TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA PARTICIPAR EN EL PROCESO DE ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTOS CONCEPTUALES EN EL TEMA SUCESIONES CON LÍMITE

Elvira Borjón Robles, Otilio B. Mederos Anoceto
Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma de Coahuila México
eborjon@mate.reduaz.mx, omederosa@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presentan los resultados de la aplicación de cinco hojas de trabajo al grupo, de catorce estudiantes, de la Maestría de Matemática Educativa, con perfil profesional, en la asignatura Didáctica de la Matemática de la Universidad Autónoma de Coahuila, México, en el primer semestre de 2010. Los estudiantes al resolver los problemas de la secuencia didáctica de las hojas de trabajo, mediante la construcción de representaciones gráficas y analíticas de distintos tipos de sucesiones, lograron organizar e integrar los conceptos de sucesiones con límite finito y sucesiones acotadas sin límite con las extensiones de otros conceptos subordinados al concepto de sucesión, mediante la construcción de mapas de extensiones, proposiciones y simbólicos.

Palabras clave: sucesión, límite, técnicas, estrategias, aprendizaje

Abstract. This paper presents the results of the implementation of five worksheets to the group of fourteen students Masters in Mathematics Education, with professional profile, in the subject Didactics of mathematics at Autonomous University of Coahuila, Mexico, in the first half of 2010. Students to solve the problems of the didactic sequence of worksheets, through of the construction of graphical and analytical representations of different types of sequence, managed to organize and integrate the concepts of sequence with finite limit and sequences bounded without limit with the extensions of other concepts subordinate to the concept of sequence, through the construction of maps of extensions, propositions and symbolic.

Key words: sequence, limit, techniques, strategies, learning

Introducción

En 2011, Borjón y Mederos presentaron los resultados de la aplicación de herramientas didácticas en un grupo de primer año de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. Las herramientas estaban dirigidas a facilitar la participación de los alumnos en la construcción de representaciones gráficas de sucesiones, sucesiones acotadas superiormente, acotadas inferiormente, acotadas, con el objetivo de determinar las diferencias de sus imágenes y grafos respectivos. Los alumnos fueron guiados para que utilizaran técnicas de organización por medio de mapas de extensiones con el objetivo de promover estrategias de aprendizaje.

Los alumnos, con la ayuda del profesor: 1.Consideraron al conjunto $S(N)$ de las sucesiones reales, como conjunto universo. 2. Comprendieron que los conjuntos $S_s(N)$ y $S_i(N)$ de las sucesiones acotadas superiormente y las acotadas inferiormente, respectivamente, eran subconjunto propios de $S(N)$. 3. Fueron guiados para concluir que el conjunto $S_a(N)$ de las sucesiones acotadas coincidía con el conjunto $S_s(N)\cap S_i(N)$ y que era un subconjunto propio de

$S_s(N)$ y $S_i(N)$. 4. Participaron en el proceso de construcciones sucesivas de mapas de extensiones, hasta construir el mapa de la figura 1.

Herramientas didácticas con similares objetivos de aprendizaje se aplicaron en la asignatura Didáctica de la Matemática, de la Maestría en Matemática Educativa (MME) con perfil profesional de la Universidad Autónoma de Coahuila, México, en el primer semestre de 2010. En esta investigación se presentan los resultados de la aplicación de tres hojas de trabajo para facilitar la participación de los estudiantes de la MME en el proceso de formación del concepto de límite de una sucesión real. En las hojas de trabajo aparecen instrumentos didácticos para que los estudiantes desarrollen estrategias de organización y elaboración mediante la ampliación del mapa de la figura 1 al considerar el conjunto de las sucesiones con límite $S_l\,(N)$; así como por medio de otros tipos de mapas.

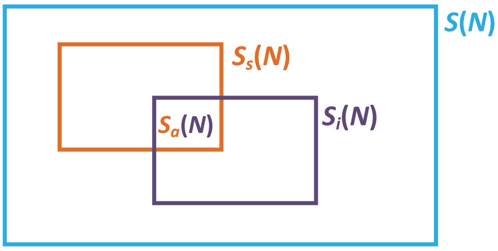

Figura 1. Mapa de las extensiones $S(N)$, $S_s(N)$, $S_s(N)$ y $S(N)$

En Ausubel, Novak y Hanesian se afirma, “Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe, averígüese esto, y enséñese consecuentemente.” (2000, p. 1). Teniendo en cuenta que los estudiantes de la maestría también participaron en la construcción del mapa de la figura 1, conocíamos lo que ya sabían.

