

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO PROBABILIDAD: UNA PERSPECTIVA DESDE LA TEORÍA APOE

Claudia Vásquez Ortiz, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
cavasque@uc.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. Esta investigación se centra en el estudio del concepto probabilidad, pero fijando la atención en su significado más que en sus cálculos, específicamente en los aspectos cognitivos vinculados a la construcción de dicho concepto en estudiantes universitarios de primer año. Para alcanzar tal objetivo se ha utilizado como referente teórico de la Didáctica de la Matemática —la Teoría APOE— (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) pues ésta hace hincapié en la forma en que se construyen o aprenden conceptos matemáticos, otorgando las herramientas necesarias para indagar en las construcciones mentales que ponen en juego los estudiantes para la construcción del concepto probabilidad desde su dualidad de significados. Bajo esta perspectiva se diseñó y documentó una descomposición genética hipotética del concepto, detectándose de esta forma elementos que no fueron considerados en una primera instancia, lo que nos llevó a reformular dicha descomposición, logrando así una descomposición genética refinada y adecuada del concepto probabilidad.

Palabras clave: teoría APOE, descomposición genética, probabilidad

Abstract. The present research focuses on the concept of probability, fixing its attention on meaning rather than on calculations, specifically in the cognitive aspects related to the construction of this concept in college freshmen. To achieve this objective, the APOS (Actions, Processes, Objects and Schemes) theoretical approach has been used as mathematics education theory framework, because of its emphasis on how mathematical concepts are constructed or learnt. This perspective provides the necessary tools to probe in the mental constructions that students bring into play regarding the construction of probability as concept, emerging from the duality of its meaning. Therefore, through this approach, a hypothetical genetic decomposition of the concept was designed and documented, detecting items that were not considered in the first instance, which led us to reformulate this decomposition, achieving thus a refined and appropriate genetic decomposition of the probability concept.

Key words: APOS theory, genetic decomposition, probability

Antecedentes, problemática de investigación y objetivos

Durante las últimas tres décadas, aproximadamente, los contenidos de estadística y probabilidad han ido cobrando gran relevancia en la formación tanto a nivel profesional como ciudadano, esto debido al desarrollo de la estadística como ciencia y su gran utilidad para la investigación, el desarrollo del pensamiento crítico y la formación de ciudadanos. Razón por la cual se ha optado por incorporar fuertemente el estudio de la estadística y probabilidad en el currículum de matemática tanto a nivel básico, medio y superior, en gran parte de los países desarrollados, trayendo esto como consecuencia el desarrollo de numerosas investigaciones centradas en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad. Si bien el interés por el estudio de probabilidad y los elementos asociados a su aprendizaje no es una inquietud reciente, pues ya en 1951 Piaget e Inhelder se interesaban por estudiar cómo se desarrollan las ideas de azar y probabilidad en los niños, durante las últimas décadas se ha dado un

significativo aumento en el surgimiento y desarrollo de investigaciones relacionadas a la enseñanza de la estadística y probabilidad tanto a nivel escolar como universitario. Dentro de las cuales cabe destacar, dada la problemática y objetivos de esta investigación, las investigaciones realizadas por Batanero, como por ejemplo, aquella vinculada a *los significados de la probabilidad en la educación secundaria* (Batanero, 2005), en la cual se dan a conocer los distintos significados vinculados al concepto probabilidad a lo largo de su desarrollo histórico, significados que de acuerdo con lo planteado por la autora, aun persisten y se utilizan en las prácticas de enseñanza de la probabilidad. “Significados que deben incluirse progresivamente, comenzando desde las ideas intuitivas de los alumnos sobre el azar y la probabilidad, ya que la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto” (Batanero, 2005, p.257).

Es bajo esta perspectiva que nace esta investigación, cuyo principal interés es indagar en cómo estudiantes universitarios de primer año construyen el concepto probabilidad, pero fijando la atención en su significado, más que en sus cálculos.

