

MODELACIÓN DE PARÁMETROS ESTÁTICOS DE VIGAS

Mariam Mederos Madrazo, Otilio B. Mederos Anoceto
 Universidad Autónoma de Coahuila
 mariem.mederos@gmail.com, omederosa@gmail.com

México

Resumen. Se presenta una organización del conocimiento escolar para la modelación de cinco conceptos relativos a vigas y sus relaciones: intensidad de carga, elástica, ángulo de giro, momento flector y fuerza cortante. Se construyó un modelo mediante funciones para cada uno de los cinco conceptos y por medio de operadores diferenciales o integrales para cada una de las relaciones entre ellos, de tal forma que dado un modelo de uno de los conceptos se puede determinar el modelo de otro cualquiera de los cuatro conceptos restantes. En el trabajo se muestra la modelación de las relaciones entre la intensidad de carga y la fuerza cortante y se comentan algunos de los resultados de la aplicación de 10 hojas de trabajo, con el objetivo que los estudiantes de un grupo de una carrera de matemáticas aplicadas participen en los distintos procesos de modelación antes descritos.

Palabras clave: modelación matemática, relaciones entre conceptos

Abstract. It presents an organization of school knowledge for the modeling of five concepts of beams and their relationships: intensity of load, elastic, steering angle, bending moment and shears. Model was constructed using functions for each of the five concepts and through differential or integral operators for each of the relationships between them, so that given a model of one of the concepts can determine the pattern of any other of the remaining four concepts. The paper shows the modeling of the relationship between the intensity of load and shear, and discusses some of the results of the application of 10 worksheets with the aim that students in a group of an applied mathematics career involving in modeling the various processes described above.

Key words: mathematical modeling, relationships between concepts

Introducción

Un modelo matemático es un sistema, (colección de objetos y relaciones matemáticas), que se ha logrado mediante, entre otras, una de las variantes siguientes: 1. Se ha obtenido mentalmente, 2. Se ha realizado en forma material. 3. Se ha expresado verbalmente, visualmente o simbólicamente. 4. Se ha descrito mediante las leyes y principios de una ciencia. El objetivo del modelo es describir objetos, (fenómenos, medios o sistemas), con el fin de ayudar a entender mejor dichos objetos. La modelación es el proceso de construcción de modelos de objetos, Mederos y González (2005).

Tanto en la matemática escolar como en la disciplinar, el conocimiento asume el estatus de herramienta (implícita o explícita) y de objeto Douady (1995). El marco teórico en que se fundamenta el estudio es la dialéctica herramienta-objeto Douady y Parzys (1998), que se refiere al proceso mediante el cual un conocimiento se utiliza al principio como una herramienta implícita para resolver un problema, y después, como un objeto de estudio. Más

tarde, este objeto se aplica como una herramienta explícita para la resolución de otros problemas.

En esta investigación se presentan algunos de los resultados de un grupo de estudiantes de una asignatura optativa del sexto semestre de una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, al participar en la solución de problemas relativos al doble carácter de la resolución de problemas y la modelación:

1. *Los modelos como herramientas para resolver problemas.* Esta relación entre los modelos y los problemas se presenta cuando para resolver un problema se utilizan los tres procesos siguientes: modelación matemática, resolución del modelo y transferencia de resultados matemáticos obtenidos del modelo en información que da solución al problema. En este caso se dice que el modelo es una herramienta para resolver el problema.

2. *Los problemas como herramientas para formar modelos.* Las ecuaciones algebraicas y las diferenciales pueden utilizarse para modelar una clase amplia de problemas de diferentes contextos. Sin embargo, cuando estos objetos se introducen a partir de una definición matemática abstracta, resulta muy difícil para los estudiantes utilizarlas en la modelación de problemas de diferentes áreas.