En este trabajo los conceptos se consideran como la cuádrupla (E, C, R, S), donde por E se indica la extensión del concepto que es el conjunto de todos los objetos que corresponden al concepto, por C se denota el contenido del concepto que es una colección de propiedades $C = \{p_i,\ i \in I\}$, donde I es un conjunto, que cumplen todos los elementos de E y sólo estos elementos, mediante R se indica la colección de las representaciones de objetos de la extensión y por medio de S se denotan los significados del concepto. Cuando no haya duda se indicará un concepto por E.

El estudio de los conceptos se puede realizar mediante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual. En Martínez (2003) se presenta una propuesta de cómo implementar el proceso de generalización de la adición de números reales, y en una investigación (Mederos y Martínez 2005) se describen tres procesos de formación del concepto de media numérica. En estos trabajos se utilizan diferentes tipos de mapas para determinar la amplitud de la extensión del concepto formado o de las generalizaciones realizadas, las ideas de cómo hacer que los estudiantes participen en la construcción de los mapas se utilizan en nuestra investigación.

Según Beltrán (1998) para que los estudiantes participen en el proceso de adquisición de conocimientos conceptuales es muy importante que desarrollen estrategias de organización y elaboración por medio de mapas conceptuales. Siguiendo estas ideas se utilizaron mapas de extensiones, de proposiciones y simbólicos, por considerarlos más apropiados para los conceptos matemáticos. Para el desarrollo de las estrategias (construcción de los mapas) se utilizaron diferentes registros de representaciones de objetos de las extensiones que intervenían en los mapas, tomando como fundamento los trabajos de (Font, 2002; Godino 2010).

Características del grupo de estudiantes

Trabajamos con un grupo de 14 alumnos de la MME, dos de ellos ingenieros, una arquitecto, cuatro graduados de normal superior y siete graduados de licenciatura en matemáticas aplicadas. Estos alumnos habían aprobado la asignatura "procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje", pero no habían diseñados herramientas didácticas que contribuyeran al desarrollo de estrategias de organización para facilitar el proceso de adquisición de conocimientos.

Objetivos de las hojas de trabajo

Las hojas de trabajo se aplicaron con dos objetivos, el primero relativo a la condición de estudiante de los alumnos y el segundo relativo a su preparación como profesores. Con el primer objetivo se pretendía que los estudiantes utilizaran representaciones gráficas de sucesiones reales convergentes y de sucesiones no convergentes, y que las distinguieran atendiendo a las diferencias de sus imágenes y grafos, para utilizar estas diferencias en la ampliación del mapa de la figura 1. Con el segundo objetivo se pretendía que los estudiantes, después de participar en la solución de todos los problemas de las hojas de trabajo, utilizaran esa experiencia para criticar las orientaciones del profesor referentes al diseño de herramientas didácticas que facilitan la utilización de técnicas de aprendizaje para promover estrategias de organización conducentes a la adquisición de conocimientos. De esta forma llegaron a adquirir una concepción propia para el diseño de este tipo de herramienta didáctica.

Diseño y experimentación

Se diseñaron actividades matemáticas para promover el aprendizaje activo y el aprendizaje mediado. Según Beltrán (1998), para que el aprendizaje ocurra, el estudiante debe hacer algo con el conocimiento que se le presenta, debe manipularlo y construir conocimiento para sí mismo, a este tipo de aprendizaje se le da el calificativo de activo. Cuando los estudiantes comparten lo que conocen sobre un tema para hacer predicciones que son probadas o modificadas a medida que interactúan con el profesor y otros estudiantes, se dice que ha tenido un aprendizaje mediado.

Las hojas se estructuraron de tal manera que se fue abordando el concepto de límite gradualmente. Para ello se planteó un primer problema en el que se pedía a los estudiantes que construyeran la representación gráfica de una sucesión tal que todos los puntos de su grafo, excepto un número finito, estuviesen contenidos en una banda de ancho $(l - 1, l + 1)$, donde por l si indicaba un número real. Se planteó un segundo problema con una exigencia mayor, ya que se requería que todos los puntos de su grafo, excepto un número finito, debían estar en las bandas de ancho $(l - 1, l + 1)$ y $(l - 1/2, l + 1/2)$; y que la cantidad de puntos que no pertenecía a la banda más ancha era menor que la que la cantidad no pertenecía a la banda más estrecha. Se fueron planteando este tipo restricciones incluyendo una banda más de ancho $(l - 1/n, l + 1/n)$, $n = 3,\ldots, 5$.

