LA DIFERENCIABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. UNA PROPUESTA DE TRATAMIENTO METODOLÓGICO

Pablo Ignacio Gómez Fuentes, Juan Raúl Delgado Rubí
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría" Cuba
pablog@ind.cujae.edu.cu, rdelgado@ind.cujae.edu.cu

Resumen. La diferenciabilidad de funciones de varias variables y sus relaciones con otras propiedades locales no son tratadas suficientemente en los cursos de Cálculo en carreras de ingeniería. El presente trabajo recoge los resultados del análisis documental, las observaciones realizadas y la metodología empleada, así como una propuesta de tratamiento metodológico de este importante concepto que sistematiza el concepto homónimo en funciones de una variable y la construcción de un sistema de conceptos y métodos propios del estudio de las funciones de varias variables. Se revisó una vasta bibliografía de autores pertenecientes a escuelas diferentes y se clasificaron tendencias.

Palabras clave: cálculo diferencial, funciones de varias variables

Abstract. The differentiability of functions of several variables and their relationships with other local properties are not addressed enough in the Calculus courses in engineering. This paper shows the results of document analysis, observations and the methodology used as well as the proposal of a methodological treatment of this important concept to systematize the concept namesake of one variable functions and the construction of a system of concepts and own methods the study of functions of several variables. We reviewed a vast literature of authors belonging to different schools and trends were classified.

Key words: differential calculus, functions of several variables

Introducción

Desde el inicio mismo del Cálculo Infinitesimal surge el concepto de diferencial, el cual constituye un elemento que permite *linealizar,* aproximar errores y hacer cálculos aproximados empleando las nuevas técnicas y métodos de estas novísimas matemáticas de finales del siglo XVII.

Ya en 1755, en su texto sobre Cálculo Diferencial, Leonhard Euler enuncia claramente la regla para calcular el diferencial de una función de dos variables, en este trabajo el cálculo de las derivadas parciales no era más que un paso intermedio hacia su objetivo principal: el cálculo del diferencial.

Durante el siglo XVIII y principios del XIX la forma de trabajar con los diferenciales de funciones de varias variables continuó siendo la misma utilizada por Euler.

Solo a fines del siglo XIX, cuando aparecen ejemplos de funciones no clasificables entre las que hoy denominamos funciones elementales, se produce un cuestionamiento inevitable a este tratamiento "por separado" de cada una de las variables.

En sus investigaciones en torno a las funciones reales de varias variables, el matemático alemán H. A. Schwartz (1843-1921) propone una función que no es continua en $(0,0)$, pero que posee derivadas parciales en ese punto, cuestión que contrastaba fuertemente con las propiedades conocidas para las funciones de una variable. A él se atribuye también la formalización del teorema de las derivadas mixtas o cruzadas.

Es lógico pensar que si la ciencia matemática tardó centurias para desentrañar las particularidades de un concepto que se muestra esquivo a la comprensión y a su ubicación en un sistema conceptual mayor, el proceso de enseñanza-aprendizaje del mismo se tornará no menos dificultoso.

Los autores de este trabajo, profesores con más de veinte años de experiencia docente en la enseñanza de la Matemática en carreras de ingeniería, tras debates, intercambios de ideas y experiencias con otros colegas, análisis de protocolos de exámenes y de clases e intercambio con sus estudiantes, coincidieron en que era una *necesidad* cambiar el tratamiento metodológico que tradicionalmente se hace en los cursos de Cálculo de varias variables en carreras de ingeniería.

Ante la investigación resurge entonces la antigua dicotomía Análisis Matemático versus Cálculo y el punto de vista de si realmente es necesario que en carreras de ingeniería se profundice y dedique más tiempo que el habitual al estudio de este tema.

Se decidió entonces, tras la *situación problemática* planteada, comenzar revisando lo hecho por otros autores, entre ellos lo plasmado en los más “populares” libros de texto usados en carreras de ingeniería en varios países, aunque sin ánimo de agotar el universo.

En este trabajo no se reporta completamente la investigación y sus resultados, sino una propuesta de tratamiento metodológico del concepto de diferenciabilidad de funciones de varias variables que los autores de la misma, tras su experiencia como docentes y apoyándose en los postulados del enfoque histórico-cultural y en los presupuestos de la denominada Metodología de la Enseñanza de la Matemática en Cuba, actualmente someten a investigación en el aula.