La utilización de problemas de diferentes áreas del conocimiento humano cuya resolución necesite de modelos matemáticos particulares de un mismo tipo, según nuestra experiencia docente, facilita la participación de los estudiantes en el proceso de formación de un modelo matemático general que incluya en su extensión a esos modelos matemáticos particulares. En este caso los problemas son las herramientas que permiten la construcción del modelo matemático general.

Se restringe este problema a cinco conceptos, que en ingeniería se denominan parámetros estáticos, relativos a vigas de una luz: intensidad de carga, fuerza cortante, momento flector, ángulo de giro y la elástica de la viga.

En las tesis de maestrías escritas por Hernández (2009) y Aradillas (2009), se utilizan problemas para formar modelos mediante ecuaciones cuadráticas, y modelos mediante sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas, respectivamente.

Para ello lo primero que tuvimos que hacer fue crear una organización del conocimiento escolar relativo a los conocimientos del cálculo y de vigas de una luz, que permitiera utilizar la modelación y la resolución de problemas en su doble carácter, pues no existía tal organización. A partir de esta organización del conocimiento se diseñaron y aplicaron 10 hojas de trabajo para el aprendizaje activo, y las orientaciones correspondientes para la mediación de cada

estudiante y del profesor en el aprendizaje de otros. Antes de aplicar las hojas de trabajo, se dedicó una sesión de 55 minutos con los estudiantes para que comprendieran los parámetros estáticos y otros conceptos de ingeniería necesarios. En la sección 3 se presenta un resumen, en forma de conclusiones de los resultados de la participación de los estudiantes en las hojas de trabajo.

Organización del conocimiento

En esta sección, por un problema de espacio, sólo se definen dos de los cinco conceptos estáticos que se estudiaron: la intensidad de carga y la fuerza cortante; y se muestra la solución de uno de los 20 problemas consistentes en la determinación de relaciones entre esos cinco conceptos. Se presentan modelos geométricos y analíticos de estos dos conceptos, y modelos analíticos de sus relaciones.

Definiciones y modelos de dos parámetros estáticos

Definición y modelos de la intensidad de carga. Se llama viga a todo elemento constructivo horizontal cuya longitud es “mucho mayor” que su ancho y su altura, independiente de la forma de su sección transversal recta. En el trabajo se consideran vigas que: 1. Tienen una sección transversal uniforme. 2. El material con que se han construido es homogéneo. 3. El sistema de cargas a las que están sometidas las vigas produce deformaciones pequeñas que una vez que dejan de actuar, las vigas vuelven a su estado inicial sin que existan deformaciones permanentes.

En la figura 1 se muestra un modelo geométrico de una viga horizontal de sección transversal recta y rectangular. *El centroide de una sección transversal de una viga es un punto que define el centro geométrico de la sección.* La línea de puntos que une los centroides de todas las secciones transversales de una viga, en azul en la figura 1, recibe el nombre de eje de simetría.



Si sobre la viga actúan fuerzas en un plano vertical que contiene al eje de simetría, la viga se deforma como se muestra en la figura 2. El eje de simetría deformado se llama curva elástica o simplemente elástica.

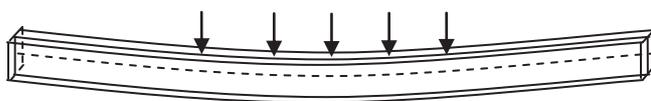


Fig. 2. Modelo geométrico tridimensional de la elástica

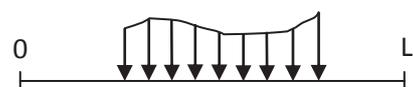


Fig. 3. Modelo bidimensional de una intensidad de carga variable

Hay diferentes formas en las cuales las fuerzas externas pueden ser aplicadas. En este trabajo se consideran sólo las uniformemente distribuidas o las variables sobre toda la viga, o una parte de ella. En todos los casos se expresan mediante su intensidad, (fuerza/longitud). En la figura 3, se modela geoméricamente en dos dimensiones una intensidad de carga y en las figuras 4 y 5 se presentan los modelos en un sistema cartesiano y analítico, respectivamente; considerando que $\ell = |OL|$, $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ell$, q_1 es una función real definida sobre $[0, \ell]$ y $\chi_{[a_1, a_2]}$ es una función característica.

