I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

# El origami y el doblado de papel como herramientas mediadoras para la enseñanza y el aprendizaje matemáticos

Orlando **Monsalve** Posada
Departamento de Ciencias y Artes Universidad de Antioquia
Colombia
Orlandomonsalve@gmail.com

## Resumen

El objetivo del presente taller es explorar las diversas posibilidades que tanto el doblado de papel como el origami le brindan a los docentes para un mejor aprestamiento en la enseñanza y el aprendizaje matemáticos.

*Palabras clave*: doblado de papel, origami, geometría, trigonometría, teoremas, axiomas, congruencia, semejanza, simetría .

## Presentación

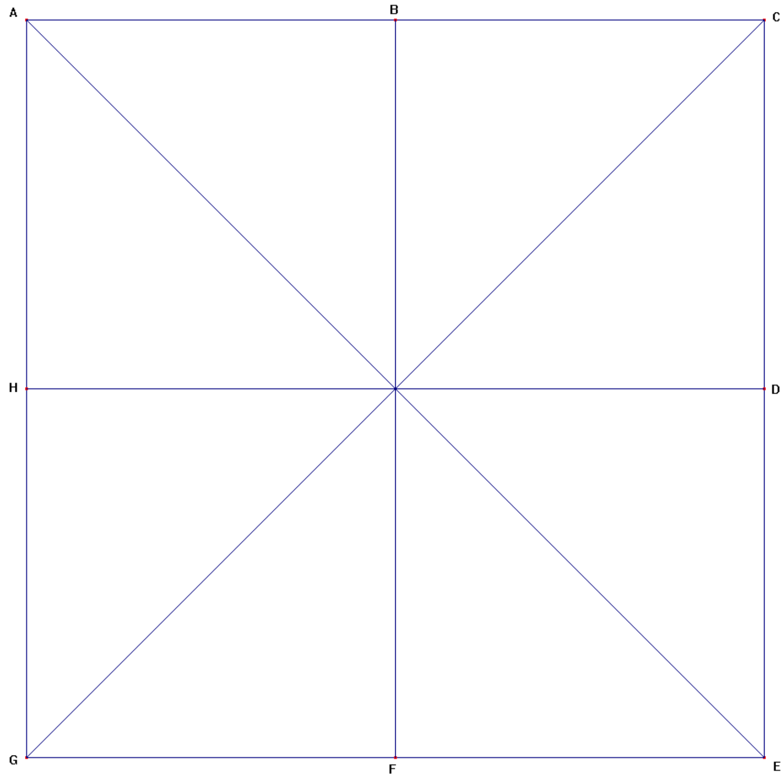
Las Matemáticas a través del lenguaje hacen visible lo invisible: Keith Devlin
Dentro del currículo de la Licenciatura de Matemáticas Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se trabaja el Curso de Integración Didáctica IV: Estrategias y Medios no Convencionales para la Enseñanza y el Aprendizaje Significativos de la matemática Escolar. Este es el cuarto curso dentro de una serie de Diez Integraciones Didácticas que el estudiante debe cursar durante toda su Carrera.
Como su nombre lo indica, el curso establece conexiones no sólo entre las diversas ramas de la Matemática sino también con la Química, la Física, la Biología, la lengua Natural y todas las ramas de estudio que implica esta última. Algunos de los énfasis del Curso son: el lenguaje