Comúnmente el concepto probabilidad se asocia con lo incierto, situándola entre lo seguro e imposible, y para aceptar tal incerteza o certeza utilizamos un lenguaje que admite una variedad de términos (posible, chance, previsible, presumible, etc.) de nuestro lenguaje ordinario; y un suceso es cada uno de los resultados posibles de una experiencia aleatoria, pero ¿Cómo saber cuándo un suceso es más probable? ésta no es para nada una pregunta fácil de responder, de hecho ha sido objeto de estudio a lo largo de todo el desarrollo de la probabilidad, siendo objeto de discusión de numerosos personajes, tales como Pascal, Bernoulli, Bayes, Leibniz, Laplace, de Finetti, von Mises, Jaynes, Carnap, Popper y Keynes, entre otros, quienes desde los comienzos de la probabilidad, 1660 aproximadamente, “han visto la necesidad de definir rigurosamente el concepto” (Hacking, 1995, p. 120), el cual se ha visto sujeto a diversas interpretaciones que van desde lo intuitivo hasta lo matemático, predominando entre éstas últimas la interpretación frecuentista de la probabilidad, lo que estaría despojando al concepto de su significado como objeto de enseñanza y aprendizaje. Concepto que de acuerdo con lo planteado por Carranza y Fuentealba (2010) debe ser entendido desde dos dimensiones *una calculatoria y otra semántica*, la primera enfocada a los aspectos que se refieren al valor numérico de una probabilidad, mientras que la segunda se refiere a aquellos aspectos vinculados al significado dado a un cálculo. Además Carranza y Fuentealba (2010) plantea que, a su vez, la dimensión semántica de la probabilidad involucra dos significados para el término probabilidad uno ligado a la estabilización de la frecuencia de

aparición de un fenómeno (*Dimensión frecuentista*) y el otro referido a una medida de certeza de la veracidad de una proposición (*Dimensión bayesiana*).

Es bajo esta mirada dual que hemos realizado la investigación para comprender y analizar desde una postura cognitiva, a través de la teoría APOE: *¿Cómo los estudiantes universitarios de primer año construyen el concepto de probabilidad desde su dimensión semántica?*, para así, por un lado identificar las dificultades presentes en la construcción del concepto probabilidad a partir de su dimensión semántica, en estudiantes universitarios, y por otro identificar y documentar las construcciones mentales que propician la construcción del concepto probabilidad.

Con esta investigación se busca contribuir desde una postura cognitiva a concebir mejor los procesos de construcción del concepto probabilidad en los estudiantes, de modo de contar con antecedentes y fundamentos teóricos que permitan a futuro proponer propuestas de enseñanza que contribuyan a la mejora del tratamiento de la probabilidad en el aula.

Marco teórico

Para dar respuesta a la pregunta antes expuesta y cumplir con los objetivos planteados, nos situamos en la Teoría APOE como referente teórico y metodológico, ya que este lente nos brinda elementos adecuados que permiten describir y analizar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para construir el concepto probabilidad desde su dimensión semántica.

La Teoría APOE fue creada por Ed Dubinsky en 1991 a partir de la epistemología genética de Piaget. El propósito central de esta teoría es *entender cómo las matemáticas se aprenden* para así elaborar un programa educativo que ayude a promover el aprendizaje de éstas. Es por ello, que la Teoría APOE se centra específicamente en la manera en que los estudiantes construyen o aprenden los conceptos matemáticos a partir de sus estructuras matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes, para así ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones mentales necesarias para que dicha evolución se dé, de manera tal de mejorar los procesos de aprendizaje.

Bajo la mirada de la Teoría APOE la construcción del conocimiento matemático se origina por medio de las siguientes tres etapas: acciones, procesos y objetos.

Un estudiante muestra una concepción acción de un determinado concepto matemático si no es capaz de realizar las transformaciones sobre el objeto por sí solo, requiriendo de estímulos o instrucciones externas que le indiquen paso a paso como llevarlas a cabo. En nuestro caso, un estudiante tendrá una concepción acción del concepto probabilidad si, por ejemplo, al

resolver un problema de probabilidad, lo hace siguiendo los pasos de un problema similar, el cual puede incluso haber sido memorizado.

Diremos que un estudiante muestra una concepción proceso de un determinado concepto matemático cuando es capaz de reflexionar sobre el concepto, realizando transformaciones pero sin la necesidad de realizar acciones específicas sobre él, es decir, sin tener que realizar todos sus pasos; lo que se llama interiorizar las acciones en un proceso. En nuestro caso, un estudiante tendrá una concepción proceso del concepto probabilidad de ocurrencia si es capaz de asignar una probabilidad de ocurrencia a un determinado suceso, reflexionando sobre ella, es decir, asignarle un significado a dicho valor.

Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un determinado proceso y piensa en el proceso como un todo relacionado, entonces ha encapsulado tal proceso como un objeto cognitivo. No obstante, “en el curso de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo con el fin de usar sus propiedades al manipularlo” (Dubisnky, 1991, p. 97) En nuestro caso, un estudiante tendrá una concepción objeto del concepto probabilidad si al verse enfrentado a una situación problema, reconoce que ésta se trata de un problema que para su solución necesita del concepto probabilidad, de la selección de métodos apropiados, llegando a establecer relaciones entre procedimientos que le permitan encontrar la solución al problema.