Razones que sustentan la necesidad y la factibilidad de la propuesta

Era importante primero determinar la *necesidad* de concebir un tratamiento metodológico diferente para la diferenciabilidad y además la *posibilidad* de hacerlo.

De dicho análisis resultaron los siguientes argumentos:

- El concepto de diferenciabilidad ocupa el centro del sistema conceptual del Cálculo Diferencial de funciones de varias variables. La inmensa mayoría de las aplicaciones de este cuerpo matemático a problemas de ingeniería son posibles, en virtud de que los procesos y magnitudes se modelan como funciones diferenciables en un punto o en un abierto. Cierto es que en un gran número de casos se satisfacen exigencias mayores, como la existencia de derivadas parciales continuas, pero más allá del carácter suficiente de esta condición, la quintaesencia del problema está en la diferenciabilidad y el comportamiento *cuasilineal* del modelo.
- La posibilidad de hacer un abordaje sistémico de dicho concepto como centro del sistema conceptual principal del Cálculo Diferencial, el cual involucra a los conceptos de límite, continuidad, derivada parcial, derivada direccional y gradiente.
- La posibilidad de promover deliberadamente conflictos cognoscitivos en el estudiante a partir de discutir las limitaciones del concepto de derivada, en tanto está asociado a un análisis direccional y en consecuencia parcializado, del comportamiento local de una función; limitación que no surge en las funciones de una variable y que no revela por tanto la diferencia entre diferenciabilidad y “derivabilidad” o existencia de derivada.
- La posibilidad de reforzar el método de análisis parcial de comportamientos locales en las funciones de varias variables, ya abordado por primera vez en el estudio de los límites de estas funciones, al menos en la práctica áulica de los autores, también débilmente tratado en los cursos tradicionales de Cálculo, en la esperanza de que el estudiante lo incorpore a su pensamiento matemático.
- La posibilidad de contribuir a la formación del pensamiento lógico del estudiante, al desarrollar la habilidad matemática Identificar (Hernández, 1989) y utilizar cadenas de inferencias lógicas, uso de contrarrecíprocos y emplear el lenguaje de *condición suficiente*, *necesaria* y *condición necesaria y suficiente* en las múltiples interrelaciones entre los conceptos del sistema.
- La posibilidad de que los estudiantes enriquezcan sustantivamente las imágenes de los conceptos involucrados en el sistema, más allá del aprendizaje reproductivo de las definiciones de los mismos.

Marco teórico de la investigación y metodología empleada

La investigación se sustenta en los presupuestos del enfoque histórico-cultural (Vigotsky y seguidores) como marco teórico psicológico y dentro de él, en los de la Teoría de la Actividad, cultivada inicialmente en la extinta Unión Soviética (A. Leóntiev y seguidores) y enriquecida, en su aplicación didáctica, en numerosas investigaciones en Cuba, entre ellas las relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior, a saber: Hernández, 1989; Rodríguez, 1991; Fraga, 1991; Martínez, 1993; Calderón, 1996; Delgado, 1999 entre otras, así como en un sinnúmeros de tesis de maestrías.

Han sido tomados en cuenta, entre sus principales presupuestos, los siguientes:

- ❖ la formación de conceptos, la cual no se produce al margen de la actividad del sujeto, sino inmersa en ella, transformándose cualitativamente con ella, enriqueciéndose, adquiriendo significado y sentido, al incluirse en un sistema conceptual y una base de orientación generalizada y completa.
- ❖ la estructuración sistémica de los contenidos de estudio (conceptos, teoremas y procedimientos) en el diseño de las situaciones didácticas, propician la estructuración sistémica del conocimiento subyacente en él.
- ❖ la formación y desarrollo de habilidades generales matemáticas favorece la asimilación de conceptos y de procedimientos generales, característicos de quienes hacen bien las matemáticas.
- ❖ la formación de bases de orientación generalizadas y completas para la ejecución y control de los procedimientos (acciones), entre los que se destaca con especial importancia la identificación de conceptos, es imprescindible para alcanzar elevados niveles de generalización, reflexión y solidez en los conocimientos asimilados.

