

## EVOLUCIÓN COGNITIVA DEL CONCEPTO PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Cristóbal Valdivia Sepúlveda, Marcela Parraguez González  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
cristobal.matematico@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Chile

**Resumen.** La investigación se enmarca en el estudio de la construcción del concepto parábola y sus elementos principales, como un lugar geométrico, bajo la mirada de la teoría APOE y los tres niveles de evolución de los esquemas: la tríada Intra, Inter y Trans. La estructura general del estudio está determinada por tres componentes del ciclo de investigación que contempla la teoría APOE. En la segunda de ellas -aspecto empírico-, se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 5 estudiantes de una universidad chilena que entregó datos respecto a las construcciones mentales que ellos realizan en torno a la parábola como lugar geométrico a través de tres métricas distintas: la euclidiana, la del taxista y la del máximo. Algunos hallazgos de nuestra investigación dan información respecto al cambio que se produce en la forma gráfica de la parábola según métricas no usuales y, además, que los elementos de ella permanecen invariantes ante una u otra métrica utilizada.

**Palabras clave:** APOE, parábola, lugar geométrico, evolución

**Abstract.** The research is part of the study of the construction of the concept parabola and its main elements, as a locus, under APOS theory point of view and the three levels of development schemes: the triad Intra, Inter and Trans. The general structure of the study is determined by three components of the research cycle that includes APOS theory. In the second one (empirical aspect), a questionnaire and interviews was designed and administered to 5 students from a Chilean university providing data regarding the mental constructions perform by them about the parabola as a locus through three different metrics: the Euclidean metric, the drivers metric and the maximum metric. Some of our research findings give information about the change that occurs in the graph shape of the parabola as unusual metric, and also that elements of it remain invariant under one or another metric used.,

**Key words:** APOS, parabola, locus, evolution

### Introducción

Actualmente, en la enseñanza superior chilena, existen textos que son utilizados para el estudio del cálculo y la geometría analítica, como por ejemplo, Swokowski y Cole (2011), Stewart, Hernández y Sanmiguel (2007), Larson y Hostetler (2008), donde podemos apreciar que el estudio de la parábola se sitúa en las relaciones que existen entre la ecuación y sus parámetros, y las implicancias que ellas tienen sobre su gráfica. Esto provoca, por una parte, que el concepto se asocie a una determinada curva del plano derivada de la métrica euclidiana (véase figura 1), o a una ecuación cuadrática de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  con  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales; y por otra parte, que se privilegie el uso de fórmulas para calcular los elementos principales que tiene una parábola (directriz foco, vértice y eje de simetría).

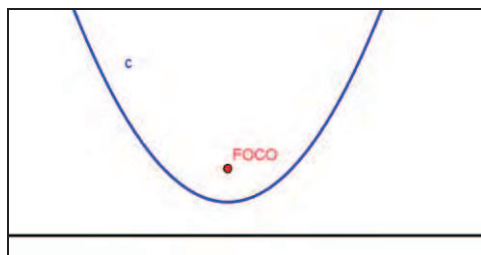


Figura 1. Ejemplo de parábola según métrica euclidiana.

Consideramos que este contexto y tratamiento de la parábola promueve la pérdida de su definición misma como lugar geométrico, y para saberlo investigamos qué sucede con la noción de parábola cuando cambiamos de métrica euclidiana –usual– por las métricas del taxista (Krause, 1986) o la métrica del máximo.

### Marco teórico: Teoría APOE

La investigación se realiza bajo el alero de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), como marco teórico y metodológico. El proceso de investigación bajo esta teoría conlleva el tener en cuenta un modelo cognitivo mediante el cual un aprendiz puede construir el concepto parábola como lugar geométrico, llamado descomposición genética (Dubinsky, 1991), que es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996): análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos. En la descomposición genética que se preparó para la construcción del concepto parábola como lugar geométrico, describimos las construcciones mentales que consideramos prerequisites, las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación) mentales empleados al utilizar la métrica euclidiana, que determinan un camino mediante el cual un aprendiz puede construir de manera adecuada el concepto parábola como objeto. Los niveles de la tríada (Piaget y García, 1989) de la construcción de un esquema, *Intra*, *Inter* y *Trans*, para dos métricas no usuales (la del taxista y la del máximo), darán cuenta de la evolución de dicho concepto, al permitirnos observar cuáles de los elementos que aquí hemos llamado principales: directriz, foco, vértice y eje de simetría de la parábola, permanecen invariantes.