natural como fuente del lenguaje científico; Comprensión lectora, Etimología de las palabras, elaboración de materiales para la enseñanza, origami y doblado de papel entre otros.
En el año 2000, se seleccionaron seis estudiantes del Programa, que mostraron su especial interés en el doblado de papel y el origami para trabajar durante toda su carrera, en el libro de Sundara Rao *Geometric exercises in paper folding:* Como resultado final los estudiantes presentaron adelantos de sus trabajos en diversos eventos académicos nacionales: Congresos, Conferencias, Talleres, Seminarios. Finalmente presentaron como Tesis de Grado, para optar al título de Licenciados en Matemática Física, buena parte de lo elaborado a lo largo de los cuatro años que duraron sus estudios. Algunos continuaron su Maestría y Doctorado en la misma línea: Origami y doblado de papel.
De otro lado se aprovechó la oportunidad de trabajar un Curso denominado Metodología del Aprendizaje para estudiantes de todas las Ingenierías de la Universidad EAFIT, situada también en la ciudad de Medellín. La novedad del Curso consistía en que todos los estudiantes matriculados repetía por segunda, tercera y cuarta vez el Cálculo Diferencial y Cálculo Integral; por esta razón estaban matriculados en un **Semestre Especial**; el trabajo se desarrollaba poniendo en práctica toda la estrategia del Curso de Integración Didáctica IV para que los estudiantes superaran este impase no sólo académico sino emocional y económico.
Los resultados alentadores y estimulantes de esta labor, desarrollada durante doce semestres, quedaron consignados en el Trabajo de Investigación llevado a cabo por las doctoras Jeannette Lerner y Marcela Gil, referenciados en la bibliografía.

## Origami, doblado de papel y mostraciones

El origami, estrictamente hablando, consiste en elaborar una figura – generalmente tridimensional – a partir de una hoja de papel; el doblado, en cambio no pretende la elaboración de una figura sino en doblar la hoja y luego analizar geométricamente los doblecesa de la misma; No obstante lo anterior, ambas actividades son complementarias; se puede elaborar la figura y luego regresar la hoja a su estado original y proceder al respectivo análisis matemático.
Las **mostraciones geométricas** cumplen a cabalidad con el epígrafe que encabeza este escrrito; una **mostración** es una aproximación intuitivo – operatoria, de carácter multisensorial,a conceptos matemáticos, químicos o físicos.

**Primera actividad . Los axiomas de Huzita – Hatori**




1. Dados dos puntos A y E, hay un doblez que pasa por los dos puntos

2. Dados dos puntos A y C, hay un doblez que lleva a A sobre C

3. Dadas dos rectas AG y CE, hay un doblez que lleva a AG sobre CE

4. Dados un punto B y una recta GE hay un doblez perpendicular a GE que pasa por B

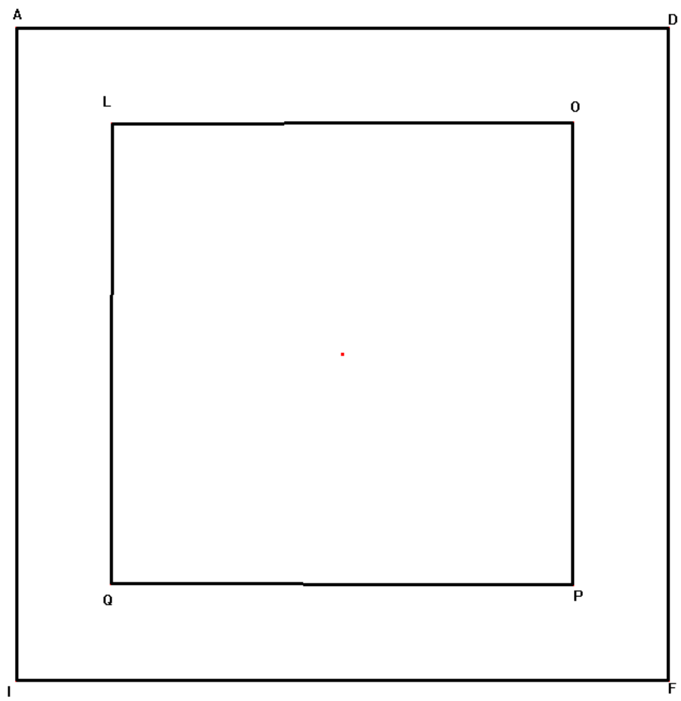
5. Dados dos puntos A y B y una recta CE hay un doblez que lleva a A sobre CE y pasa por B