Puede encontrarse más información sobre estos enfoques teóricos en Hernández, 1998 y en Delgado, 1999 y 2003.

En la propuesta se asumieron los principios didácticos de asequibilidad, de visualización, de sistematización y del carácter científico de la enseñanza, así como las exigencias didácticas en el tratamiento metodológico de los conceptos y sus definiciones que dimanan de esta teoría.

Durante la investigación se empleó el método de análisis documental para diagnosticar el estado (coincidencias, suficiencia y carácter sistémico) del tratamiento metodológico del concepto de diferenciabilidad de funciones de varias variables en prestigiosos autores de libros de textos de Cálculo para ingeniería usados en distintos países.

En la elaboración de la propuesta se utilizaron los métodos teóricos de análisis y síntesis, el método sistémico y de modelación.

La investigación se encuentra en los estadios iniciales, por lo que no se ofrecen resultados de mediciones sobre el efecto causado por la innovación didáctica en el tratamiento de este sistema conceptual.

Propuesta de tratamiento metodológico

El concepto de diferenciabilidad es un concepto científico, en el sentido de Vigotsky y no evoca directamente a ningún concepto espontáneo o cotidiano con el cual el estudiante pueda establecer algún nexo y tratarlo de incorporar a un sistema anterior que posea.

Por otra parte, el concepto de diferenciabilidad de funciones de una variable está débilmente formado en la mayoría de los estudiantes y no es distinguido del concepto de derivabilidad o existencia de derivada.

Por lo anterior y debido a las características de complejidad cognoscitiva del concepto de diferenciabilidad de funciones de varias variables, se decidió utilizar el principio inductivo para la construcción del mismo, o sea de su imagen y de su definición, siguiendo la distinción que hacen acertadamente Tall y Vinner (1981).

1. Para el *aseguramiento del nivel de partida* y poder promover un aprendizaje significativo (en el sentido de Ausubel) del nuevo concepto, se comienza reforzando lo estudiado sobre el concepto de diferenciabilidad de funciones de una variable.

   Se discute en torno a los aspectos más relevante del concepto, a saber:

$$\Delta f(a;\Delta x)=f(a+\Delta x)-f(a)=\underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{parte lineal}\\ \text{respecto a }\Delta x}}+\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\substack{\text{error de}\\ \text{interpolación}}}\quad \text{donde}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta_x)=0$$

$$\Delta f(a;\Delta x)=f(a+\Delta x)-f(a)\approx df(a;\Delta x)$$

La aproximación anterior, desde el punto de vista geométrico, equivale a la sustitución de una "pequeña" porción de la curva $y = f(x)$, en torno al punto a, por una porción de su recta tangente en dicho punto $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

2. Para inducir al nuevo concepto, se provoca la idea de la *extensión del concepto* de diferenciabilidad de funciones de una variable al de varias variables, lo que parece natural, y "descubrir" así sus limitaciones a través de ejemplos apropiados.

a) La discusión se enfoca desde un *acercamiento geométrico*, para tributar a formar la imagen del concepto a partir del principio de visualización.

b) Se presentan ejemplos que comienzan a revelar las *limitaciones* de los conceptos de derivadas de las funciones de varias variables, a saber:

Ejemplo 1:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

f es continua en (0,0) y las derivadas parciales existen en (0,0) y ambas, incluso, tienen valor 0.

Sin embargo, en una vecindad de (0,0) la función no es "aproximable" por el plano $z = 0$, o sea, la superficie $z=f(x, y)$ no posee plano tangente en el punto.

Ejemplo 2:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Esta función posee en (0,0) derivada direccional en cualquier dirección $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$, sin embargo, f no es continua en (0,0).

Con lo que se concluye que los conceptos de derivada parcial y de derivada direccional son limitados si se desea hacer un estudio más completo del comportamiento local de la función.

El estudiante debe percatarse de la ruptura entre ambos comportamientos, lo cual permitiría la motivación por formular la definición de un concepto que supere las limitaciones de las derivadas. Tal concepto es el de diferenciabilidad de una función en un punto.

c) Introducción de una definición de *diferenciabilidad en un punto* que abarque tanto el caso de funciones reales de una como de varias variables, por analogía con la definición estudiada para funciones de una variable. Esto tributa a la sistematización del concepto y a su generalización.

