I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Desarrollo del concepto de fracción en la escuela elemental: Aportes de la matemática en contexto

Omar **Hernández** Rodríguez
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
omar.hernandez4@upr.edu
Jorge M. **López** Fernández
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
jorgemar.lopez@gmail.com
Ana Helvia **Quintero**
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
aquinter_2000@yahoo.com

Resumen

A pesar de que las fracciones están ligadas a múltiples situaciones de la vida cotidiana, la tradición de privilegiar en su enseñanza las habilidades computacionales sobre su comprensión, ha creado un abismo entre los procedimientos y su significado. A pesar de las investigaciones realizadas, la percepción de los maestros es que se han realizado pocos avances para encontrar metodologías efectivas para la enseñanza-aprendizaje de este tema tan importante (Lamon, 2007). Una explicación podría ser el espacio que separa la investigación educativa de las prácticas del salón de clases. En este taller se presentará una mirada crítica a los resultados de la *investigación educativa* y las *prácticas de salones de clases* en cuanto al tema de las fracciones en la escuela elemental. Se proveerán ejemplos que permiten el desarrollo del concepto de fracción y su transición al número racional.

Palabras Clave: números fraccionarios, fracciones, número racional, matemática en contexto, matemática realista.

Resultados de las investigaciones realizadas

Un análisis del documento de Estándares de Contenido y Expectativas de Grado del Departamento de Educación de Puerto Rico, permitió determinar que se promueven tres sub-constructos al enseñar fracciones: *parte de un todo*, *razón* y *punto en la recta numérica*. En la práctica, los maestros privilegian la fracción como *parte de un todo*. Esto es así, no solo en la escuela puertorriqueña sino en todos Estados Unidos. Lamon (2007) indica que esta interpretación de las fracciones es casi la única que se enseña a tal punto que las fracciones y la *parte de un todo* se han convertido en sinónimos.

El tema de fracciones se introduce bien temprano en la escuela puertorriqueña, sin embargo, la preocupación no es la introducción temprana del concepto, sino el énfasis en ciertos aspectos que se ha evidenciado promueven la emergencia de obstáculos cognitivos (Fandiño, n/d; Humarán, 2012; Lamon, 2007; Valdemoros, 2004). Por ejemplo, la dificultad de entender la notación $\frac{a}{b}$ como un número y no dos números enteros unidos por un vínculo; también se han reportado los problemas cognitivos inherentes al sub-constructo *parte de un todo* de las fracciones impropias.

Para determinar el conocimiento de los estudiantes, se crearon varias pruebas utilizando los siguientes criterios: que estuvieran alineadas al currículo de Puerto Rico que evaluara los conocimientos por los niveles (correspondientes a los grados K-3, 4-6 y 7-9); y que tuvieran cierto grado de validación (por experto, prueba piloto o entrevista cognitiva). Las pruebas fueron administradas a estudiantes de maestros participantes en varios proyectos de desarrollo profesional del Programa Mathematics and Science Partnerships del Departamento de Educación de Puerto Rico. Los resultados indican que los estudiantes, en efecto, dominan mejor la interpretación *parte de un todo* de las fracciones, seguido de la interpretación de *razón* y luego la de *punto en la recta*. En efecto, cerca del 90% de los estudiantes de séptimo grado (N=134) contestaron correctamente las preguntas relacionadas al sub-constructo *parte de un todo*, mientras que sólo 50% de los mismos estudiantes contestaron correctamente las preguntas de la fracción como *un punto en la recta*. Otros resultados interesantes indican que los estudiantes del nivel 4-6 identifican sin ningún problema las fracciones unitarias; reconocen mejor la representación simbólica que la verbal; reconocen como partes iguales las que son congruentes, sin embargo, no reconocen como partes iguales las que tienen igual área; la representación que mejor dominan los estudiantes es la representación circular, los estudiantes tienen dificultad reconociendo las fracciones equivalentes; y, reconocen la interpretación de razón, sin embargo, si la fracción está simplificada, les causa mucha dificultad reconocerla.