Posteriormente, se generalizó el procedimiento anterior construyendo para la sucesión de números reales positivos ε, $\varepsilon_1=\varepsilon/2$, $\varepsilon_2=\varepsilon/2^2$, $\varepsilon_3=\varepsilon/2^3,\cdots$ $\varepsilon_m=\varepsilon/2^m$, … dos sucesiones, una de números reales positivos k, k_1, k_2, $k_3,\ldots$, k_m, … y otra de bandas $B_0 = (k, +\infty)\times(l -\varepsilon, l +\varepsilon)$, $B_1=(k_1, +\infty)\times(l -\varepsilon_1, l +\varepsilon_1)$, $B_2=(k_2, +\infty)\times(l -\varepsilon_2, l +\varepsilon_2)$, $B_3=(k_3, +\infty)\times(l -\varepsilon_3, l +\varepsilon_3),\ldots$, $B_m=(k_m, +\infty)\times(l -\varepsilon_m, l +\varepsilon_m)$, … tales que para cada todo $n > k_m$ los elementos (n, x_n) del grafo de la sucesión están en la banda $B_m = (k_m, +\infty)\times(l -\varepsilon, l +\varepsilon)$. En la figura 2, se ilustra geométricamente como se pidió que procedieran los estudiantes.

Finalmente los estudiantes fueron orientados para llegar a los resultados:

1. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite l, $l\in R$, si para todo número real positivo ε existe un número real positivo k_ε, se cumple que todos los elementos (n, x_n)de su grafo, con excepción de un número finito, están en la banda $B_\varepsilon = (k_\varepsilon, +\infty)\times(l -\varepsilon, l +\varepsilon)$.
2. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite l, $l\in R$, si para todo número real positivo ε existe un número real positivo k_ε, tal que para todo $n>k_\varepsilon$ los elementos (n, x_n) del grafo de la sucesión están en la banda $B_\varepsilon = (k_\varepsilon, +\infty)\times(l -\varepsilon, l +\varepsilon)$.

Obtenidos estos resultados se pidió a los estudiantes que en lugar de trabajar con las bandas de la cadena (1), las proyectaran sobre el eje *y*, para modificar los resultados obtenidos al sustituir las bandas por sus proyecciones

$$B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots \supset B_n, \ldots \quad (1)$$