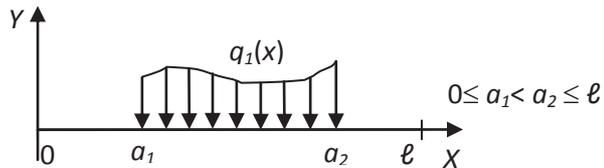


Fig. 4. Modelo de la intensidad de carga en un sistema cartesiano.

$$q: [0, \ell] \longrightarrow R$$

$$x \longrightarrow q(x) = q_1(x) \chi_{[a_1, a_2]}(x)$$

Fig. 5. Modelo analítico de una intensidad de carga.

Definición y modelos de la fuerza cortante. Tomemos dos pedazos de la viga de la figura 1, determinados por las secciones rectas mn , m_1n_1 y m_2n_2 . Si la viga está en equilibrio, entonces las fuerzas internas en la sección mn deben ser tales que equilibren a las fuerzas externas en el pedazo mnn_2m_2 . La resultante V de todas las fuerzas internas que actúan en la sección mn , se denomina *fuerza cortante en la sección mn* . Esta fuerza es numéricamente igual y con sentido contrario a la resultante de las fuerzas exteriores que obran en el pedazo mnn_2m_2 . En las figuras 6 se muestran los modelos geométricos de los dos pedazos, y en las figuras 7 y 8 se presentan los modelos cartesiano y analítico de la fuerza cortante en el pedazo mnn_2m_2 , respectivamente.

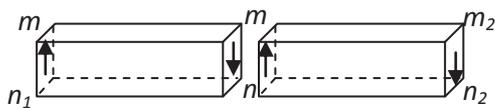


Fig. 6. Modelo geométrico de la fuerza cortante

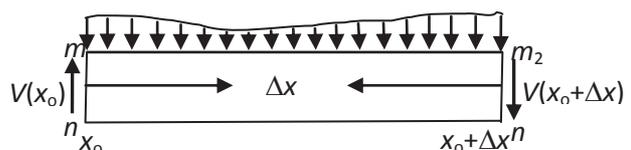


Fig. 7. Modelo cartesiano del pedazo mnn_2m_2 de una viga

$$V: [0, \ell] \longrightarrow R, \quad x \longrightarrow V(x)$$

Fig. 8. Modelo analítico de la fuerza cortante

Modelo de dos relaciones entre la intensidad de carga y la fuerza cortante. En este epígrafe se determinan dos relaciones, cada una de las cuales permite, conocido el modelo analítico de uno de estos conceptos, encontrar el modelo analítico del otro imponiendo ciertas

restricciones al modelo del que se parte. En las figuras 5 y 8 se presentan estos modelos. Se demuestra la relación puntual entre estos modelos siguientes

Proposición 1. Si la intensidad de carga se modela por una función real q definida sobre $[x_0, x_0+\Delta x]$, continua sobre $(x_0, x_0+\Delta x]$ y tal que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} q(x) = \ell_2$; entonces el modelo V de la fuerza cortante es continua a la derecha de x_0 , y la derivada lateral derecha de V en el punto x_0 es numéricamente igual al límite lateral derecho de q en el punto x_0 ; o sea, se cumple que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} V(x) = V(x_0)$ y $V'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} q(x) = \ell_2$. Si q es continua por la izquierda en x_0 , entonces $V'_+(x_0) = q(x_0)$.