Si consideramos que un concepto se comprende a cabalidad cuando se puede transitar libremente por sus diferentes interpretaciones (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983), podemos decir que los estudiantes que egresan del nivel 4-6, no poseen el concepto de fracción. Esto representa una gran dificultad ya que algunos autores consideran este tema como la llave que abre la puerta de acceso al álgebra (Wu, 2011). Por otra parte, las fracciones son indispensables para la comprensión de los números racionales y por lo tanto de los números reales, éstos últimos indispensables para la comprensión de los temas fundamentales del pre-cálculo. En suma, si un estudiante no domina las fracciones, tendrá mucha dificultad para acceder a los temas que lo preparan para la universidad.

Implicaciones para el desarrollo de materiales educativos

Los resultados de estas investigaciones y de las realizadas en otras partes del mundo, proveen información valiosa para crear materiales educativos. Las actividades que se proponen están fundamentadas en la Matemática Realista desarrollada en el Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht y la Universidad de Wisconsin, en Madison. Los principios de la Matemática Realista fueron introducidos en Puerto Rico a través de los Centros Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática (CRAIM) bajo la dirección del Dr. Jorge López Fernández. En los años noventa, un grupo de profesores puertorriqueños tradujeron, revisaron y publicaron los primeros materiales con la colaboración de Thomas A. Romberg entonces director del National Center for Research in Mathematical Sciences Education (NCRMSE) del Departamento de Educación Federal y catedrático de Currículo e Instrucción de la Universidad de Wisconsin, en Madison y Jan de Lange director del Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht, en Holanda. En Estados Unidos la Matemática Realista adoptó el nombre de Matemática en Contexto.

La Matemática Realista plantéa que los conceptos requieren experiencias que le den sentido previo a representar el simbolismo. Las fracciones como los números surgen en diferentes contextos y con diferente sentido. Debemos desarrollar estas diferentes nociones y las conexiones entre ellas (D'Ambrosio, 1994). La primera tarea que tenemos es ofrecer contextos que le den sentido a las fracciones, realidades que les permitan desarrollar metáforas que les ayuden a interpretar las operaciones y relaciones de las fracciones.

Contextos

Partir de una situación contextual permite a los estudiantes construir el concepto de fracción con sentido (Quintero, 2011). Se eliminan las operaciones mecánicas y se promueve la reflexión en el propio aprendizaje. Al requerir un ejemplo concreto, el estudiante puede recurrir a una representación anclada en su cotidianeidad que de otra forma está carente de sentido.

Ya que la representación de parte todo es la que mejor los estudiantes entienden presentaremos ejemplos de contextos que le dan sentido a las interpretaciones de la fracción como medida y como razón.

Midiendo

Al medir, las fracciones surgen en forma natural. En la siguiente actividad se utiliza un franjita de papel como cinta de medir sin graduar (Figura 1).

Actividad. Le ofrecemos a cada niño una franjita del largo del ancho de un papel:

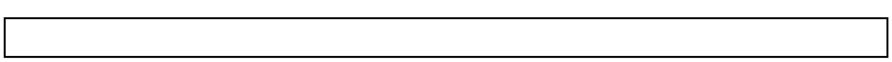

Figura 1. Franjita para medir.

Le pedimos que mida el largo de diversos objetos. Una vez comenzamos a medir objetos con franjitas del mismo tamaño surgirán situaciones donde un objeto no mida exactamente un número de franjitas. En este caso preguntamos, qué podemos hacer para obtener una medida más exacta. A partir de las sugerencias de los niños podemos ir guiándolos hasta que surja la idea de dividir la franja en fracciones: $\frac{1}{2}$ franja; la mitad de la mitad, $\frac{1}{4}$ de franja. Para los niños no es obvio que la mitad de la mitad es un cuarto. Llegar a esa conclusión requiere tiempo, pero como hemos insistido es importante tomarnos nuestro tiempo y aprender con sentido. Continuamos este proceso hasta que lleguemos a una división razonable para el nivel de los niños. De hecho, en un mismo salón pueden existir diversidad de divisiones razonables, unos niños pueden entender hasta $\frac{1}{8}$ y otros pueden llegar a $\frac{1}{16}$.