6. Dados dos puntos B y H y dos rectas CE y GE hay un doblez que lleva a B sobre CE y a H sobre GE

7. Dados un punto A y dos rectas CE y GE, hay un doblez que lleva a A sobre CE y es perpendicular a GE

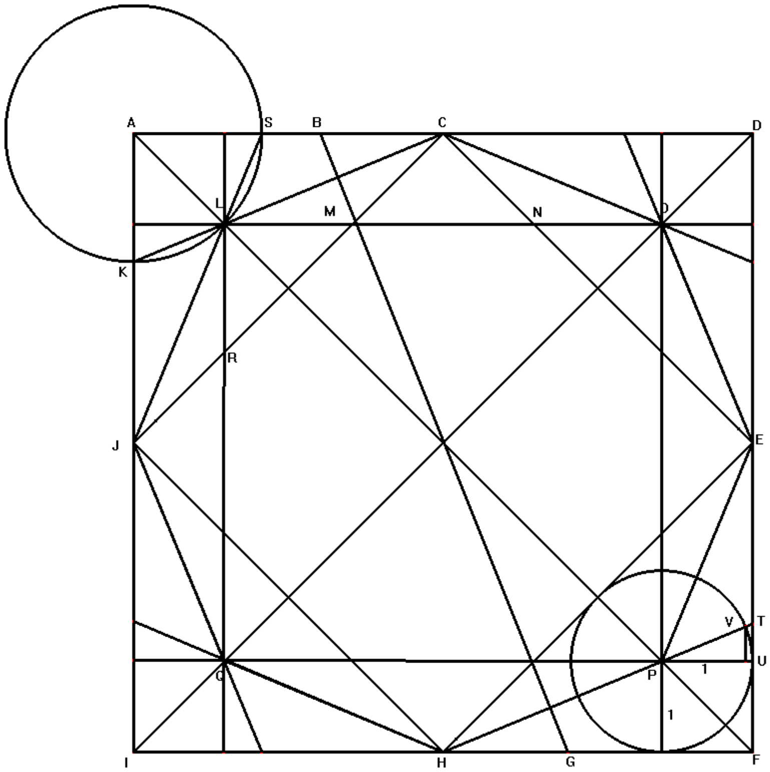
**Segunda actividad**

**¿Cómo mostraría, probaría, comprobaría o demostraría que el área del cuadrado LOPQ es La mitad del cuadrado ADFI.**



## Tercera actividad

## Elaboración de una mesa octogonal



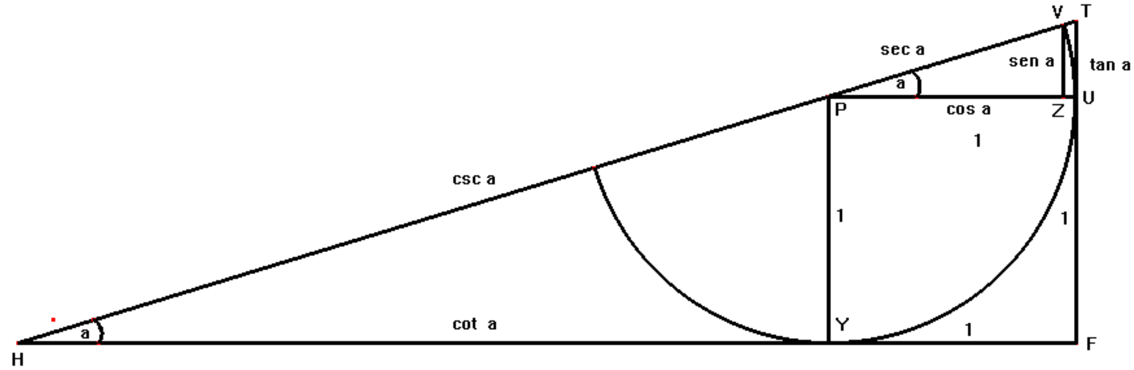

Con excepción de las dos circunferencias y el doblez BG que no pertenecen a la grilla de dobleces de la mesa, todas las maniobras que siguen están justificadas en el plano arquitectónico de la misma.

