



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



Uso de tecnología digital en la comprensión de parámetros en funciones polinomiales

Eduardo Basurto Hidalgo
Benemérita Escuela Nacional de Maestros
México
basurto.e@gmail.com

Resumen

Los estudiantes de enseñanza media se enfrentan al uso e interpretación de los parámetros en funciones polinomiales, lugares geométricos y expresiones algebraicas en general. Este hecho conduce a la necesidad no sólo de diferenciar los parámetros de otro tipo de literales como variables o incógnitas, sino también dar un sentido de uso a los mismos con la finalidad de agrupar los objetos matemáticos en entidades más generales como son las familias de funciones. El presente taller tiene como objetivo mostrar la influencia que puede tener el uso de un recurso tecnológico dinámico en la comprensión de esta polisemia de las literales, así como en la optimización de la ideas como puede ser la generalización.

Palabras clave: entornos tecnológicos, funciones polinómicas, polisemia de las literales, parámetros y familias de funciones.

Introducción

Desde la década de los años ochenta, la literatura de investigación sobre el tema, advierte que los estudiantes son enfrentados a una *polisemia* de las literales, es decir, a diferentes significados atribuidos a una misma literal, involucrada en los procesos de enseñanza - aprendizaje de la matemática escolar. De los primeros autores en señalar este fenómeno, se encuentran Usiskin (1988) y Küchemann (1981) que de manera general identifican tres usos de las literales (ver Tabla 1).

Tabla 1. Uso de las literales

<i>Incógnitas específicas</i>	Donde la literal tiene un valor desconocido como en las ecuaciones
<i>Números generalizados</i>	Donde la letra puede tomar más de un valor, como en el caso de patrones en sucesiones numéricas o figurativas
<i>VARIABLES en relación funcional</i>	Donde las literales representan un rango específico de valores y existe una relación entre dos conjuntos numéricos.

A la polisemia anterior se unen otro tipo de literales llamados *Parámetros*, surgidos en la exploración de entidades aún más generales, que poseen significados propios capaces de agrupar en familias, expresiones algebraicas en un nivel aún más abstracto. Por ejemplo, $y = ax$ significa “y es una función lineal de x, donde a es un parámetro, pero puede leerse también como el lugar geométrico de una recta que pasa por el origen con pendiente a. En cursos de Pre-Cálculo existe una presencia abundante de *Parámetros*, en objetos tales como familias de funciones, lugares geométricos e incluso en expresiones algebraicas que modelan diversos fenómenos.

Antecedentes

El hombre ha extendido sus capacidades cognitivas vía la interacción con herramientas materiales y simbólicas. El desarrollo del conocimiento ha estado acompañado de las tecnologías cognitivas. Investigaciones como las de Duval (1998), D’Amore (2001), han afirmado que la actividad matemática, es esencialmente simbólica. Por otra parte, ha surgido una creciente utilización de la tecnología digital en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas como lo muestran Arzarello (2004), Borba y Villareal (2006), Artigue (2002), Verillon y Rabardel (1995), Guin y Trouche (1999), etc.

El presente taller toma como punto de partida una investigación realizada sobre la conceptualización de parámetros a través de entornos tecnológicos dinámicos. En nuestro estudio analizamos la evolución cognitiva de los sujetos desde el enfoque de la aproximación instrumental, dado que las acciones instrumentales producen una versión signífica del conocimiento. Artigue (2002) menciona que un instrumento se diferencia del artefacto físico que lo origina por ser “una entidad mixta, parte artefacto y parte proyectos cognitivos los cuales lo hacen un instrumento”. La conversión del artefacto en instrumento involucra una evolución en los diferentes usos del artefacto. Este proceso es llamado génesis instrumental.

El proceso de génesis instrumental, según Artigue (2002), se desarrolla en dos direcciones: La primera se enfoca hacia el artefacto, asimilando progresivamente sus potencialidades y limitaciones, transformándolas para usos específicos. Esta parte es conocida como:

instrumentalización del artefacto

La segunda se dirige al sujeto, principalmente a la apropiación de planes de acción instrumentada los cuales eventualmente tomarán forma de técnicas instrumentadas que permitan dar respuestas a tareas: *instrumentación*

El siguiente esquema retomado de Guin y Trouche (1999) intenta esquematizar el proceso de génesis instrumental (ver Figura 1).



Figura 1. Génesis Instrumental.