La franjita es una de las metáforas que apoya la comprensión de las fracciones a la par que permite la integración de diversas interpretaciones de la fracción. Por ejemplo, una vez el estudiante tenga más experiencia midiendo, podemos integrar la representación de las fracciones en la recta numérica, utilizando la metáfora del medir.

La representación de las fracciones en la recta numérica no es tarea fácil. A continuación mostramos una serie de errores que hemos encontrado en estudiantes de escuela intermedia y en estudiantes universitarios al representar fracciones en la recta numérica. A la par que describimos el error pasamos a analizar la concepción sobre la fracción que lleva al mismo.

Problema: Representa gráficamente (en la recta) $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{5}{6}$.

Error 1. La Figura 2 muestra la respuesta de un estudiante

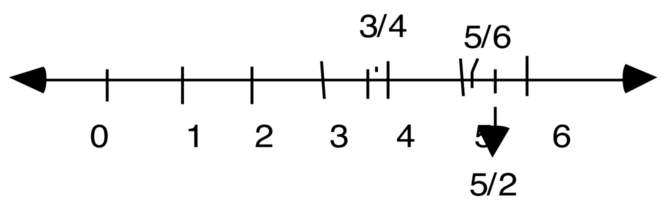

Figura 2. Representación incorrecta de fracciones en la recta numérica.

Esta estudiante no entiende bien la representación de las fracciones en la recta. De hecho, después de hacerla dijo "yo no entiendo". Al hacer la representación se fijó primero en el numerador y éste le indica en que intervalo localizar la fracción. Luego organiza las fracciones de acuerdo al denominador.

Error 2. La Figura 3 muestra la representación que hizo un estudiante de $\frac{1}{2}$.

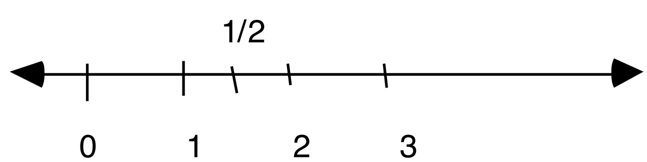

Figura 3. Representación incorrecta de $\frac{1}{2}$.

Este error se repitió en varios estudiantes. Su dificultad estriba en partir del 1 en lugar del 0. Estos estudiantes tienen dificultad en identificar dónde comienzan las unidades al medir.

Estos errores muestran que los estudiantes no tienen claro ni las fracciones ni la recta numérica. Por esto es importante relacionar la recta numérica con la medida y ésta a su vez con las fracciones.

A continuación ejemplos de ejecicios para apoyar la comprensión de las fracciones en la recta numérica. En la misma se presenta la recta como la suma de franjitas, cada franjita representa una unidad. Es important resaltar que las franjas no se sobreponen (Figura 4).

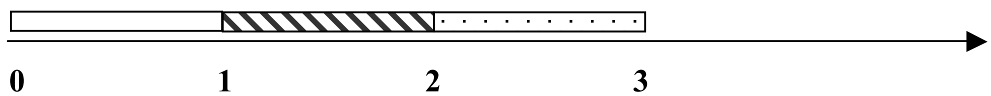

Figura 4. Alineación de franjas sin sobreponerse.

Una vez el estudiante ha entendido que cada espacio en la recta representa una unidad, podemos pasar a pedirle que represente, por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$. En el primer caso es la mitad de la primera unidad, en el segundo es una unidad y $\frac{2}{3}$ de la segunda (Figura 5).