**Comprobación de que el cuadrado LOPQ es la mitad del grande mediante la aplicación del axioma 6 de Huzita – Hatori**

Dados dos puntos J, L y dos rectas LD, AD hay un doblez que lleva a J sobre LD y a L sobre AD

## Cuarta actividad

En el diagrama de la mesa, tomamos el triángulo TFH y la semicircunferencia que se indica para justificar las siguientes identidades trigonométricas




PV = 1 PU = 1 PY = 1 FY = 1 FU = 1

En el $\Delta$ VPZ, sen a = $\frac{VZ}{1}$ **VZ = sen a**; en el mismo $\Delta$ VPZ cos a = $\frac{PZ}{1}$ **PZ = cos a**

En el $\Delta$ TPU, tan a = $\frac{TU}{PU}$ = $\frac{TU}{1}$ **tan a = TU;** en el mismo $\Delta$ TPU

sec a = $\frac{PT}{PU}$ = $\frac{PT}{1}$ **sec a = PT** En el $\Delta$ PHY, cot a = $\frac{HY}{PY}$ = $\frac{HY}{1}$ **cot a = HY;** en el

mismo $\Delta$ PHY csc a = $\frac{HP}{PY}$ = $\frac{HP}{1}$ **csc a = HP**

1 $\mathbf{sen^2\, a + cos^2\, a = 1}$

2. $\mathbf{(1 + tan\, a)^2 + (1 + cot\, a)^2 = (sec\, a + csc\, a)^2}$

3. $\boldsymbol{tan\, a = \frac{tan\, a+1}{cot\, a+1}}$

4. $\mathbf{sec^2\, a = 1 + tan^2\, a}$

5. $\mathbf{csc^2\, a = 1 + cot^2\, a}$

**Segunda sesión**

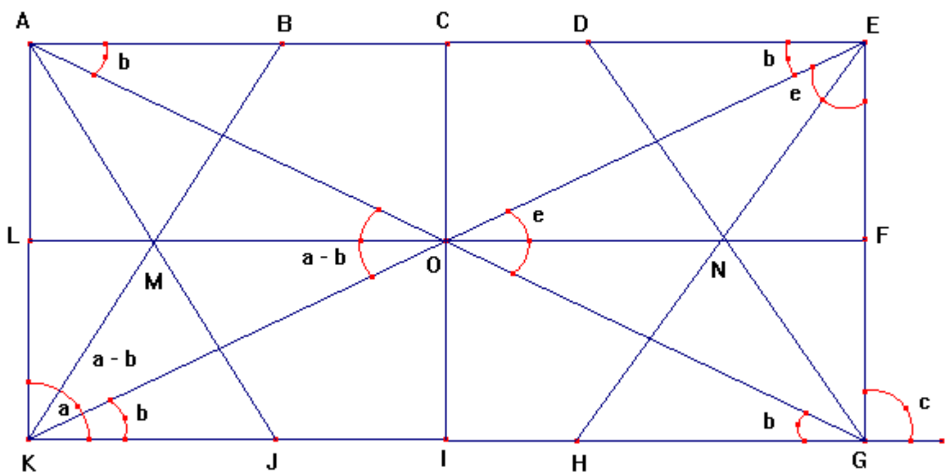
**Primera actividad**

En la presente actividad están presentes los siguientes genios matemáticos**:** Pappus, Arquímedes, Pitágoras, Tolomeo, Giovanni Ceva