Las tres componentes propuestas por el ciclo de investigación que nos provee la teoría APOE determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de nuestra descomposición genética se diseñó y aplicó individualmente un cuestionario (de 7 preguntas) y entrevistas (de 8 preguntas) a 5 estudiantes de una universidad chilena, que entregaron información respecto a las construcciones que ellos realizaron.

La teoría APOE ha sido utilizada con éxito en diversas investigaciones sobre conceptos matemáticos. Sin embargo, no existe referencia de algún estudio que aborde a la parábola desde su dimensión como lugar geométrico con métricas distintas a la usual. No obstante, encontramos a Pérez y Arrieché (2009) quienes señalan que las dinámicas de aula se basan principalmente en la dimensión algebraica de las secciones cónicas. Por su parte, Marmolejo y su grupo (Marmolejo, Moreno, Hernández y Bahena, 2009) obtienen como conclusión que es necesario acudir a las ideas elementales que conforman la definición de los conceptos matemáticos para la construcción de las cónicas, permitiendo reflexionar sobre el proceso propio de la construcción.

La pregunta que guía nuestra investigación es ¿Cómo construyen los aprendices el concepto de parábola –como lugar geométrico– y sus elementos principales?

Si bien la parábola emerge como una sección cónica, al intersectar un cono circular con un plano, hemos adoptado una noción posterior como lugar geométrico que ha sido aceptada desde el siglo XVIII: “el conjunto de todos los puntos del plano equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz” (Arancibia y Mena, 2007, p.395)

El objetivo principal de este estudio es, en primer lugar, identificar y analizar las construcciones mentales que realizan los aprendices en el proceso de construcción del objeto parábola –como lugar geométrico– y, en segundo lugar, describir su evolución. Para esto último consideramos los tres niveles de evolución de un esquema, junto a dos métricas no euclidianas: la métrica del taxista (Krause, 1986) y la métrica del máximo, las cuales darán luces acerca de cómo se comporta la parábola (y sus elementos principales) y cuáles son los cambios que se evidencian en ellos cuando se están utilizando estas métricas no euclidianas. A partir de ahí determinaremos la evolución del concepto – lugar geométrico de la parábola– al determinar si existen –y cuáles son– los elementos principales de ella que permanecen invariantes bajo el uso de distintas métricas no euclidianas.

### Descomposición genética del concepto parábola como lugar geométrico

La descomposición genética hipotética que presentaremos a continuación (ver figura 2), se obtuvo a partir de nuestra experiencia como docentes de este tema y de una mirada al desarrollo histórico y epistemológico del concepto parábola y de lugar geométrico.