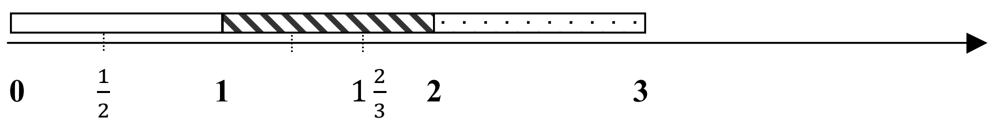

Figura 5. Transición de la medición a la recta numérica.

La representación de las fracciones en la recta apoya también el aprendizaje de las fracciones equivalentes. La Figura 6 muestra la unidad, luego se divide en medios y posteriormente en cuartos. Los estudiantes deben concluir la equivalencia de las fracciones.

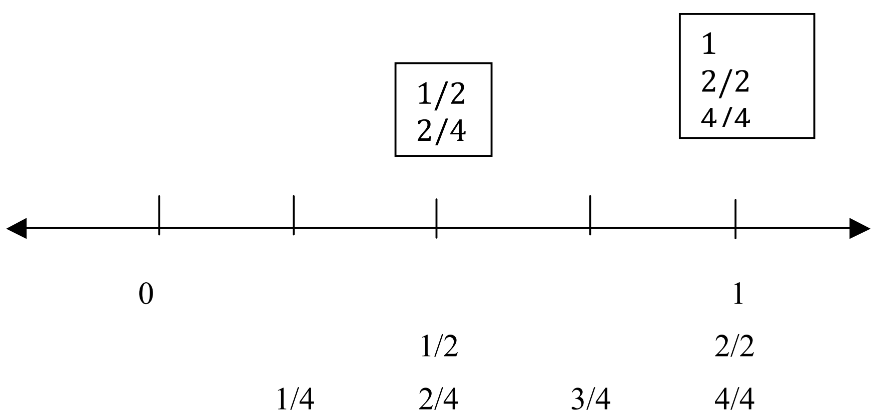

Figura 6. Fracciones equivalentes en la recta numérica.

La fracción como razón

La fracción como razón es un concepto muy importante tanto en la matemática como en la ciencia y la estadística. Si reflexionamos sobre el currículo veremos que rara vez se enseña directamente la razón. La razón, sin embargo, es un concepto díficil para el estudiante. Al igual que muchos conceptos requiere que se vaya construyendo poco a poco.

La investigación muestra que el primer tipo de razón que entienden los estudiantes es la *razón - unidad*. . Esta es la razón que se expresaría en fracción como $\frac{4}{1}, \frac{8}{1}, \frac{12}{1}$. Por ejemplo:

4 dulces en cada bolsita.

8 chinas por peso.

12 niños por maestro

Desde los grados primarios podemos integrar problemas con razones de este tipo. Algunas de las dificultades de los estudiantes con este tipo de razón es con el lenguaje. Entender que

"8 chinas por peso"

es equivalente a

"8 chinas por cada peso"

Una vez el estudiante entienda la razón unidad podemos, a partir de cuarto grado, comenzar a presentar actividades de repartición justa que introducen otro tipo de razón.

Por ejemplo, ¿es lo mismo 4 pizzas por cada 6 estudiantes, que 2 pizzas para 3 estudiantes?.

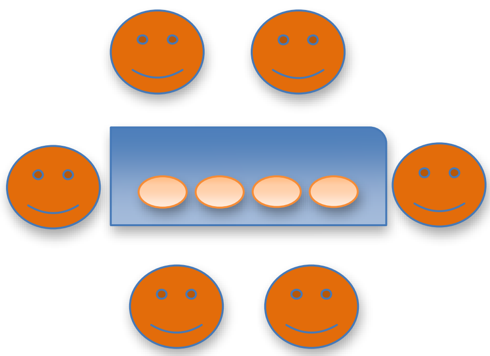

Figura 7. Representación de 4 pizzas para 6 estudiantes.