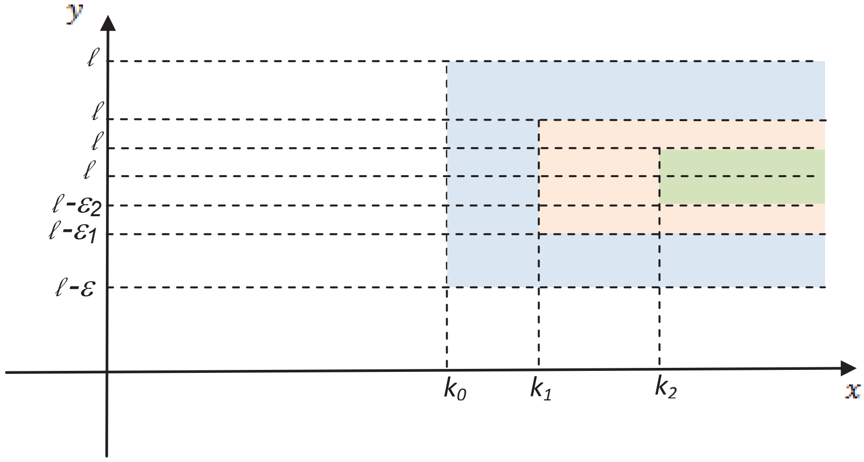

Figura 2. Representación geométrica de las bandas B_0, B_1,…

Los estudiantes en una actividad grupal llegaron a la conclusión que a la sucesión de números reales positivos ε, $\varepsilon_1=\varepsilon/2$, $\varepsilon_2=\varepsilon/2^2$, $\varepsilon_3=\varepsilon/2^3,\cdots$ $\varepsilon_m=\varepsilon/2^m,\ldots$ le corresponden dos sucesiones, una de números reales positivos k, k_1, k_2, $k_3,\ldots$, k_m … y otra de intervalos encajados $I=(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$, $I_1=(l-\varepsilon_1,\ l+\varepsilon_1)$, $I_2=(l-\varepsilon_2,\ l+\varepsilon_2)$, $I_3=(l-\varepsilon_3,\ l+\varepsilon_3),\ldots$, $I_m=(l-\varepsilon_m,\ l+\varepsilon_m)$, … tales que para cada todo $n > k_m$ los términos x_n de la sucesión están en el intervalo $I = (l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$.

No fue difícil que los estudiantes aceptaran las afirmaciones:

1. Una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite *l*, si para todo número real positivo ε se cumple que todos los términos de la sucesión, con excepción de un número finito, están en el intervalo $I_\varepsilon = (l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$.

2. Una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite *l*, si para todo número real positivo ε existe un número real positivo k_ε, tal que para todo $n>k_\varepsilon$ los términos de la sucesión están en el intervalo $I_\varepsilon = (l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$.

Una vez que los estudiantes habían participado en los procesos de formación del concepto de límite y de sucesión con límite, utilizando representaciones gráficas, comprendieron que toda sucesión con límite era una sucesión acotada. Se trabajó con los estudiantes en la construcción de sucesiones acotadas que no tuviesen límite. Basándose en estos resultados se construyó el mapa de extensiones de la figura 3.

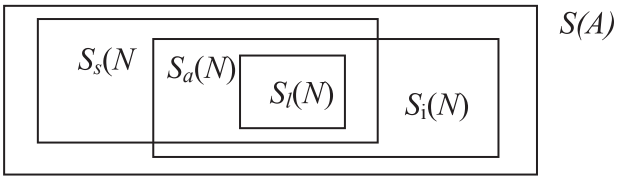

Figura 3. Mapa de las extensiones $S(A)$, $S_l(N)$, $Sa(N)$, $S_s(N)$ y $Si(N)$

1. Toda sucesión con límite es una sucesión acotada.

2. Existen sucesiones que son acotadas y que no tienen límite.

Figura 4. Mapa de proposiciones

El mapa de extensiones de la figura 3 permitió a los estudiantes construir el mapa de proposiciones, cada una de las cuales debían demostrar o refutar afirmaciones como las que que se muestran en la figura 4. Construyeron, además el mapa simbólico de la figura 5, en los que las flechas indican que el conjunto de donde salen está contenido en el conjunto a donde llegan.

Construyeron, además el mapa simbólico de la figura 5, en los que las flechas indican que el conjunto de donde salen está contenido en el conjunto a donde llegan.

$$\begin{tikzcd} & & S_s(N) \arrow[dr] & \\ S_l(N) \arrow[r] & S_a(N) \arrow[ur] \arrow[dr] & & S(A) \\ & & S_i(N) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Son distintos del vacío los conjuntos:

$S_a(N)\backslash S_l(N)$, $S_l(N)\backslash S_a(N)$, $S_i(N)\backslash S_a(N)$ y $S(A)\backslash[S_s(N) \cup S_i(N)]$

Figura 5. Mapa simbólico correspondiente al mapa de la figura 1.

Posteriormente se paso al desarrollo del concepto de sucesión con límite, haciendo un estudio de la adición de sucesiones, por medio de una cadena de problemas. Se comenzó planteando un problema en el que se les pedía a los estudiantes que construyeran dos representaciones gráficas de sucesiones con límites l_1 y l_2, respectivamente. En siguiente problema debían construir la representación gráfica de una sucesión haciendo corresponder a cada punto de su dominio, las sumas de las representaciones gráficas de las secesiones con límite l_l y con límite l_2. Esta nueva representación se definía como la representación de la sucesión suma de las sucesiones sumandos.

En el tercer problema los estudiantes debían hacer una conjetura mediante la cual se relacionara los límites de las tres sucesiones que habían construido. El cuarto problema consistía en demostrar que la sucesión suma de dos sucesiones con límite era una sucesión con límite y que su límite era la suma de los límites de las sucesiones sumandos.