**Elaboración del perfil de un monje**

1. Recorte, por el lado largo, la mitad de una hoja tamaño carta

2. Divída nuevamente, por la mitad; marque los puntos como se indica en la figura adjunta

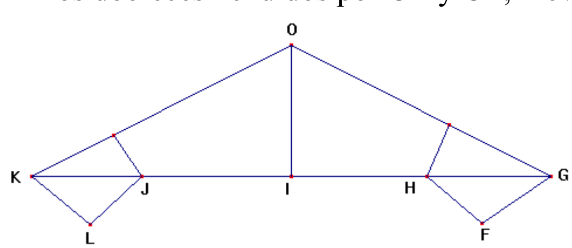


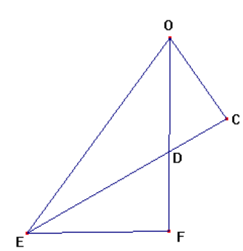

4. Lleve el punto K a O y trace el doblez AG, llevando AE sobre AO

5. Lleve el punto A a O y ejecute el doblez KE, llevando a KG sobre KO

6. Efectúe el doblez EG y recorte la hoja por ese doblez; queda el rectángulo AEGK

7. Los dobleces hendidos por OL y OF, llevan a A sobre K y a E sobre G.



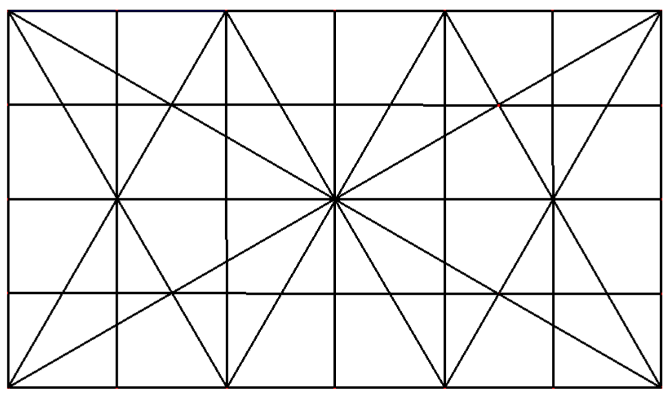

8. Por OI lleve a G sobre K
Hemos elaborado el perfil de la figura de un monje con su capucha

## El trisector múltiple arquimediano

En la construcción de Pappus el < (a – b) es el exterior del AOE que es isósceles y es igual a 2b ∴ > a – b = 2b; a = 3b
En la construcción arquimediana, el Δ EKG, el < c es exterior y es igual < b + < e;
El < e es el exterior del triángulo KOG y es igual a 2b <e = 2b $\therefore < c = 3b$

## Segunda actividad:

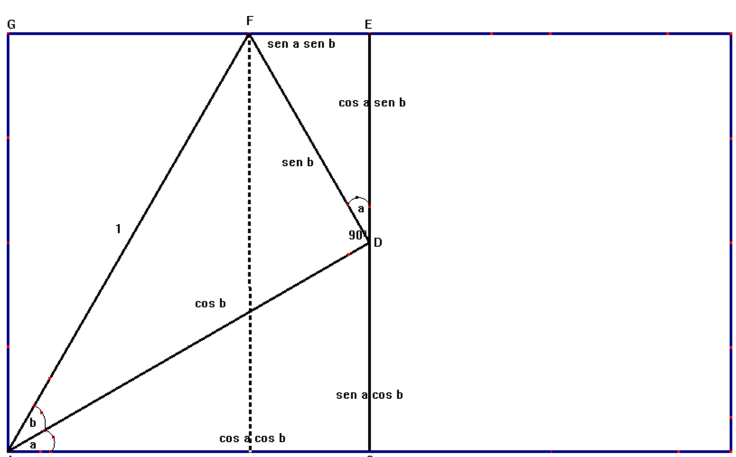
**División de una hoja en dos, tres, cuatro, partes iguales: igualdad, semejanza, congruencia y simetría comparación de áreas**



Si agregamos unos cuantos dobleces a la figura básica del monje, cada uno puede hacer visible la geometría invisible implícita en el mosaico de la figura.
A continuación ilustraremos sólo seis, de las diez y siete identidades trigonométricas, presentes en el trisector múltiple

## Tercera actividad

Solución al ejercicio, one figure six identities , propuesto por Roger Nelsen (2000)