   Se discute en torno a la nueva definición:

   - lo común entre los conceptos homónimos de funciones de una y de varias variables,
   - la dificultad que se introduce con el cálculo del límite del error relativo de interpolación lineal, para probar que es un infinitesimal.
   - la independencia de este concepto de la norma que se esté utilizando en el dominio de la función.
   - la extensión de la definición a puntos de la frontera del dominio.

d) Introducción de la definición de *diferenciabilidad en un conjunto* de funciones de varias variables.

e) *Construcción del sistema conceptual* en torno al concepto de diferenciabilidad.

   Las *condiciones necesarias.*

   Se introducen las relaciones del nuevo concepto con los demás conceptos estudiados y con ello comienzan a establecerse las condiciones necesarias de diferenciabilidad.

A saber, las relaciones: *diferenciabilidad→continuidad* y *diferenciabilidad→existencia de derivadas* (parciales y direccionales)

Relación diferenciabilidad→continuidad

Se discute en torno a que:

1. El recíproco del teorema no es cierto, al igual que sucede en el caso de las funciones de una variable.
2. Se recuerda el contraejemplo de la función *f*(*x*)=|*x*|, en el caso de las funciones de una variable. Por analogía surge la idea de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, que es un caso particular de la más general $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$. La imagen geométrica del punto anguloso contribuye a pensar en la no suavidad de la superficie y por ende la no diferenciabilidad de la función, a pesar de su continuidad.
3. Se enfatiza en la relación *no continuidad→no diferenciabilidad* y lo necesario del trabajo con el contrarrecíproco del teorema.

Relación diferenciabilidad→existencia de derivadas (parciales y direccionales)

Se puede utilizar nuevamente la propia función del ejemplo1, en la cual se tiene que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ y sin embargo *f* no es diferenciable en (0,0).

Esto significa que en ocasiones pudiéramos plantear la combinación lineal de las derivadas parciales y los incrementos de las variables independientes y a dicha expresión no la podríamos identificar con el diferencial de la función ya que la misma no es diferenciable en el punto.

Las condiciones suficientes

Se introduce la condición de suficiencia que exige la existencia de las funciones derivadas parciales en un entorno rectangular del punto y su continuidad en el propio punto. Se discute en torno a que aunque en el teorema se hace referencia a una región o entorno rectangular, el punto siempre estará contenido en un conjunto abierto.

Se presentan y resuelven ejemplos en que está presente la condición suficiente.

No deben faltar ejemplos en que se satisfagan las condiciones necesarias, pero no las premisas de la condición suficiente. Un caso tal es el siguiente:

Ejemplo 3:

$$f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función es continua, posee derivadas direccionales en la dirección de cualquier vector del plano en el punto (0,0) y en particular las dos derivadas parciales las cuales existen y son iguales a cero en (0,0). Se cumplen todas las condiciones necesarias estudiadas.

Adicionalmente, las funciones derivadas parciales son continuas en cualquier vecindad reducida del punto (0,0), pero al menos $f_x(x, y)$ no es continua en (0,0), pues no posee límite en (0,0). Pero el hecho de que la función $f_x(x, y)$ no sea continua en el punto, no implica que la función $f(x, y)$ no sea diferenciable, pues esa condición es solamente suficiente.

En este caso, la función $f_y(x, y)$, es continua en (0,0), pero en virtud del teorema estudiado nada se puede concluir. Debe recurrirse a la definición de diferenciabilidad de la función, lo cual entraña una mayor dificultad. Al recurrirse a ella, se demuestra que:

$$\lim_{\Delta\bar{x}\to\bar{0}} \frac{\varphi(\Delta\bar{x})}{\|\Delta\bar{x}\|} = 0$$

y por tanto f es diferenciable en (0,0).