En lo referente al análisis de las limitaciones del artefacto Guin y Trouche (1999) las clasifican en tres tipos:

- *Limitaciones internas*, relacionadas con las representaciones intrínsecas en que el artefacto exhibe los objetos así como a los procesos de cálculo. Esto se debe a que las representaciones de los objetos en papel y lápiz pueden cambiar al introducirlos en el medio tecnológico y mostrarlos en su propia forma de representación.
- *Limitaciones de comando*, respecto a las posibilidades de acción proporcionadas al usuario, es decir, son los requerimientos sintácticos que deben ser memorizados por los estudiantes para operar con el dispositivo digital. Esta limitación refleja el entrenamiento adquirido por el estudiante sobre el conocimiento de las funciones del artefacto, es una limitación de interface.
- *Limitaciones de organización*, referidas no sólo a las funciones de cada comando sino a la relación de dichos comandos para poder establecer planes de acción.

Las potencialidades del artefacto serán identificadas dependiendo de su complejidad, de acuerdo a las especificaciones del mismo en el sentido de qué tantas funciones pueda ofrecer, así como la manera en que éstas puedan simplificar la consecución de las tareas.

El conocimiento del sujeto manifiesta su concepción sobre los objetos trabajados en el artefacto. Comúnmente los estudiantes tienen sus planes de acción fuera del artefacto, representados por sus técnicas con papel y lápiz.

Los alumnos, deben combinar estas técnicas con el artefacto a través de la resolución de problemas, y es en esta vinculación de ambientes donde se produce la génesis instrumental.

Otros aspectos importantes a considerar son los procedimientos llevados a cabo con el instrumento, es decir, la ejecución de los planes de acción o también llamados técnicas instrumentadas que tienen un valor técnico por sí mismas, pero deben ir de la mano con el discurso teórico para no convertirse en rutinas de memoria.

Como menciona Artigue (2002) las técnicas instrumentadas tienen un valor epistémico que contribuye a la comprensión de los objetos generalizados no accesibles a los estudiantes de forma inmediata.

El convertir una tecnología en legítima y matemáticamente útil desde un punto de vista

educativo, sea cual sea la tecnología en cuestión, supone, modos de integración que permiten un equilibrio satisfactorio entre el valor epistémico y el pragmático de las técnicas instrumentadas. Y esto necesita que las tareas propuestas en los planes de estudio, no sean simples adaptaciones de lo obtenido con lápiz y papel. Desgraciadamente, tales tareas no son creadas tan fácilmente cuando se entra en el mundo de la tecnología con una cultura de lápiz y papel (Artigue, 2007).

Investigaciones sobre parámetros.

El parámetro como generalizador en la resolución de problemas.

Drijvers (2003), realizó una investigación sobre el aprendizaje del concepto de parámetro que incluyó el uso de ambientes tecnológicos y a partir de la cual ha podido generar aseveraciones como las siguientes: “El parámetro es una variable extra en una expresión algebraica o función que generaliza toda una clase de expresiones, toda una familia de funciones o un grupo de gráficas. El parámetro es considerado una meta – variable: la a en $y=ax+b$ puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición, una cantidad desconocida o que cambia pero ésta actúa en un nivel más alto que el caso de una variable. Por ejemplo, un cambio del valor del parámetro no afecta sólo un punto en particular, sino completamente a la gráfica. Los diferentes roles de las variables son nuevamente considerados, pero ahora en un nivel más complejo, y la función genérica se convierte en el objeto de estudio. El concepto de parámetro resalta la abstracción de situaciones concretas. Las representaciones algebraicas más formales y generales se vuelven parte natural del mundo matemático de los estudiantes” (Drijvers, 2001, p.222).

Dentro de nuestra investigación se realiza un análisis conceptual del fenómeno parámetro que permite identificar los tres pasos esenciales en el aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición, como una cantidad que cambia y como un generalizador. El rol de parámetro como incógnita no es explícito ya que tiende a cambiar la jerarquía entre parámetro y variable.

La siguiente tabla muestra las categorías de análisis del parámetro tomadas por Drijvers (2001) en el escenario didáctico (ver Tabla 2)

Tabla2.
Roles del Parámetro

<i>Rol del parámetro</i>	<i>a en $y = ax + b$</i>	<i>Modelo gráfico</i>		
Fijador de posición	a contiene valores específicos, uno por uno	Una gráfica, que es remplazada por otra	Actividad del estudiante	Función del CAS
Cantidad que cambia	a transita a través de un conjunto de manera dinámica	Gráfica dinámica como cuando se pasan rápidamente las páginas de una historieta	Variación sistemática de los valores de un parámetro	Resolver ecuaciones, sustituir gráficas animadas
Parámetro que se desliza				
Generalizador	a representa un conjunto, generaliza toda la situación	Un grupo de gráficas juntas	Generalización de situaciones y soluciones	Gráficas de grupos Resolver ecuaciones paramétricas.

