que los alumnos comenten al realizar la identificación de éstos.

Marco Teórico

Teniendo en cuenta las afirmaciones:

Semiosis: Es la aprehensión o la reproducción de una representación semiótica, a través de promover la coordinación de varios registros de representación semiótica que puede manifestarse más simple en ciertos registros que en otros. Pero ésta es compleja por la diversidad de registros que puede movilizar. Es decir, semiosis, es la aprehensión o la reproducción de una representación semiótica. y

Noesis: es la aprehensión conceptual de un objeto, por lo que no hay noesis sin semiosis.

Duval (1998, pp 174 y 186)

Y a la luz de que no es suficiente observar la representación geométrica para aprender un conjunto, se hace necesario transitar entre varias representaciones como lo afirma Duval (1993), "no puede haber aprendizaje verdadero en tanto las situaciones y las tareas propuestas no tomen en cuenta la necesidad de varios registros de representación para el funcionamiento cognitivo del pensamiento" (p. 199).

En el marco de estas afirmaciones lo que se investiga en este trabajo es si los alumnos son capaces de transitar entre varias representaciones semióticas (si realizan o no la semiosis) para luego analizar si tuvieron o no la noesis es decir si aprendieron o no el concepto, que para nuestro caso será la aprehensión de los objetos matemáticos subconjuntos de la recta real y del plano, se abordan conjuntos tradicionales tales como intervalos abiertos, cerrados, conjuntos de puntos discretos finitos e infinitos, los subconjuntos del plano que se abarcan son abiertos, cerrados, discretos

Luego de que los alumnos relacionaron las distintas representaciones de un mismo conjunto, se solicita que visualicen estas, para que concluya las características específicas de cada conjunto que aparece en el instrumento diseñado ad hoc. Promoviendo con esto la visualización matemática, que según Zimmermann y Cunningham (1991) "*visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del diagrama, pero visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología) y usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática*".

Metodología

Se seleccionaron tres grupos alumnos, denominados A, B y U, respectivamente. Los dos primeros están formados por alumnos recién inscritos al primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas y que provienen de diversos bachilleratos, y el último, conformado por alumnos inscritos al segundo semestre y que ya cursaron las materias de Cálculo Diferencial, Geometría Analítica y Álgebra Superior. El grupo A y U trabajaron los ejercicios bajo el esquema de una clase tradicional y el grupo B trabajó con el uso de tecnologías.
La secuencia se estructuró de la siguiente manera: Se presentaron subconjuntos de los números reales y del plano cartesiano, con diversas características: conjuntos finitos, abiertos, cerrados, infinitos y discretos, así mismo se involucraron valores, racionales e irracionales, desigualdades con valores absolutos con la finalidad de analizar los procesos de aprendizaje de los alumnos con problemas de las características mencionadas. Se anexa para cada una de ellas una lista de posibles representaciones analíticas del conjunto para que ellos eligieran la que se asocia a la representación geométrica. Posteriormente se presenta una lista de posibles representaciones sintéticas para que elijan la que corresponda a la representación analítica y finalmente se pide que elijan entre una lista de características del conjunto para su respectiva asociación.
Los alumnos trabajaron realizando transiciones entre las diferentes representaciones, plasmando sus resultados en un instrumento diseñado exprofeso o bien realizando las actividades que la calculadora les iba guiando dentro del programa diseñado para tal fin, para posteriormente contestar por escrito preguntas que nos permitieron hacer conclusiones sobre el grado de comprensión que ellos lograron después de haber contestado el instrumento.
En el instrumento se incluyeron dos ejercicios, uno denominado el cuádruple juego de los subconjuntos de la recta real ($\mathbb{R}$), conformado por ocho planteamientos que permitieron analizar el tránsito entre las representaciones sintética, geométrica y analítica así como apoyándose de la visualización de las diferentes representaciones para asociar las características de los conjuntos, cabe destacar, que dentro de la representación sintética, se incluyó intencionalmente una propuesta que contenía un error en su formulación, con la intención de que éste fuera detectado por los propios alumnos; el segundo ejercicio se denominó el triple juego con subconjuntos de números del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$) en este se consideraron también ocho planteamientos, en este ejercicio se contemplaron solo las representaciones geométrica y analítica así como la asociación con las características de cada conjunto.