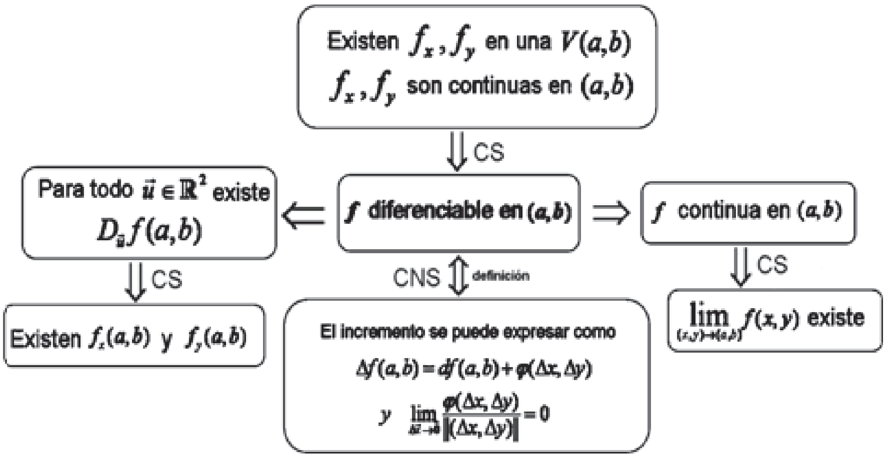
Cuando en la investigación se llegó a este punto, existió el cuestionamiento de si se estaba obligado a utilizar como única condición suficiente la que da el teorema anterior que es bastante restrictiva y se decidió hacer una revisión bibliográfica para conocer de los enfoques de diferentes escuelas, obteniéndose el siguiente resultado:

- El grupo más numeroso de autores, entre los textos revisados, abogan por la exigencia de que: *"las derivadas parciales existan en una vecindad del punto y que sean continuas en el punto"*. A este grupo pertenecen los representantes de la "escuela soviética" L.D. Kudriávtsev (1983), la cuarteta Krasnov, Kiseliov, Makarenko, y Shikin (1990) y el dúo Illín y Pozniak (1991). También están en este grupo los cubanos Rodríguez, García y Echevarría (1985) y autores de la "escuela norteamericana" como Swokowsky (1989) y Stewart (2002).
- El grupo que exige que: *"las derivadas parciales existan y sean continuas en toda la vecindad del punto"*. A este grupo pertenece Fernández Muñiz (Fernández y De la Torre, 1983,1984). También se pueden considerar a los autores Fraguela (1987) y el dúo Kolmogórov y Fomín, que abordan la relación entre los conceptos (más generales) de diferencial débil y diferencial fuerte en Análisis Funcional.
- El grupo que exige que: *"las derivadas parciales existan y sean continuas en el punto"*. A este grupo pertenecen Apostol (1973) y el binomio soviético Bugrov y Nikolski 1985).

❖ El grupo que exige que: *"las derivadas parciales existan en el punto y que una de ellas exista en la vecindad y sea continua en el punto"*. Con estas características solo se encontró el teorema dado por Pastor, Calleja y Trejo en su Análisis Matemático (1963, Vol. II. 131-132).

Si se hubiera seguido este último y menos exigente teorema, se hubiera podido afirmar, sin tener que utilizar la definición de diferenciabilidad, que la función del ejemplo 3 era diferenciable en (0,0).

Como parte del tratamiento metodológico y en la medida que se van abordando los distintos teoremas que refrendan esas relaciones, se exhorta a los estudiantes a construir el siguiente esquema (u otro similar) de inferencias lógicas que sirve de mapa conceptual del sistema de conceptos asociados.



Esquema: Relaciones de la diferenciabilidad y otras propiedades locales.

El recorrido de este esquema debe reforzar la idea de que: moviéndose a favor de las flechas (condicionales lógicas) se puede realizar una afirmación que enlaza los conceptos asociados, y en consecuencia, resulta una cadena de inferencias lógicas, pues se establecen condiciones suficientes de existencia y, moviéndose en contra de las flechas, se utilizan los contrarrecíprocos de dichos teoremas y se niega la existencia debido al incumplimiento de condiciones necesarias.

Los esquemas construidos por los estudiantes se contrastan y perfeccionan, hasta consensuar uno similar al anterior. El trabajo con el mismo se realiza a través de un sistema de ejercicios con funciones que aborden todas las situaciones teóricamente posibles. Las mediciones preliminares sobre el aprendizaje del concepto de diferenciabilidad apuntan a que existe en los estudiantes una mejor apropiación de este concepto, no quedándose en la mera reproducción de la definición, sino en la conformación de una imagen del concepto cada vez más completa y estructurada.