El paso por las etapas de acciones, procesos y objetos no es necesariamente lineal, de hecho un estudiante puede estar en una etapa para ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra para otros. Siendo el mecanismo principal que permite que el estudiante evolucione de un estado de construcción del conocimiento a otro la abstracción reflexiva, puesto que esta es una herramienta mental que permite que el estudiante reflexione sobre sus acciones en un objeto, de modo tal que organice sus conocimientos estableciendo nuevas construcciones mentales que permitan el paso de un estado del conocimiento a otro más elevado. Llegando así a construir el conocimiento matemático como producto de abstracciones reflexivas sucesivas, mediante las cuales logra conformar una colección de acciones, procesos y objetos que llevan a conformar el correspondiente esquema asociado a un objeto matemático. De este modo, se lleva a cabo la construcción del conocimiento matemático por medio de las acciones, procesos, objetos y esquemas.

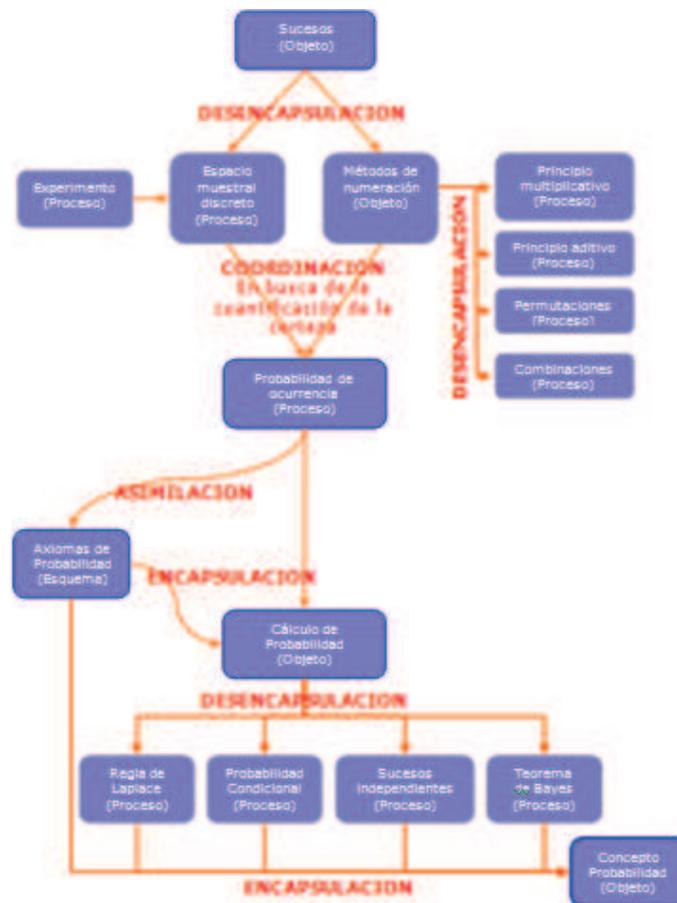
Es importante señalar que la Teoría APOE además de proporcionarnos herramientas para analizar cómo se construye el conocimiento matemático, nos proporciona un ciclo metodológico de investigación, el cual consta de tres etapas: el análisis teórico, el diseño y aplicación de instrumentos y el análisis y verificación de datos.

La aplicación de este ciclo de investigación permite obtener una visión en detalle de la forma en que los estudiantes construyen los conceptos matemáticos, es decir, de sus construcciones y mecanismos mentales.

Metodología

En esta investigación hemos utilizado el ciclo metodológico de APOE, porque nos permite tener una descripción en detalle de la forma en que los estudiantes construyen el concepto probabilidad. Comenzamos realizando un análisis teórico sobre el concepto probabilidad, a partir de un análisis histórico y epistemológico del concepto, junto a la experiencia de los investigadores en el tema; el cual permitió una descripción de las construcciones mentales en torno al concepto, lo que nos llevó a diseñar y proponer una descomposición genética hipotética del concepto probabilidad. En nuestro diseño, algunos de los conceptos relevantes dispuestos en la descomposición genética y que subyacen alrededor del concepto probabilidad son: suceso, experimento, espacio muestral discreto, métodos de numeración, axiomas de probabilidad, regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes.