Puesta en Escena

El grupo U, conformado por un total de 9 alumnos (4 hombres y 5 mujeres) pertenecientes al segundo semestre, trabajó mediante el esquema de una clase tradicional, contestando el instrumento en un tiempo record, ya que no se llevaron más de treinta minutos en contestarlo, sin embargo con algunas limitaciones en los subconjuntos del plano cartesiano.
El grupo B, conformado por un total de 22 alumnos (12 mujeres y 10 hombres) pertenecientes al primer semestre, trabajó mediante el esquema de una clase tradicional, contestando el instrumento alrededor de una hora. Resalta la dificultad de este grupo con respecto a las características de los conjuntos, es decir no fueros capaces de determinar si eran abiertos, cerrados, finitos, infinitos o discretos, observar el anexo uno.
El grupo A, conformado por un total de 21 alumnos (mujeres y hombres) pertenecientes al primer semestre, trabajó mediante el esquema de un ambiente controlado por la tecnología TI-Nspire, contando cada uno de ellos con una calculadora para responder el instrumento. El tiempo que se llevaron en contestar el instrumento fue de alrededor de 45 minutos. Resalta la dificultad de este grupo con respecto a las características de los conjuntos, es decir no fueros capaces de determinar si eran abiertos, cerrados, finitos, infinitos o discretos, observar el anexo uno. La gran mayoría no pudo responder las propuesta que contemplaba los subconjuntos del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$).

Resultados

Los errores comunes que se presentaron cuando los alumnos de primer semestre contestaron el cuádruple juego de los subconjuntos fueron: Que asociaron incorrectamente las desigualdades con valor absoluto con intervalo semiabierto, por lo tanto, sequió el error cuando intentaron asociar con la representación analítica. En general, los alumnos no fueron capaces de describir las características del conjunto en juego, por ejemplo, se presentaron casos de conjuntos que eran infinitos y ellos contestaban que eran finitos o viceversa, más aún, para el caso de los conjuntos discretos, confundieron con conjuntos infinitos.

Por otro lado, respecto al triple juego, los errores comunes presentados fueron cuando los alumnos de primer semestre sin uso de tecnología, intentaron asociar subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que eran del tipo franjas infinitas o conjuntos que los acotan rectas que no se incluían, es decir, en su representación geométrica no fueron capaces de asociarlos con las otras dos representaciones. Así mismo, aunque visualizaban las representaciones geométrica y analítica, en su mayoría no dieron las descripciones correctas de los conjuntos, por ejemplo, había conjuntos que eran discretos y finitos y ellos afirmaban que eran infinitos.

Errores similares se presentaron en el grupo que trabajó con tecnología, con la diferencia de que el uso de ésta última permitió realizar una retroalimentación y discusión de cada una de las respuestas, ya que la dinámica de trabajo, aunque con las mismas propuestas, fue diferente, pues se trabajó simultáneamente, presentando a la vez una proyección de cada una de las representaciones geométricas, pidiendo después a ellos que en la calculadora seleccionara la representación que le correspondía y mostrando la cantidad de respuestas elegidas, propiciando con ellos que los propios alumnos argumentaran sus respuestas, aunque esto propició que el tiempo no fuera suficiente para completar el instrumento completo.

El trabajo realizado por los alumnos de segundo semestre nos permite ver que en su totalidad fueron capaces de transitar entre las diferentes representaciones, incluso en este grupo se detectó el error puesto intencionalmente en la propuesta, sin embargo, en su mayoría no fueron capaces de determinar los conjuntos finitos y cometieron numerosos errores en la asociación de las características de cada uno de ellos.

Conclusiones

El tema que se eligió tiene grandes repercusiones en temas posteriores, se cometen algunos errores por parte de los alumnos en cuanto al manejo de las diferentes representaciones de los conjuntos.

En este trabajo, se puso de manifiesto que el uso de la tecnología es un fuerte aliado del profesor de matemáticas, ya que por medio de ella es posible acercar el conocimiento a los estudiantes, de forma que ellos logren visualizar el concepto en cuestión por medio de las diferentes representaciones del objeto ya demás la tecnología utilizada permite la retroalimentación en el mismo momento que se cometen los errores a través del uso del navigator.

Coincidimos con Duval (1999) cuando distingue la visualización de la visión. Para él la visión aporta un acceso directo al objeto, pero no proporciona una aprehensión global del concepto. De hecho afirma que "la visualización hace visible todo lo que no es accesible a la visión", en este sentido, la tecnología es un gran aliado para que el proceso de visualización sea exitoso.

Así mismo, desde el punto de vista didáctico, Duval (1999) señala que la visualización requiere un "entrenamiento especial", específico para cada registro y que no puede limitarse a la construcción de imágenes visuales. Explica que la construcción pone atención en enfocar sucesivamente en algunas unidades y propiedades, mientras que la visualización consiste en comprender directamente el conjunto de la configuración de las relaciones y en determinar qué es relevante en ella. Y apunta que lo más frecuente es encontrar estudiantes que únicamente logran una aprehensión local de las imágenes, sin ser capaces de "ver" la organización global relevante.