La investigación de Drijvers (2001) además de tener en común con la nuestra, el análisis de los parámetros, comparte la postura hacia la tecnología del grupo francés de Artigue, Trouche y Guin (1999), señalando, que el uso adecuado de un CAS requiere hacer explícitos los diferentes roles de las literales a diferencia del trabajo con lápiz y papel como parte del proceso de convertir un artefacto en instrumento. Dentro de las conclusiones de esta investigación destaca el hecho de que el escenario didáctico confirmó que el CAS fue útil para utilizar el parámetro como generalizador en la resolución de problemas en los que intervienen expresiones algebraicas tales como ecuaciones o funciones. El uso de la máquina libera a los estudiantes de la preocupación sobre los cálculos y enfatiza una concepción global de los procedimientos de solución. Distinción del uso de literales como parámetros del uso como variable.

Bloedy – Vinner (1994) realizó una investigación con estudiantes de bachillerato en Israel con el propósito de distinguir el uso de literales como parámetros del uso como variable. Menciona que los parámetros se estudian tanto de manera explícita como implícita, cuando se analizan familias de ecuaciones, familias de funciones, en problemas de enunciado verbal y otros tipos de problemas matemáticos.

Bloedy – Vinner (2001) menciona que para analizar las dificultades de los estudiantes en entender la noción de parámetro, y distinguirla de incógnitas y variables, primero se debe explicitar la distinción entre ellas como es asumida para la comunidad matemática. Esta noción tiene dos componentes, una proveniente del contexto donde hay que distinguir cuáles son parámetros y cuáles son variables. El segundo componente se refiere a los diferentes roles de los parámetros, incógnitas y variables.

Cuando se preguntó a un grupo de alumnos de nivel medio cuál era el rol de un parámetro, un estudiante dijo: *Es una constante*. El grupo completo dijo *pero varía*. Otro sujeto comentó: *Es una variable con valor constante*. En esas respuestas hay un conflicto entre si el parámetro es constante o variable (Bloedy – Vinner, 2001, p. p. 180).

Fundamentación del taller

En la investigación de referencia a la propuesta de taller que presentamos, acudimos a estudiantes de nivel bachillerato en la ciudad de México, jóvenes de edades entre 15 y 17 años, a los cuales, se aplicaron cuestionarios exploratorios en papel y lápiz para indagar sobre las ideas y uso que tenían al respecto de los parámetros. Se impartieron sesiones de enseñanza en ambientes tecnológicos como TI-Navigator y Geogebra utilizando tareas y problemas relacionados con funciones constantes, lineales y cuadráticas. Todas las sesiones de enseñanza fueron video grabadas, y analizadas para poder extraer fragmentos que nos otorgaran evidencia empírica para responder cuestionamientos sobre el tema, a saber: ¿Cómo contribuyen los entornos tecnológicos en la distinción de los usos de las literales y en la visualización de la representación gráfica de funciones polinomiales al variar los parámetros que intervienen en las mismas? ¿Puede el uso de entornos tecnológicos favorecer la comprensión de la noción de parámetro involucrada en funciones polinomiales?

Con el fin de responder estas interrogantes se propuso una ruta didáctica, construida por medio de trayectorias hipotéticas de aprendizaje conformadas por secuencias de tareas, donde se pretenden capturar los hitos fundamentales que conducen al avance progresivo del conocimiento.

Dentro de nuestra investigación se realiza un análisis conceptual del fenómeno parámetro según Drijvers (2003) quien en su investigación sobre el aprendizaje del concepto de parámetro incluyó el uso de ambientes tecnológicos y a partir de la cual ha podido permite identificar los

tres pasos esenciales en el aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición, como una cantidad que cambia y como un generalizador.

Las rutas didácticas fueron ensambladas y analizadas bajo las perspectivas teóricas antes mencionadas y hemos encontrado los siguientes aspectos relevantes respecto a la diferenciación de parámetros y variables a partir de entornos tecnológicos. Las trayectorias hipotéticas trazadas en la ruta didáctica, mostraron un avance en la noción de parámetro ya que se crea una concepción de naturaleza más continua que discretizada debido a las ventajas dinámicas de la herramienta a diferencia de la enseñanza regida por la cultura de papel y lápiz, en la que comúnmente se utilizan solamente medios estáticos de representación de objetos matemáticos, lo cual hace que la evolución de lo discreto a lo continuo en el estudio de funciones, se logre en periodos de tiempo más largos y en un menor número de estudiantes. Podemos también destacar que las potencialidades dinámicas de manipulación de objetos, permitió llevar las exploraciones de los efectos de los parámetros en gráficas correspondientes a expresiones como $f(x) = ax+b$ y $f(x) = ax^2+bx+c$.