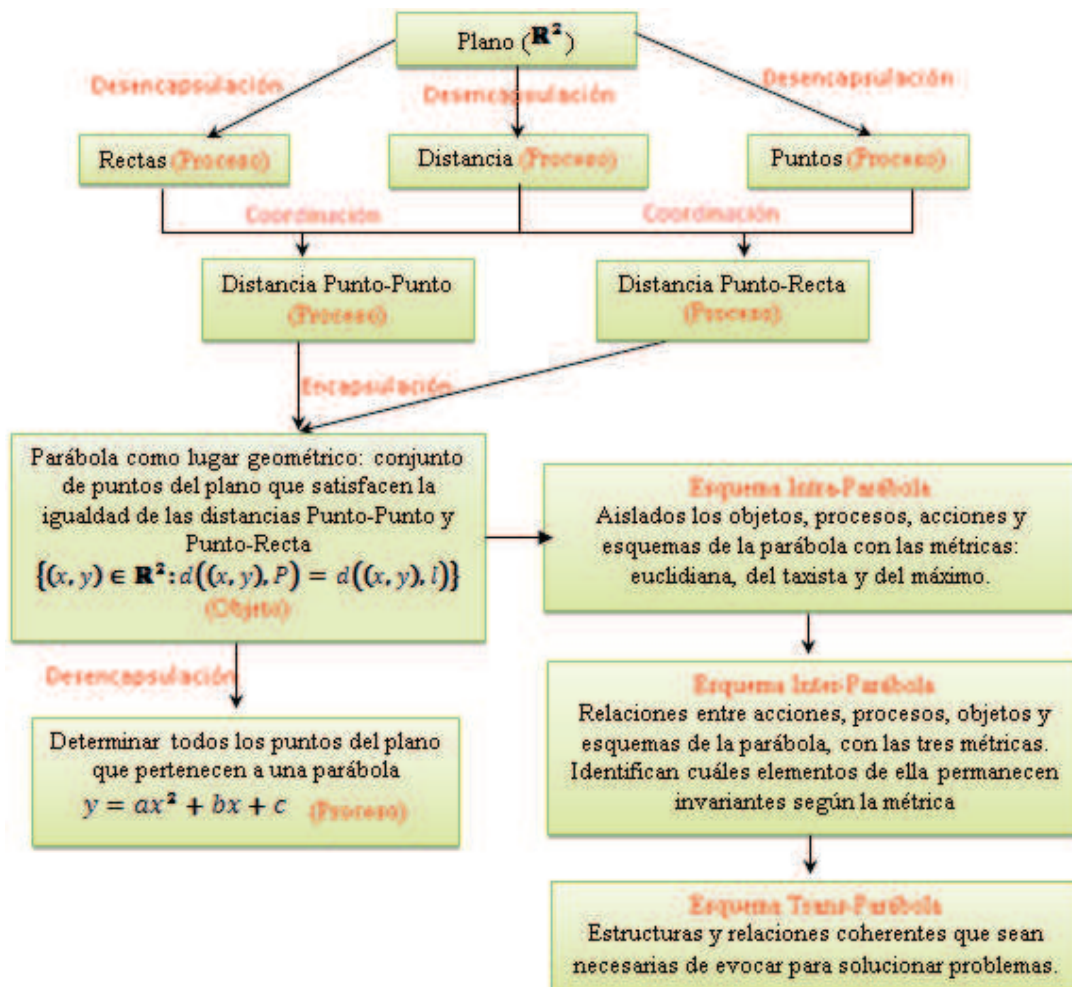


Figura 2. Descomposición genética hipotética del concepto parábola como lugar geométrico y su evolución a través de la tríada.

En la descomposición genética presentada se distinguen cuatro construcciones mentales basales necesarias para construir, de manera adecuada, el objeto parábola como un lugar geométrico: plano, distancia, puntos y rectas. El plano ( $\mathbf{R}^2$ ) como Objeto, se desencapsula en dos Procesos que son prerequisite: distancia Punto-Punto y distancia Punto-Recta, que al coordinarse mediante la igualdad, generan el Objeto de parábola como un conjunto de puntos del plano cuya distancia equidista a un punto fijo ( $P$ ) y a una recta dada ( $l$ ), el cual puede desencapsularse en el Proceso que explicita todos los puntos que pertenecen a él. Este Objeto parábola evoluciona a través de los tres niveles de Esquema: Esquema Intra-Parábola, Esquema Inter-Parábola y Esquema Trans-Parábola.

A continuación, presentaremos algunas de las características más relevantes que conforman los tres niveles del concepto parábola como lugar geométrico y sus elementos principales.

Consideraremos que un aprendiz muestra un nivel de Esquema Intra-Parábola, cuando:

- ❖ Realiza cálculos de distancia Punto-Punto y Punto-Recta, con cualquiera de las métricas.
- ❖ Identifica geoméricamente, la distancia entre dos puntos distintos, con cada una de las métricas.
- ❖ Identifica puntos discretos de algún lugar geométrico de una parábola, sin embargo, no logra generalizar la forma gráfica que ella tendrá, ya sea con la métrica euclidiana, del máximo o del taxista.

Por otra parte, el nivel de Esquema Inter-Parábola está caracterizado por aquellas respuestas y razonamientos que suceden cuando un aprendiz:

- ❖ Interpreta aisladamente los resultados obtenidos de los cálculos distancia Punto-Punto y distancia Punto-Recta, con cualquiera de las tres métricas. Establece, además, relaciones que generan regularidades o propiedades.
- ❖ Identifica puntos discretos de algún lugar geométrico de una parábola y, además, logra generalizar la forma gráfica que ella tendrá. Esto con la métrica euclidiana, del máximo o del taxista.
- ❖ Reconoce aisladamente elementos principales de una parábola: vértice, eje de simetría, directriz y foco, que permanecen invariantes, cualquiera sea la métrica utilizada.

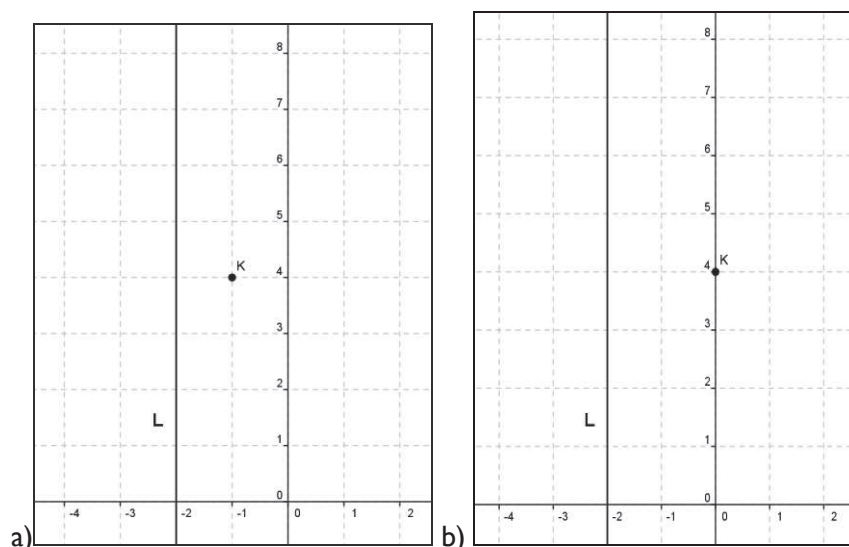
Finalmente, las características que definen el último nivel de Esquema Trans-Parábola, están presentes cuando el aprendiz:

- ❖ Concibe la parábola como un lugar geométrico, que puede estar definido con métricas distintas a la usual (euclidiana).
- ❖ Reconoce la forma geométrica que tiene la distancia Punto-Punto y la distancia Punto-Recta según la métrica euclidiana, del taxista o del máximo.
- ❖ Evoca de manera adecuada las construcciones mentales necesarias dispuestas en su Esquema-Parábola para resolver cualquier situación problema.

### Ejemplo de la entrevista

A modo de ejemplo, hemos decidido presentar las producciones del estudiante I (EI) frente a la pregunta 4 de la entrevista.

Pregunta 4: Observa el siguiente gráfico y determina el conjunto de puntos cuya distancia según la métrica del máximo ( $d_m$ ) al punto K y a la recta L sea la misma. Luego responde para cada uno de los incisos a) y b), ¿Cuál es el lugar geométrico que representa el conjunto de puntos que has encontrado? ¿Por qué?



Para resolver la pregunta, en ambos incisos, la estrategia utilizada por EI fue identificar, primero, el conjunto de puntos del plano que están a distancia –del máximo– uno de la recta, luego buscó cuáles son los puntos que están a distancia uno del punto K (obteniendo una circunferencia con forma cuadrada). Posteriormente intercepta ambos conjuntos y encuentra dos puntos. Luego repite el procedimiento con distintas distancias, tal como aparece en la Figura 3.

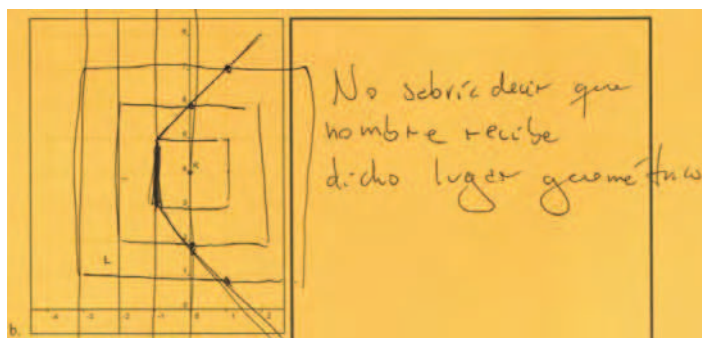


Figura 3. Producciones del estudiante I en la pregunta 4, inciso b) de la entrevista.

De la figura 3 podemos observar que el estudiante EI muestra un nivel de Esquema Inter-Parábola, debido a que logra identificar el conjunto de puntos del plano que satisface la igualdad de distancias (establece relaciones entre las distancias Punto-Punto y Punto-Recta), sin embargo no reconoce que el lugar geométrico es una parábola. Esto lo hemos interpretado a partir de lo que escribe junto a la gráfica “No sabría decir que nombre recibe dicho lugar geométrico”, reflexión que puede haber sido generada por la incongruencia que existe entre la forma geométrica de una parábola con la métrica euclidiana y esta nueva parábola con la métrica del máximo. En particular, consideramos que el estudiante no logró identificar el lugar

geométrico que está en juego, debido a que el vértice no es único –según la apariencia de la gráfica de la figura 3–, y también, por los segmentos rectos que se extiende la parábola.

### A manera de conclusión

El proceso de análisis realizado a partir de los datos obtenidos en la entrevista y el cuestionario, nos ha brindado datos relevantes para documentar el conjunto de construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la descomposición genética del concepto parábola como lugar geométrico (ver figura 2) y, además, su evolución a través de los niveles Esquema Intra-Parábola, Esquema Inter-Parábola y Esquema Trans-Parábola. Ello implicó, entre otras cosas, la puesta en escena de varios elementos matemáticos que debieron enfrentar los estudiantes entrevistados: plano ( $\mathbf{R}^2$ ), puntos, distancia, rectas y lugar geométrico con métricas no usuales. Las relaciones que los 5 informantes establecen entre ellas fueron explicadas a través de construcciones y mecanismos mentales, y el grado de coherencia que ellas tienen de estos elementos, permitió un acercamiento más adecuado para trabajar el concepto parábola con métricas no usuales.