Demostración. Supongamos que se tiene una viga en equilibrio cuyo modelo en la recta numérica es $[0, \ell]$. Consideramos un elemento de la viga de longitud Δx , figura 7, determinado por dos secciones adyacentes m_1n_1 y m_2n_2 . Modelamos las secciones m_1n_1 y m_2n_2 por x_0 y $x_0+\Delta x$, donde $x_0 \in [0, \ell]$, $\Delta x > 0$ y $x_0 + \Delta x < \ell$, respectivamente. Consideremos que la intensidad de carga en el intervalo $[x_0, x_0+\Delta x]$ está modelada por una función real q continua sobre $(x_0, x_0+\Delta x]$.

Como la viga está en equilibrio, la suma de las fuerzas verticales, (no obran fuerzas horizontales), que actúan sobre el pedazo $m_1n_1m_2n_2$ de la viga es cero, $\Sigma_y = 0$. Por lo tanto, $V(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} q(t) dt - V(x_0 + \Delta x) = 0$. De donde resulta que $V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} q(t) dt$. Aplicando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, al lado derecho de la igualdad anterior y evitando la discontinuidad de q se puede asegurar que existe un θ_2 , $x_0 < \theta_2 < x_0 + \Delta x$, tal que

$$V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) = q(\theta_2)[(x_0 + \Delta x) - x_0] = q(\theta_2) \cdot \Delta x. \quad (1)$$

De la cadena de igualdades (1) se tiene que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} [V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} [q(\theta_2) \cdot \Delta x] = 0. \quad (2)$$

Indicando la suma $x_0 + \Delta x$ por x , de la cadena de igualdades (2) resulta que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} V(x) = V(x_0). \quad (3)$$

Con la igualdad (3) se prueba que V es continua a la derecha de x_0 . Dividiendo por Δx cada lado de las igualdades de la cadena (1) se obtiene

$$(1/\Delta x) [V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)] = q(\theta_2). \quad (4)$$

Aplicando límite a ambos lados de la ecuación (4) cuando Δx tiende a cero por valores positivos, se concluye que

$$V'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} q(\theta_2) = l_2. \quad (5)$$

Queda así probada la proposición 1. Si q es continua a la derecha de x_0 , entonces $l_2 = q(x_0)$.

Si se considera un elemento de la viga de longitud Δx determinado por dos secciones adyacentes $m_1 n_1$ y mn , que se modelan por $x_0 - \Delta x$ y x_0 , $x_0 \in [0, \ell]$, $\Delta x > 0$ y $x_0 - \Delta x > 0$, respectivamente, y se supone que la intensidad de carga en el intervalo $[x_0 - \Delta x, x_0]$ está modelada por una función real q continua sobre $[x_0 - \Delta x, x_0]$; entonces procediendo como en la proposición 1 se demuestra la proposición que a continuación se enuncia.

Proposición 2. Si la intensidad de carga en el intervalo $[x_0 - \Delta x, x_0]$ está modelada por una función real q continua sobre $[x_0 - \Delta x, x_0]$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} q(x) = \ell_1$; entonces el modelo V de la fuerza cortante es una función continua a la izquierda de x_0 y la derivada lateral izquierda de V en el punto x_0 cumple las igualdades $\lim_{x \rightarrow x_0^-} V(x) = V(x_0)$ y $V'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} q(x) = \ell_1$. Si q es continua por la izquierda en x_0 , entonces $V'_-(x_0) = q(x_0)$.

De las proposiciones 1 y 2 resultan la proposición 3 y relaciones cualitativas y cuantitativas entre los modelos de la carga y la fuerza cortante. Sean $I = [0, \ell]$ y $S, S = \{x_1, \dots, x_n\}$, un subconjunto de I .

Proposición 3. Si q es continua sobre $I \setminus S$ y en cada elemento $x_i, i=1:n$, de S se tiene una discontinuidad evitable o de salto finito tal que $\lim_{x \rightarrow x_i^-} q(x) = l_{i1}$ y $\lim_{x \rightarrow x_i^+} q(x) = l_{i2}$; entonces la función $V: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $x \rightarrow V(x) = \int_0^x q(t) dt$, es continua sobre $[0, \ell]$ y satisface las condiciones $V'(x) = q(x)$ si x es un punto de continuidad o de discontinuidad evitable de q , o las condiciones $V'_-(x) = l_{i1}$ y $V'_+(x) = l_{i2}$ si q tiene en x una discontinuidad de salto finito.