**1.** $\boldsymbol{sen(\alpha + b) = sen\ \alpha \cos b + cos\ \alpha\ sen\ b}$

$sen\alpha = \frac{EF}{DF}; EF = DFsen\alpha;$ $\boldsymbol{EF = sen\ asen\ b}$

$cos\alpha \frac{DE}{DF}; DE = DFcos\alpha;$ $\boldsymbol{DE = \ cos\ a\ sen\ b}$

$sen\ b = \frac{DF}{AF}; DF = AFsenb$ $\boldsymbol{DF = sen\ b}$

$\cos b = \frac{AD}{AF};\ \ AD = AFcos\ b$ $\boldsymbol{AD = \cos b}$

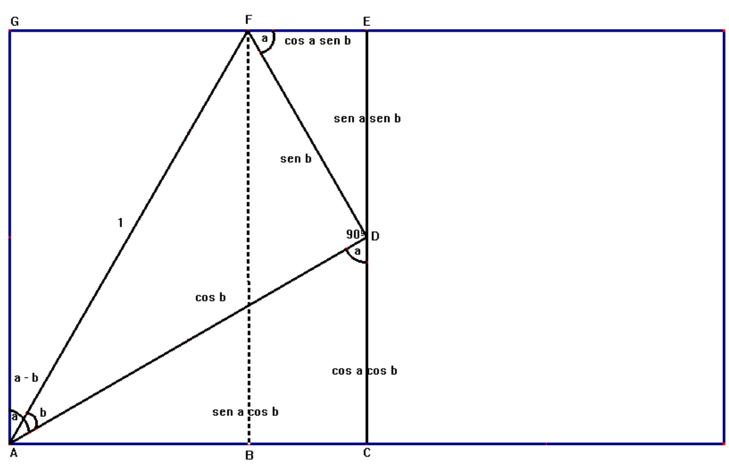
$sen\alpha = \frac{CD}{AD}; CD = ADsen\alpha$ $\boldsymbol{CD = sen\ a \cos b}$

$cos\alpha = \frac{AC}{AD}; AC = ADcos\alpha$ $\boldsymbol{AC = cos\ a \cos b}$

$sen(\alpha +\ b) = \frac{FB}{1} = \frac{CD+DE}{1}$

$cos(\alpha +\ b) = \frac{AB}{1} = \frac{AC-BC}{1}$ **BC = EF**

**2.** $\boldsymbol{cos(\alpha + b) = cos\alpha \cos b - sen\alpha senb}$




**3.** $\boldsymbol{sen(\alpha - b) = sen\alpha \cos b - cos\alpha senb}$

$sen\alpha = \frac{DE}{DF}; DE = DFsen\alpha;$ $\boldsymbol{DE = sen\alpha senb}$

$cos\alpha \frac{EF}{DF}; EF = DFcos\alpha;$ $\boldsymbol{EF = \ cos\alpha senb}$

$sen\ b = \frac{DF}{AF}; DF = AFsenb$ $\boldsymbol{DF = sen\ b}$

$cos\ b = \frac{AD}{AF}; AD = AFcos\ b$ $\quad$ $\boldsymbol{AD = \cos b}$

$sen\alpha = \frac{AC}{AD}; AC = AD\ sen\alpha$ $\quad$ $\boldsymbol{AC = sen\ \alpha \cos b}$

$cos\alpha = \frac{CD}{AD}; CC = ADcos\alpha$ $\quad$ $\boldsymbol{CD = cos\ \alpha \cos b}$