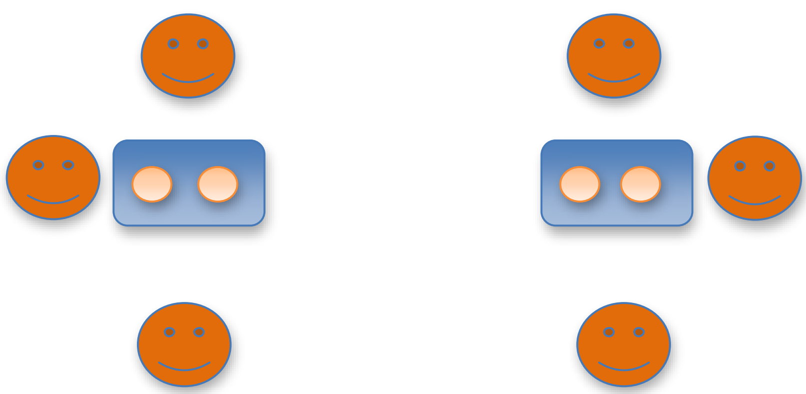

Figura 8. Repartición justa para mostrar la equivalencia de 4 pizzas para 6 estudiantes y 2 pizzas para 3 estudiantes.

La repartición justa también ayuda a explicar las fracciones equivalentes (Figuras 7 y 8).

Otra forma de apoyar el que los estudiantes entienden las razones es que estos vean la relación de ésta con la razón unidad. Una forma de lograr que vean esta relación es utilizando las tablas.

Por ejemplo; analicemos el siguiente problema: Carmín compró 10 bombones por 5₡. ¿Cuántos bombones le darán por 8₡?

Construimos una tabla como la de la Figura 9:

Dinero		5 ₡	8 ₡
Bombones		10	

Figura 9. Tabla para representar la situación.

Si conseguimos cuántos bombones dan por 1 ₡ entonces es más fácil saber cuántos dan por 8₡. Si dan 10 bombones por 5 ₡, por 1 ₡ darán 2 bombones. De aquí podemos calcular que por 8₡ darán 16.

Dinero	1 ₡	5 ₡	8 ₡
Bonbones	2	10	16

Figura 10. Tabla para mostrar equivalencia entre razones.

Las tablas también pueden ser utilizadas para el desarrollo del razonamiento proporcional. Por ejemplo:

"María fue a comprar paletas, le dieron 10 paletas por 25 ₡. ¿Cuántos dulces le darán a Roberto por 10 ₡?"

La representación de la situación en tablas puede ayudar a resolver situaciones de proporciones (Figuras 11-13). Una vez el estudiante domine la solución de situaciones de proorcionalidad por medio de tablas, pueden ser utilizadas para mostrar las propiedades de las proporciones.

Dinero	5 ₡	10 ₡	15 ₡	20 ₡	25 ₡
Paletas					10

Figura 11. Tabla para representar la siruación.

Le pedimos a los estudiantes que piensen cómo pueden conseguir los otros valores. Entre las estrategias puede surgir la siguiente.

Paso 1

5 ₡ cabe cinco veces en 25 ₡. Por tanto, las paletas que den por 5 ₡ deben caber cinco veces en 10. El número que cabe cinco veces en 10 es 2. Tenemos pues:

Dinero	5 ₡	10 ₡	15 ₡	20 ₡	25 ₡
Paletas	2				10

Figura 12. Tabla para introducir las proporciones.

Paso 2

Si dan dos paletas por 5 ₡, por diez darán el doble, o sea 4.

Dinero	5 ₡	10 ₡	15 ₡	20 ₡	25 ₡
Paletas	2	4			10

Figura 13. Tabla para mostrar equivalencia entre razones.