En los materiales escritos con la nueva organización del conocimiento escolar, se denotan por $C(A)$, $D(A)$, $D^{(j)}(A)$ y $C^{(j)}(A)$ las colecciones de las funciones reales continuas, derivables, con derivada de orden j y con derivada de orden j continua, $j = 1:4$, respectivamente, donde A indica un subconjunto de \mathbb{R} . Utilizando la proposición 3 para el caso en que $A = I$ se tienen los resultados siguientes: 1. Si $V \in C^{(1)}(I)$, entonces $q \in C(I)$ y q se obtiene a partir de V por la igualdad $q(x) = V'(x)$. 2. Si $q \in C(I)$, entonces $V \in C^{(1)}(I)$ y conocida q se obtiene V mediante la

relación $V(x) = \int_0^x q(t)dt$. De esta forma quedan modeladas por los operadores de diferenciación D y de integración $\int_0^x dt$, dos relaciones entre las extensiones de los modelos conceptuales de la intensidad de carga y de la fuerza cortante, como se muestran en la figura 9.



Fig. 9. Modelación de relaciones entre conceptos mediante operadores $\int_0^x f(t) dt$ Escriba aquí la ecuación.

Dada la fuerza cortante, mediante el operador D queda determinada unívocamente la intensidad de carga por ser D un operador funcional. Sin embargo, dada una intensidad de carga, la fuerza cortante no se determina unívocamente por el operador $\int_0^x dt$; ya que D no es una función inyectiva. La función q se determina unívocamente si se conoce, además, su valor en un elemento de l .

Sobre los modelos de otras relaciones entre los parámetros estáticos En las hojas de trabajo los estudiantes participaron en la modelación de los 5 parámetros estáticos y en la modelación de las 20 relaciones entre los cinco modelos, (cada modelo conceptual tiene una relación con cada uno de los cuatro modelos restantes). Considerando en el modelo de la figura 7 los momentos flectores $M(x_0)$ y $M(x_0+\Delta x)$ en las secciones mn y m_1n_1 , respectivamente, se tiene que la suma de los momentos con respecto al punto x es cero, $\Sigma M = 0$, por estar la viga en equilibrio. Procediendo de forma similar a como se procedió en la sección 1.1.2 se obtienen entre la fuerza cortante y el momento flector las relaciones: si $q \in C(l)$, entonces $M \in C^2(l)$ y $V = M'$. Si $q \in C(l)$, se prueba que los modelos y de la elástica y θ del ángulo de giro pertenece a $C^4(l)$ y $C^3(l)$, respectivamente, y se tienen las relaciones $\theta = y'$ y $y' = (1/B)M$, donde $B = I_z E$, I_z es el momento de inercia de la sección recta respecto al eje neutro z y E es el módulo de Young.

Una vez obtenidas las 4 relaciones que hemos presentado, los estudiantes fueron guiados para obtener la organizaron significativa del conocimiento que se muestra en el diagrama de la figura 10.