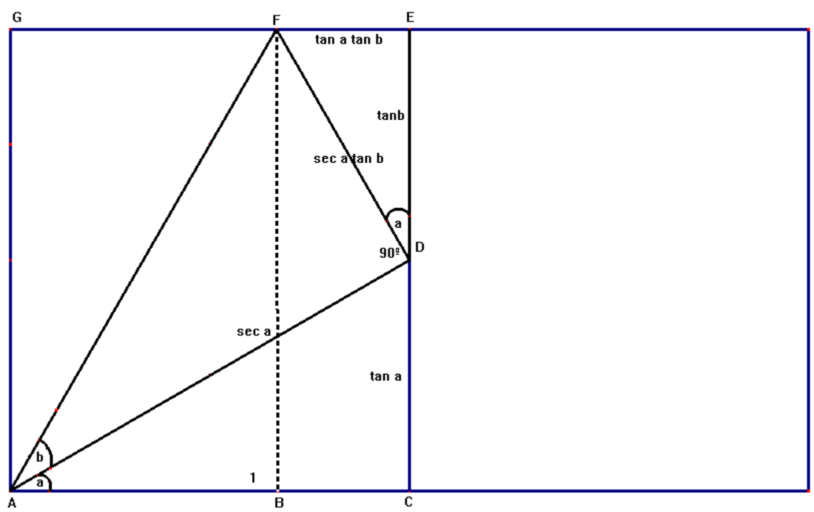
$\Delta AFG = \Delta ABF; BC = EF$ $\quad$ FG = AB $\quad$ **AB = AC – BC**

$\boldsymbol{sen(\alpha - b) = \frac{FG}{1} = \frac{AB}{1} = \frac{AC-BC}{1} =}$ $\quad$ $\boldsymbol{AC - EF}$

$\boldsymbol{AG = CE}$ $\quad$ $\boldsymbol{CE = CD + DE}$ $\quad$ $\boldsymbol{AG = CD + DE}$

$cos(\alpha - b) = \frac{AG}{1} = \frac{CD+DE}{1}$

**4.** $\boldsymbol{cos(\alpha - b) = cos\ \alpha \cos b + sen\ \alpha\ sen\ b}$




$sec\ \alpha = \frac{AD}{AC};$ $\quad$ $\boldsymbol{AD = AC\ sec\ \alpha}$ $\quad$ $\boldsymbol{AD = \sec \alpha}$

$\tan b = \frac{DF}{AD};$ $\quad$ $DF = AD \tan\ b$ $\quad$ $\boldsymbol{DF = \sec \alpha \tan b}$

$AD = \frac{DF}{DE}$ $\quad$ $AD.DE = DF$ $\quad$ $DE = \frac{DF}{AD}$ $\quad$ $DE = \frac{sec\ \alpha \tan b}{sec\ \alpha}$

$\boldsymbol{DE = \tan b}$

$sec\ \alpha = \frac{DF}{DE};$ $\quad$ $DF = DEsec\ \alpha$

$tan\alpha = \frac{EF}{DE};$ $\quad$ $EF = DE\ tan\ \alpha$ $\quad$ $\boldsymbol{EF = tan\ \alpha \tan b}$

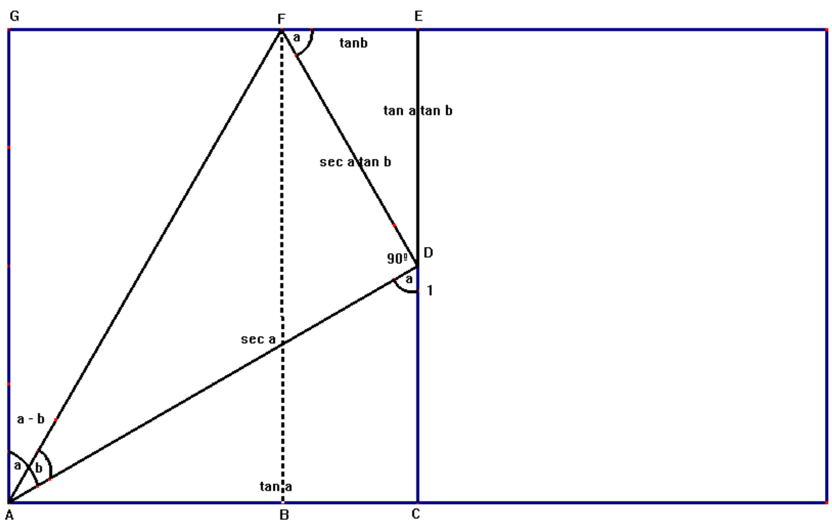
$\tan \alpha = \frac{CD}{AC}$ $\quad$ $CD = AC \tan \alpha$ $\quad$ $\boldsymbol{CD = \tan \alpha}$