Figura 1. Descomposición genética hipotética del concepto probabilidad



Mediante la descomposición genética hipotética diseñada, (ver figura 1) describimos de manera explícita las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes podrían estar haciendo para lograr una construcción adecuada del concepto probabilidad, llegando a establecer los posibles caminos a seguir para construir el concepto desde su dimensión semántica, a partir de 4 construcciones fundamentales: objeto suceso, proceso probabilidad de ocurrencia, esquema axiomas de probabilidad y objeto cálculo de probabilidad, las cuales llevarían a la construcción objeto del concepto probabilidad desde su dimensión semántica.

Para cumplir con el objetivo de ésta investigación y documentar la descomposición genética hipotética, se diseñó en base a la descomposición genética hipotética, un cuestionario de 14 preguntas, el cual fue aplicado individualmente a 12 estudiantes universitarios de primer año, que se encuentran cursando la carrera de Licenciatura en Ciencia Estadística en el Instituto de Estadística de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. De este modo, fue posible describir y documentar de manera apropiada las construcciones y mecanismos mentales empleados por los estudiantes en relación al concepto probabilidad desde su dualidad de significados. El análisis de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario se realizó desde la descomposición genética hipotética detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. Es así como a modo de ejemplo podemos citar uno de los argumentos dados como respuesta a la pregunta 4, la cual tenía por objetivo indagar en la concepción de los estudiantes sobre la probabilidad de ocurrencia de un determinado evento o suceso, además de evidenciar la interpretación que otorgan al concepto probabilidad.

Observándose en la mayoría de las argumentaciones que los estudiantes reconocen que para poder asignar una probabilidad de ocurrencia al suceso en cuestión, es necesario contar con más información que ayude a asignar dicha probabilidad, argumentado que no es posible asignar una probabilidad exacta al suceso de que el derrame se pueda controlar (ver figura 2), sino que sólo se puede asignar una probabilidad en base a la opinión personal.

Figura 2. Respuesta a la Pregunta 4 del Estudiante 10

<p>Pregunta 4 Ocurrió un derrame de petróleo. Se pregunta a un científico ambientalista sobre: "¿Cuál es la probabilidad de que este derrame pueda controlarse antes de que cause daño generalizado en las playas cercanas?" ¿Qué piensa usted que puede contestar el científico? ¿Por qué? Explique en detalle.</p>	<p>El científico puede contestar que antes de responder claramente dicha pregunta se debe realizar un estudio tanto para saber la cantidad derramada, el curso y velocidad de las aguas debido al derrame, datos espaciales que provoca dicha situación, etc. No puede responder a buenas y primeras.</p>
--	--

Por lo demás, en la respuesta dada por el estudiante 10 (ver figura 2), quien argumenta que no se puede responder de buenas a primera, es decir, reconoce la necesidad de contar con más información. Con la argumentación dada es posible observar que el estudiante 10 muestra la construcción proceso esperada en la descomposición genética del concepto probabilidad de ocurrencia, así como también la interpretación de la probabilidad desde su dimensión semántica.

Conclusiones

Uno de los principales resultados a partir del análisis de datos se relaciona con la construcción objeto de sucesos, la cual no es alcanzada por los estudiantes, esto ya que ninguno de los estudiantes, a los cuales se aplicó el cuestionario, logro identificar la necesidad de aplicar y relacionar los métodos de numeración, es decir, no lograron coordinar la construcción objeto de los métodos de numeración con la construcción proceso de espacio muestral, construcciones mediante las cuales era posible dar respuesta al problema planteado conjuntamente con la construcción objeto de cálculo de probabilidad, lo cual se observa claramente en las argumentaciones dadas a la pregunta 14 (ver figura 3).