Desarrollo del taller

Debido a que los avances antes mencionados se lograron a través de la conjunción de dos entornos tecnológicos, nos dimos a la tarea de buscar algún dispositivo digital que pudiera integrarlos en una sola herramienta, llevándonos al conocimiento de una nueva tecnología desarrollada por Hewlett-Packard, conocida como HP Prime Graphing Calculator, en la cual es posible condensar las bondades encontradas de los entornos anteriores en uno solo, además de ofrecer una mejor interfaz de uso para estudiantes tanto de nivel secundaria como pre-universitarios, además de que en la reformulación y primeras puestas en marcha de las rutas didácticas en este nuevo instrumento digital parecen ofrecer mayor ergonomía cognitiva, la cual favorece una mayor centración del análisis de los objetos matemáticos en cuestión sin necesidad de desviar la atención demasiado en los vericuetos de instrumentalización del propio artefacto. El dispositivo físico en cuestión y su versión digital para PC se muestran en la Figura 2.



Figura 2. Dispositivo HP Prime Físico y Virtual.

Dentro del taller que será dividido en tres partes ajustadas al tiempo indicado por comité organizador del evento en la primera tercera parte del mismo mostraremos el tipo de actividades

y problemas desarrollados en la investigación previa al respecto de la conceptualización de parámetros, así como del estudio realizado con el uso de tecnología digital para su exploración., junto con sus antecedentes y resultados obtenidos.

En la segunda parte del taller se mostrarán las funcionalidades de la nueva herramienta HP Prime Graghing Calculator, con la finalidad de que el público asistente las reconozca y desarrolle uso básico de algunas de las aplicaciones principales haciendo visible la sencillez en el tránsito de las categorías conceptuales del parámetro aportadas por Drijvers, a través de cuatro de sus principales aplicaciones, función, Creación de gráficas, Explorador cuadrático, Explorador lineal (ver Figura 3).



Figura 3. Indicar el título.

Mostrando que por medio de un orquestación instrumental de aplicaciones, podemos lograr diferentes acercamientos a la noción de parámetro, así como de su influencia en funciones lineales y cuadráticas, dejando entre ver que su adecuado manejo didáctico en la enseñanza de las matemáticas en la educación media permite al estudiante concebir este uso de la literal como un potente generalizador de ideas capaz entre otras cosas de agrupar los objetos matemáticos en cuestión en familias de funciones.

En el último tercio del taller se pedirá la solución de algunos problemas vía el uso de las aplicaciones exploradas en la HP Prime Graghing Calculator relacionadas con el uso de parámetros. Tales como pedir condiciones específicas que deben cumplir ciertas gráficas, asociadas y no asociadas a fenómenos contextualizados como elongación de resortes, caída libre, uso de proyectores de video, entre otros.

Expectativa del taller

A lo largo del taller, se discutirán las potencialidades y limitaciones del uso de este tipo de dispositivos digitales y de otros como pueden ser incluso software libre, como posibles recursos que puedan ayudar en potencializar la conceptualización del uso de la literal como parámetros, la cual es un tema poco explorado tanto en la investigación como en la puesta en marcha de orquestaciones didácticas en favor de su comprensión en la enseñanza regular de las matemáticas escolares; de igual manera se tomara lo explorado para que los asistentes reflexionen sobre otro tipo de objetos matemáticos que consideren relevantes para realizar indagar sistematizadas sobre la exploración de los mismos en sus versiones digitales.

Referencias

- Artigue, M. (2002). “Learning Mathematics in a CAS Enviroment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work”. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 7(3), 245 – 274.
- Artigue, M. (2007). “Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental”. *Historia y perspectiva de la Educación matemática. Memoria de la XII CIAEM*. P. 9 – 21.

- Arzarello, F. (2004). *Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories*. Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference. Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004.
- Bloedy-Vinner, H. (1994). "The analgebraic mode of thinking – The case of parameter", En Ponte, J. P. y Matos, J.F. (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 82-95). University of Lisbon, Lisbon – Portugal.
- Bloedy-Vinner, H. (2001). "Beyond Unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra", En R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on school Algebra* (pp.177-189). Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- Borba, M; y Villareal, M. (2006). *Humans – with – Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.
- D'Amore, B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position <<naïve>> dans une théorie <<réaliste>> contre le modèle <<anthropologique>> dans une théorie <<pragmatique>>. En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (Vol. 1, pp. 131-162).
- Drijvers, P. (2001). *The concept of parameter in a computer algebra environment*. En H. Chick et al. (eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Vol. 1 (pp. 221-227). The University of Melbourne, Australia.
- Drijvers, P. (2003). The concept of parameter in a computer algebra environment. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol 2* (pp. 385-392). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.
- Duval, R. (1998). *Signe et objet, I et II. Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasburg, 6, 139-196.
- Godino, J.D; y Batanero, C. (1999). *The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics*. Paper presented at the Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education.
- Guin, D y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into a mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3)195 – 227.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102 – 119). London: Murray.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A.F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12, 1988 Yearbook of the NCTM* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.
- Vrillon, R y Rbardel, G (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1): 77 -101.