Un análisis más detallado del tratamiento metodológico seguido, del desarrollo de ejemplos y recomendaciones a profesores, puede encontrarse en un reciente trabajo de los autores (Gómez y Delgado, 2010) con motivo de la capacitación y actualización de docentes.

Conclusiones

De manera sumaria se expresan las siguientes conclusiones:

El tratamiento metodológico de este concepto, más allá de dirigirse al logro de fines utilitarios, debe enfocarse hacia la formación de un sistema conceptual bastante complejo y rico, donde aparecen rupturas con conceptos anteriores y el empleo de métodos de estudio nuevos para el estudiante (el análisis parcial, por ejemplo) no presentes en asignaturas anteriores, persiguiendo el logro de fines educativos desde el punto de vista del pensamiento matemático.

Lo reportado en este artículo son los primeros avances de una investigación, que explora diferentes maneras para el tratamiento metodológico de este y otros conceptos relacionados y se propone indagar por qué existe una dispersión tan grande en la preferencia de diferentes autores por uno u otro criterio de suficiencia.

Referencias bibliográficas

Apostol, T. (1973). *Calculus*. Barcelona: Editorial Reverté.

Bugrov, Y. & Nikolski, S. (1985). *Matemáticas Superiores*. Moscú: Editorial Mir.

Calderón, R. (1996). *La enseñanza del Cálculo Integral. Una alternativa basada en el enfoque histórico-cultural y de la actividad*. Tesis de Doctorado no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Delgado, J.R. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas. Dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. Tesis de Doctorado no publicada, CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Delgado, J.R. (2003). La enseñanza de la matemática desde una óptica vigotskiana. En J. Delgado (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16 (3),* 34-46. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fernández, J. y De la Torre, G. (1983). *Análisis Matemático III.* La Habana: Pueblo y Educación.

Fernández, J. y De la Torre, G. (1984) *Análisis Matemático IV.* La Habana: Pueblo y Educación.

Fraga, R. (1991). *La sistematización de la Trigonometría en el nivel medio superior en relación con las exigencias del nivel superior*. Tesis Doctoral no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Fraguela, A. (1987). *Análisis Matemático en espacios métricos*. La Habana: Pueblo y Educación.

Gómez, P. y Delgado, J.R. (2010). *Guía de Estudio de Complementos de Cálculo Diferencial de funciones de varias variables*. La Habana: CREA-Cujae.

Hernández, H. (1989). *El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior cubana. Experiencia en el Algebra Lineal*. Tesis Doctoral no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Hernández, H. (1998). Hacia la calidad. En C. Bixio (Ed.) *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en la Educación Polimodal y Superior.* Serie Educación. (pp.54-64). Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Illín, V. y Pozniak, E. (1991). Fundamentos del Análisis Matemático. Tomo 2.Moscú: Progreso.

Kolmogórov, A.N. y Fomín, S.V. (1975). *Elementos de la teoría de las funciones y del análisis funcional*. Moscú: Editorial MIR.

Krasnov, M., Kiseliov, A., Makarenko, G. y Shikin, E. (1990). *Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros*. Tomo 1. Capítulo XI. Epígrafe 2. pp:615-616. Moscú: Editorial MIR.

Kudriátsev, L.D. (1983). *Curso de Análisis Matemático.* Tomos I y II. Moscú: Editorial Mir.

Larson, R.E., Hosttler, R. y Edwards, B. (1996). *Cálculo*. Volumen 2, pp.1036-1056. Quinta Edición. San Juan: McGraw-Hill.

Martínez. F. (1993). *Una variante de Sistema Didáctico para la enseñanza del Cálculo Diferencial*. Tesis de Doctorado no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Pastor, J. R., Calleja, P. P. y Trejo, C.A. (1963). *Análisis Matemático*. Tomo 2, La Habana: Editorial Revolucionaria.

Rodríguez, R., García, J. y Echevarría, P. (1985). *Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables*. Tomos I. La Habana: Pueblo y Educación.

Rodríguez, T. (1991). *Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática Superior*. Tesis Doctoral no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. BA: International Thomson Editors.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12(2).* 151-169.