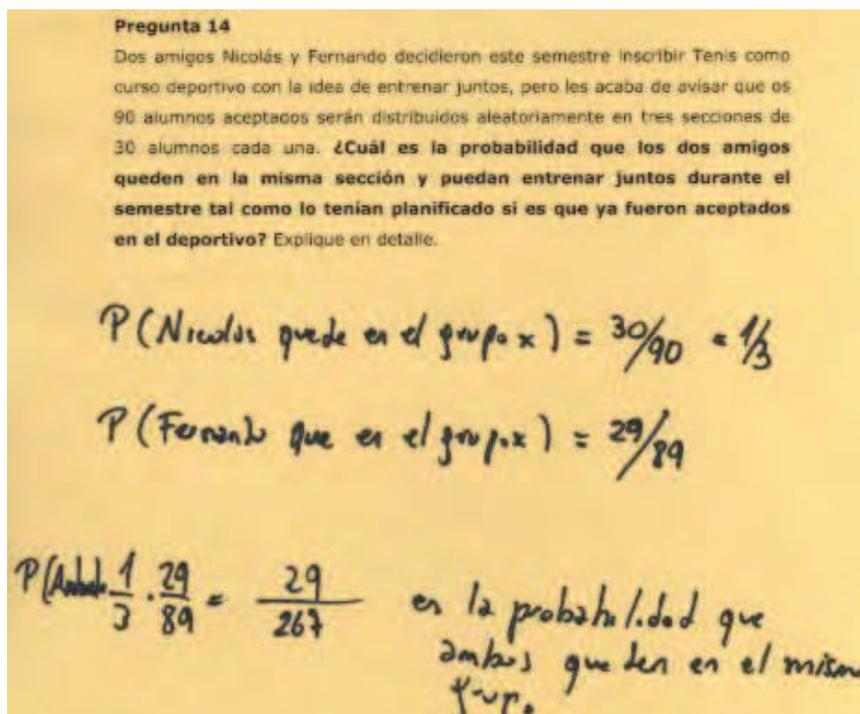


Figura 3. Respuesta a la Pregunta 14 del Estudiante 1

Finalmente, dada la evidencia empírica de la que se dispone, consideramos que la ausencia de esta construcción objeto, se debe a que estos estudiantes carecen de la construcción objeto de los métodos de numeración, lo cual les impide reconocer la necesidad de aplicarlos a una determinada situación, además de la desencapsulación de éstos de acuerdo a lo requerido. A

partir de las respuestas dadas a las distintas preguntas que involucran dicho concepto ha sido posible evidenciar que este grupo de estudiantes muestra una construcción proceso de sucesos, por lo cual es necesario redefinir la descomposición genética en relación a esta construcción, puesto que estos estudiantes logran identificar los sucesos vinculados a una determinada situación reconociendo el espacio muestral sin la necesidad de contar uno a uno, sin embargo no son capaces de desencapsular la construcción objeto de los métodos de numeración en los distintos procesos asociados a ella. No obstante, en base a la evidencia empírica es posible concluir que este grupo muestra tener una construcción objeto del concepto probabilidad, puesto que alcanzan en toda su amplitud las tres construcciones restantes propuestas en la descomposición genética hipotética, mostrando operar con las construcciones y mecanismos mentales descritos en la descomposición genética hipotética, ya que determinan y asignan una determinada probabilidad a sucesos, ya sea en base a creencias y evidencias (dimensión bayesiana) o a las estabilizaciones de frecuencia presentadas (dimensión frecuentista), siendo capaces de reflexionar sobre ellas, asignándoles un significado.

Lo anterior, nos ha permitido analizar el papel que desempeña tanto la dimensión semántica frecuentista como la bayesiana en la construcción del concepto probabilidad, constatando, en base a las respuestas y argumentos dados por este grupo de estudiantes, que existe una predominancia de la dimensión semántica frecuentista por sobre la bayesiana, esto dado que los estudiantes reconocen y argumentan de mejor manera aquellas situaciones bajo un enfoque frecuentista. Mientras que en aquellas situaciones en las cuales es necesario aplicar un enfoque bayesiano logran realizarlo en cierta medida, pero con mayores dificultades, incluso para algunos de estos estudiantes es imposible dar respuesta a ciertas situaciones, en base ya sea a creencias y/o evidencias, argumentando que dado que no se cuenta con datos numéricos o la evidencia cuantitativa suficiente, no es posible dar respuesta a tal situación. Además ha sido posible documentar, en base a los distintos argumentos y respuestas, que la dimensión calculatoria de la probabilidad predomina fuertemente sobre la dimensión semántica de la probabilidad, esto dado que los estudiantes, a los cuales se aplicó el cuestionario, no demuestran tener mayores dificultades para resolver aquellas situaciones en las que sólo se requiere determinar la probabilidad de cierto suceso sin la necesidad de otorgarle un significado, en cambio en aquellas situaciones en las cuales es necesario interpretar la probabilidad asignada, dándole un significado, se muestran confusos e inseguros.

Es importante señalar que, en base a los resultados obtenidos en esta investigación, podemos decir que se cuenta con una descomposición genética documentada, refinada y viable. A partir de la cual es posible, si se quisiera, elaborar propuestas didácticas para la enseñanza y

aprendizaje del concepto probabilidad desde su dimensión semántica, para ser implementadas en estudiantes universitarios de primer año.

Referencias bibliográficas

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(003), 247-263.
- Carranza, P. y Fuentealba, J. (2010). Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 24, 57-68.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.
- Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad*. España: Gedisa.