Los estudiantes participaron en la solución de cuatro problemas más, similares a los cuatro descritos en los dos párrafos anteriores, pero ahora dirigidos a demostrar que la sucesión suma de una sucesión con límite y de una sucesión sin límite, era una sucesión sin límite.

El profesor planteo ejemplos de dos pares de sucesiones sin límite tales que la sucesión suma de uno de esos pares tenía límite, y la del otro par no tenía límite.

En la figura 6 se presenta un mapa que muestra los diferentes resultados de sumar sucesiones con límite y sucesiones acotadas sin límite. Las flechas rojas indican que parten de un elemento de $S_l(N)$ y las flechas azules que parten de un elemento de $S_a(N)$. El punto a donde convergen las flechas indica la sucesión suma de las dos sucesiones de donde parten y, además, el conjunto a que pertenece la suma.

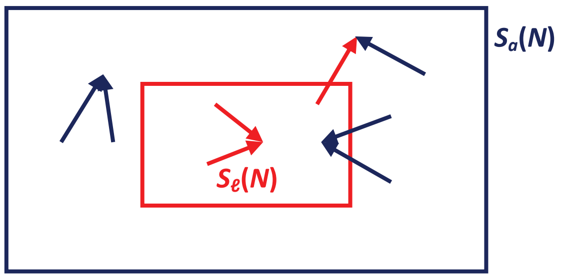

Figura 6. Mapa de la adición de sucesiones con límite y de sucesiones acotadas sin límite

Los estudiantes, en trabajo extra clase hicieron un nuevo diseño de las hojas de trabajo que ellos habían resuelto, teniendo en cuenta, por una parte, las observaciones hechas por el grupo y, por otra, que debían ser aplicadas estudiantes de licenciatura (pregrado) que se enfrentaría por primera vez al concepto de límite de una sucesión.

Conclusiones

Los estudiantes tenían experiencia en pasar de representaciones analíticas de objeto matemático a representaciones gráficas, pero no en el proceso inverso. En muchos casos al trazar la representación gráfica de una sucesión lo hacían considerando primero la representación analítica. Fue muy difícil que entendieran que debían primero considerar un algoritmo de representación gráfica, después utilizar el algoritmo para representarlas gráficamente y finalmente determinar la representación analítica. Por otro lado, para muchos estudiantes representar una sucesión significaba representar su grafo, y unir sus elementos con líneas rectas. Por primera vez comprendieron que el grafo era un subconjunto de $N \times R$. Los estudiantes nunca antes habían determinado características de representaciones gráficas y analíticas de la imagen y el grafo de sucesiones, para establecer relaciones entre las extensiones de diferentes conceptos subordinados al concepto de sucesión. Después que comprendieron que las sucesiones, además de dominio y codominio, tienen imagen y grafo, advirtieron que las representaciones gráfica y analítica de una sucesión requieren de las representaciones de su grafo e imagen. Estos estudiantes no tuvieron dificultad en utilizar los mapas de extensiones, de proposiciones y simbólicos con técnicas para desarrollar estrategias que le permitieran participar el proceso de adquisición de conocimientos. Ya habían aprobado la asignatura técnicas, estrategias y procesos de aprendizaje. Por primera vez, varios de los estudiantes, resolvieron problemas en los que debían plantear una conjetura y después demostrarla o refutarla. Fue muy satisfactoria la experiencia de criticar, y mejorar, las hojas de trabajo después de resolverlas tanto en el aprendizaje de los contenidos, como en el diseño de herramientas didácticas. Además a través de las representaciones analíticas los alumnos tuvieron un primer acercamiento al concepto de límite de una sucesión.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian H. (2000). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Editorial Trillas.

Beltrán, J. (1998). *Psicología Evolutiva y de la educación. Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. España: Editorial síntesis.

Borjón E. y Mederos O. (2011). Técnicas y estrategias para participar en el proceso de adquisición de conocimientos conceptuales en el tema de sucesiones reales. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 283-291.

Font, V. (2002). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques*. Tesis de Doctorado no publicada. Universitat de Barcelona. España.

Godino, J. D. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. Recuperado el 15 de marzo de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Martínez, A. (2003). *Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominio Numérico y Series en la Educación Superior*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

Mederos, O. y Martínez, J. (2005). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. *Números, 62*,53-64.