Teniendo en cuenta todo lo anterior nos proponemos realizar una segunda investigación a mas tardar a principios del 2014 que permita analizar la evolución de lo aprendido en sus clases de cálculo diferencial y cálculo de varias variables, con la finalidad de identificar si los errores comunes se superaron o no.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1, 3-26.

Duval R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Educación Matemática II. (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, Págs. 173-201). México.

Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático, Ediciones Pirámide, S. A.

Zimmermann, W. and Cunningham, S. (1991), Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washing: Mathematical Association of America.

Anexo 1

Instrumento Utilizado

Universidad Autónoma de Zacatecas
Francisco García Salinas
Unidad Académica de Matemáticas

Nombre del alumno____ Género (F o M) ______

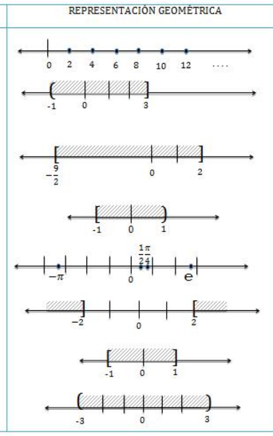
Fecha________________________ Semestre que cursas de la Licenciatura en Matemáticas ________

El presente instrumento está conformado por dos ejercicios. En el primero trabajaremos con números reales en $\mathbb{R}$ (recta real) y en el segundo con subconjuntos en $\mathbb{R}^2$ (el plano).

Ejercicio 1. **El cuádruple juego con los subconjuntos de los números reales $\mathbb{R}$ (recta real)**
Indicaciones. En este juego se ofrecen cuatro columnas que contienen subconjuntos de números reales. La solicitud para ti es que las relaciones entre sí, según correspondan las diferentes representaciones de cada una de ellas (la última columna puede corresponder a más de un conjunto).

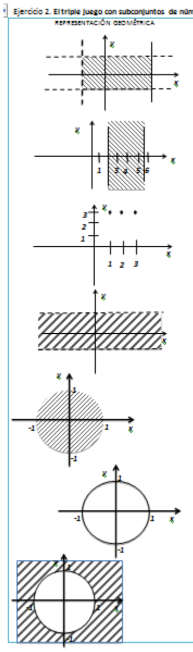
Ejercicio 2. **El triple juego con los subconjuntos de los números reales en $\mathbb{R}^2$ (plano)**
Indicaciones. El juego es similar, tendrás que relacionar las columnas que se presentan (la última columna puede corresponder a más de un conjunto).

Ejercicio 1. **El cuádruple juego con los subconjuntos de los números reales $\mathbb{R}$ (recta real)**



REPRESENTACIÓN SINTÉTICA	REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	REPRESENTACIÓN ANALÍTICA	CARACTERÍSTICAS DEL CONJUNTO
$A = (-1, 3]$		$\{x \in \mathbb{R}: -1 \le x \le 1\}$	Abierto
$B = [-1, 1)$		$\{x \in \mathbb{R}: x \ge 2 \text{ ó } x \le -2\}$	Cerrado
$C = \left\{-\pi, \frac{1}{2}, \mathrm{e}, \frac{\pi}{4}\right\}$		$\{x \in \mathbb{R}: -1 \le x < 1\}$	Infinito
$D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$		$\{x \in \mathbb{R}: -3 < x < 3\}$	Finito
$E = \left[-\frac{9}{2}, 2\right]$		$\{x \in \mathbb{R}: 2n, n \in \mathbb{N}\}$	Discreto
$F = \lvert x\rvert < 3$		$\left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{9}{2} \le x \le 2\right\}$	Ninguno
$G = \lvert x\rvert \ge 2$		$\left\{x \in \mathbb{R}: x = -\pi, \frac{1}{2}, \mathrm{e}, \frac{\pi}{4}\right\}$	
$H = \lvert x\rvert \le -1$		$\{x \in \mathbb{R}: -1 < x \le 3\}$	

Ejercicio 2. **El triple juego con subconjuntos de números reales en $\mathbb{R}^2$ (plano)**



REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	REPRESENTACIÓN ANALÍTICA	CARACTERÍSTICAS
	$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \ge 1\}$	Abierto
	$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x = -1, -2, -3\}$	Cerrado
	$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$	Infinito
	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x = 1, 2 \text{ ó } 3, y = 3\}$	Ninguno
	$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$ $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x \le 3 \;\; y - 1 < y < 1\}$	Finito
	$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -\infty < x < +\infty, -3 < y < 2\}$	Discreto
	$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 2 \le x \le \frac{16}{3} \;\; y - \infty < y < +\infty\right\}$	Continuo