A tal grado es la relevancia de las construcciones mentales presentes en la descomposición genética, que dos –de los cinco– estudiantes no participaron de la entrevista debido a que en las producciones del cuestionario, entregaron evidencia de no tener una concepción proceso de la distancia Punto-Recta, según la métrica euclidiana: *ellos pensaban que la distancia de un punto a una recta no es única, sino por el contrario, la distancia es cualquier segmento de un punto a una recta*. Al no tener una concepción proceso de la distancia Punto-Recta, no lograron construir el objeto parábola como lugar geométrico, elemento basal para poder incorporar – en la entrevista– métricas distintas a la usual y analizar la evolución del concepto en cuestión.

Los resultados que se derivan de esta investigación dan cuenta de los cambios que se producen en la forma geométrica de la parábola, cuando ella es estudiada con métricas distintas a la usual. Se obtuvo, también, que los elementos principales de una parábola permanecen invariantes ante una u otra métrica: existe un único vértice y eje de simetría; el foco y la directriz no varían (figura 4).

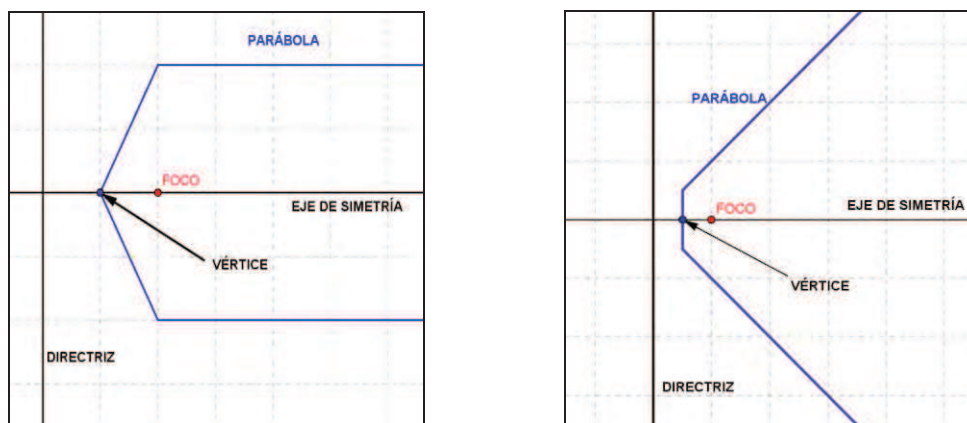


Figura 4. Ejemplo de Parábola y sus elementos principales, según métrica del taxista (figura izquierda), y según métrica del máximo (figura derecha).

Otro resultado de investigación arroja que, en alguna medida, se ha perdido la definición de parábola como un lugar geométrico, y que el concepto queda asociado a una figura geométrica determinada (figura 1) o a una ecuación cuadrática. Esto se puede observar en el ejemplo de la entrevista presentado anteriormente, donde el estudiante E1 puede encontrar el conjunto de puntos solicitado en la pregunta 4 de la entrevista, sin embargo no lo relaciona con el concepto de parábola.

### Referencias bibliográficas

- Arancibia, S. y Mena, J. (2007). *Matemática para Ingeniería. Introducción al Cálculo*. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Shoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) *Research in collegiate mathematics education*. Vol.2. Providence, RI: American Mathematical Society. P.1-32.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*. Pp. 95-123. Dordrecht: Kluwer.
- Stewart, J., Hernández, R. y Sanmiguel, C. (2007). *Introducción al Cálculo*. Buenos Aires, Argentina: Thomson Learning Argentina.
- Krause, E. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York, United States of America: Dover Publications.
- Larson, R. & Hostetler, R. (2008). *Pre-calculus (Seventh Edition)*. Boston, Massachusetts, United States of America: Houghton Mifflin Company.
- Marmolejo, E., Moreno, G., Hernández, S. y Bahena, A. (2009). Construcciones geométricas: De la intuición a la formalización. El caso de las cónicas. *Acta Latinoamericana de*



*Matemática Educativa*, 22, 229 – 237. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf>.

Pérez, Y. y Arrieché, M. (2009). Análisis de un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 525 – 533. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf>

Piaget J. & García R. (1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press. (Original work published 1983).

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Precalculus* (12<sup>a</sup> edición). United States of America: Grupo Cengage Learning.