Las tablas nos pueden llevar a la idea de las líneas dobles, que también pueden ser utilizadas para mostrar equivalencia y desarrollar el razonamiento proporcional (Figura 14). Además, se puede favorecer la representación rectangular que permite un tránsito más cómodo a la representación lineal, por analogía, como lo recomienda English (1999). A continuación ejemplos de la doble línea:

En esta un entero se divide en una forma por un lado y en otra por el otro:

Arriba en tres.

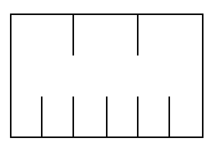

Figura 14. Líneas dobles para mostrar equivalencia entre fracciones.

Abajo en seis.

Al comparar observamos que 2 de 3 es lo mismo que 4 de 6.

La doble línea también es muy útil para introducir el concepto de porcentaje. Esto de paso apoya que se entienda el porcentaje como una fracción. Por ejemplo, estamos trabajando con un grupo de 45 estudiantes. De estos 15 están en el Club de Dibujo. ¿Qué porciento de la clase está en el Club de Dibujo?

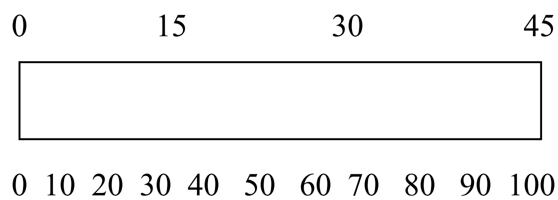

Figura 15. Líneas dobles para introducir el concepto de porcentaje.

De esta representación observamos que 15 de 45 equivale a un poco más de 30 de 100, o sea a un poco más de 30%.

En el proceso de trabajar estos problemas es importante que el estudiante entienda que en las razones las cantidades absolutas no son lo importante sino la relación entre ellas. Así podemos introducir actividades que promuevan esta idea: -- ¿qué jugo es más concentrado en limón, uno donde usamos 2 limones por 3 vasos de agua o uno donde usamos 3 limones por 5 vasos de agua?

Muchos estudiantes dirán que el jugo de tres limones tiene más sabor a limón, pues son más limones. Aquí le señalamos que a la par que tiene más limón tiene más agua, lo que lo hace más aguado. ¿Cómo resolvemos el problema? De esta discusión debe surgir la idea que en la razón es importante analizar la relación entre ambas, ¿dónde es mayor la cantidad de limón por vaso de agua?

Otro contexto que apoya el darle sentido a las fracciones es el dinero. Esto se puede obtener en una situación cotidiana familiar a los niños y niñas de todas partes del mundo que utilizan el sistema decimal. Utilizado con propiedad, se pueden realizar actividades que favorezcan la matematización horizontal y posteriormente la vertical al utilizar puntos de referencias para mitades, cuartos, décimos y vigésimos. Con esto se puede realizar equivalencias y comparaciones entre fracciones, el orden también sería algo natural. Utilizando un razonamiento por analogía, se podría extender los conocimientos a los decimales y porcentajes, dos temas que también son difíciles para los estudiantes.

Referencias

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

D'Ambrosio, B., and Mewborn, S. D. (1994). Children's Construction of Fractions and their Implications for Classroom Instruction. *Journal of Research in Childhood Education. 8 (2), 150-61.*

English, L. D. (1999). Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning. In L.V. Stiff, and F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Fandiño Padilla, M. I. (n/d). Autoreport of the disertation of María Isabel Fandiño Padilla. Disponible en http://math.unipa.it/~grim/Autoreport_Pinillo_06.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Humarán Martínez, Y. (2011). El entendimiento conceptual de fracción de los maestros de escuela elemental en formación. Documento sin publicar.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Quintero, A. H. (2011). *Matemáticas con sentido: aprendizaje y enseñanza.* San Juan, Puerto Rico: La Editorial de la Universidad de Puerto Rico.

Valdemoros Alvarez, M. E. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7* (3), 235-256.

Wu, H. (2011). *Understanding numbers in elementary school mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society.