BF = CE CE = CD + DE $BC = EF$ **AB = AC – BC**

$tan(\alpha + b) = \frac{BF}{AB}$ $tan(\alpha + b) = \frac{CD+DE}{AB}$

$tan(\alpha + b) = \frac{CD+DE}{AC-BC}$

**5.** $\boldsymbol{tan(\alpha + b) = \frac{\tan\alpha+\tan b}{1-\tan\alpha\tan b}}$




$\tan\alpha = \frac{AC}{CD}$; $AC = \tan\alpha$ $\boldsymbol{AC = \tan\alpha}$

$\sec\alpha = \frac{AD}{1}$; $AD = \sec\alpha$ $\boldsymbol{AD = \sec\alpha}$

$\tan\beta = \frac{DF}{AD}$; $DF = AD\tan b$ $\boldsymbol{DF = \sec\alpha\tan b}$

$AD.EF = DF$ $EF = \frac{DF}{AD}$ $EF = \frac{sec\ \alpha\tan b}{sec\ \alpha}$ $\mathbf{EF = tan\ b}$

$\tan\alpha = \frac{DE}{EF}$; $DE = EF\tan\alpha$; $\boldsymbol{DE = tan\ \alpha\tan b}$

$\sec\alpha = \frac{DF}{EF}$ $DF = EFsec\ \alpha$;

$\Delta AFG = \Delta ABF$ FG = AB **AB = AC – BC**

AG = CD + DE BC = EF

$tan(\alpha - b) = \frac{AB}{AG}$ $tan(\alpha - b) = \frac{AC-BC}{CD+DE}$

**6.** $\boldsymbol{tan(\alpha - b) = \frac{tan\ \alpha-\tan b}{1+tan\ \alpha\tan b}}$

## Bibliografía.

Alsina Claudí. (2006). Math made visual. Washington D.C. Mathematical Association of America.

Devlin, Keith. The language of mathematics: making the invisible visible ( 1998). New York. W H. Freeman.. 344p.

Hull, Thomas ( 2006). Project origami. Activities for exploring mathematics.

Lerner Matíz, Jeannette y Gil Congote Lina Marcela.(2006). Metodología del Aprendizaje: Una experiencia analítica en el aula.

Monsalve Posada Orlando. ( 1994). Un paseo fascinante por la tabla de multiplicar. Educación y Pedagogía. Nos 12 – 13, 232 – 260.

Monsalve Posada Orlando. (2000). Una brisa refrescante para la iniciación matemática.

Monsalve Posada Orlando.( 2001). Actividades sobre una hoja de papel. Cuadernos Pedagógicos 16.

Monsalve Posada Orlando y Jaramillo Carlos Mario.( 2003). El placer de doblar papel: mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. Educación y Pedagogía.35, 11 – 24.

Monsalve Posada, Orlando y O. (2006). Diplomado en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia Módulo 4: Pensamiento Espacial ySistemas Geométricos.

Monsalve Posada Orlando.( 2008 ). Monstrations as a complementary concept for visual Thinking: implications in the teaching and learning of elementary geometry. 11 Congress of Mathematical Education.

Monsalve Posada Orlando (2012). XI Encuentro sobre la Enseñanza de las Ciencias. La importancia de la Interdisciplinariedad. La matemática escondida en los objetos cotidianos

Monsalve Posada Orlando (2013). Módulo de Matemática Básica. Formador de Formadores en la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas.

Nelsen, Roger B ( 2000). Proofs without words. Washington. Mathematical Association of America.

Sawyer, W.W. (1964). Vision in Elementary Mathematics.

Sundara Rao, Tandalam. (1966). Geometric exercises in paper folding