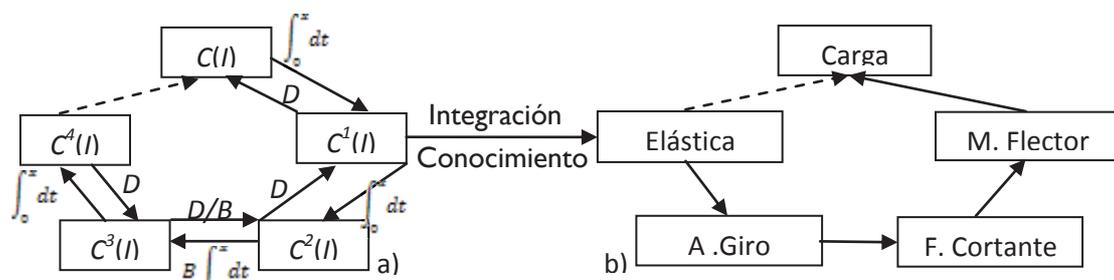


Figura 10. Integración de los conceptos de ingeniería mediante 4 relaciones

a). Posteriormente transfirieron esta organización de los modelos a una organización significativa de los cinco parámetros estáticos, figura 10 b). Componiendo adecuadamente operadores de la figura 10 a) modelaron las veinte relaciones entre los parámetros estáticos.

Características de la asignatura y de los estudiantes

La asignatura “Tópicos Selectos de Análisis Matemático I” de la carrera de Matemáticas Aplicadas de la UAdeC, Coahuila, México, es optativa y se desarrolla en el sexto semestre con una frecuencia de 5 horas semanales. Los 7 alumnos que la cursaron habían aprobado varios cursos de cálculo y de análisis matemático, pero no tenían conocimientos suficientes relativos a los parámetros estáticos, por lo que hubo que dedicar tiempo al desarrollo de estos conocimientos. Mediante hojas de trabajo los estudiantes resolvieron problemas de modelación para cada uno de los cinco parámetros estáticos, utilizando como herramientas modelos mediante funciones particulares. Se aplicaron hojas de trabajo para la formación del concepto de función a partir del análisis de las características de los modelos particulares que dieron solución a los cinco problemas de modelación. En este caso los problemas constituyen herramientas para la formación del concepto de función.

Esta fue la primera vez en que estos estudiantes tuvieron una experiencia de aprendizaje activo mediante hojas de trabajo. No estaba claro para ellos que para lograr la mediación de cada estudiante en el aprendizaje de otros, es necesario una discusión científica lo más profunda posible. Esta fue también la primera vez que los estudiantes utilizaron problemas como herramientas para formar modelos conceptuales mediante funciones y operadores diferenciales e integrales.

Conclusiones

Los estudiantes participaron en la determinación de la solución de un problema de modelación para cada uno de los cinco parámetros estáticos, mediante funciones particulares. Estos cinco problemas fueron utilizados como herramientas para formar el concepto de función real de variable real.

Los estudiantes participaron, además, en la solución de cuatro problemas que se resuelven mediante la derivada como operador. Estos problemas particulares constituyen herramientas para formar el concepto de derivada como un operador que permite encontrar un modelo funcional de un parámetro de la estática a partir de un modelo funcional de otro parámetro de la estática. Por ejemplo, la proposición 3, permite asegurar que si se tiene determinado que el modelo de la fuerza cortante es una función $V: [0, \ell] \rightarrow R$ con derivada continua, entonces el modelo $q: [0, \ell] \rightarrow R$ de la intensidad de carga es una función continua que coincide con la

derivada de V , $q(x) = dV/dx$. Estos cuatro problemas se utilizaron como herramientas para que los estudiantes construyeran el modelo general de la derivada como operador definido por $f \rightarrow g=D(f)$, siguiente:

$$C^{(1)}(I) \xrightarrow{D} C(I).$$

Referencias bibliográficas

- Aradillas, M. (2009). *La resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas de primer grado*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo, México.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 61-96). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Douady, R. & Parzysz, B. (1998). La geometría en el salón de clases. En C. Mammana y V. Villani (Ed.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century*. (pp. 159-192). New York. Kluwer Academic Publishers.
- Hernández, D. (2009). *Diseño de actividades didácticas para facilitar el aprendizaje activo, mediado y significativo de los estudiantes del IDEA en el tema de ecuaciones cuadráticas*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo. México.
- Mederos, O. y González, B. (2005). *La Modelación en la Educación Matemática*. Saltillo: Talleres Gráficos de Salvador Impresor S.A. de C.V.