

DINÁMICA DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Mailyndana Álvarez Caneda, Isabel Alonso Berenguer, Alexander Gorina Sánchez
Universidad de Oriente
ialonso@csd.uo.edu.cu, gorina@contre.sum.uo.edu.cu

Cuba

Resumen. El artículo discute una estrategia didáctica, encaminada a orientar a los profesores hacia la organización y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. El énfasis de dicha estrategia está en la formación de habilidades que permitan potenciar el razonamiento inductivo en los estudiantes. La misma toma como base a la modelación de la dinámica del razonamiento inductivo, la que se sustenta en los procesos de orientación inductiva y sistematización inductiva, que se desarrollan en estrecha relación y contienen al razonamiento deductivo.

Palabras clave: razonamiento inductivo, resolución de problemas matemáticos

Abstract. The article discusses a didactic strategy, directed to orient the professors toward the organization and development of the teaching-learning process of the resolution of mathematical problems. The emphasis of this strategy is in the formation of abilities that allow powering the inductive reasoning in the students. This strategy takes as a base the modeling of the dynamics of the inductive reasoning, that is sustained in the processes of inductive orientation and inductive systematization that are developed in close relationship and that contain the deductive reasoning.

Key words: reasoning inductive, resolution of mathematical problems

Introducción

A pesar de la importancia que se le ha concedido a la Matemática en diferentes épocas, el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia ha mostrado numerosas insuficiencias y obstáculos, muchos de los cuales no han sido solucionados aún en la actualidad, lo que ha hecho que se mantengan en desarrollo numerosas investigaciones dirigidas a la obtención de resultados que influyan significativamente en el mejoramiento de dicho proceso.

La presente investigación es una de ellas, la que se inició con la realización de un diagnóstico elaborado sobre la base de entrevistas a profesores del Departamento de Matemática de la Universidad de Oriente, encuestas a estudiantes del primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática de dicha universidad y a profesores de Matemática de la enseñanza preuniversitaria. También se observó la ejecución de un examen oral y el desarrollo de 9 clases en la mencionada carrera. Este diagnóstico comprendió los años 2004 al 2009.

El análisis de los resultados obtenidos con la aplicación de los mencionados medios de diagnóstico permitió constatar la existencia de insuficientes actividades docentes que promovieran la reflexión y la aplicación de los contenidos matemáticos a la solución de situaciones concretas, de manera que se facilitase la apropiación de patrones de solución y la construcción del conocimiento. También se constató un bajo aprovechamiento docente y el

prevalimiento de un aprendizaje reproductivo. De las citadas insuficiencias emergió como problema científico de la investigación: insuficiencias en el proceso de apropiación y aplicación práctica de los contenidos matemáticos.

Al profundizar en el diagnóstico, en busca de posibles causas del problema, se pudo observar que se evidencia una inadecuada concepción de las aplicaciones de los contenidos, al contemplar sólo aquellas que requieren del empleo de habilidades algorítmicas para su desarrollo; así mismo, se manifiesta un insuficiente trabajo de análisis de los problemas matemáticos, lo que no facilita que el estudiante se apropie de las componentes de los mismos (objetos, características y relaciones) y de su estructura (condiciones y exigencias) con lo que ampliaría la comprensión de estos. Por último, se comprobó que no se trabaja suficientemente por lograr una apropiación de estrategias heurísticas y metacognitivas que permitan la aplicación del contenido matemático a la solución de problemas.

Todas estas causas indican un insuficiente trabajo de selección de situaciones adecuadas para desarrollar las aplicaciones del contenido matemático, así como un limitado desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas y estratégicas para la aplicación exitosa de dichos contenidos. De ahí que, para dar respuesta al problema anteriormente formulado, se tomase como objeto de la investigación el proceso de resolución de problemas matemáticos y como campo de acción la dinámica del razonamiento inductivo en dicho proceso.

A partir de este diseño investigativo y considerando como referentes teóricos los resultados de los trabajos Polya (1966, 1990), Schoenfeld (1985), Rizo y Campistrous (1999), Alonso (2001), Alonso y González (2003) y Álvarez (2010), se modeló la dinámica del razonamiento inductivo en el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Modelación didáctica de la dinámica del proceso de razonamiento inductivo

La dinámica modelada, que se representa de manera sintética en la Figura 1, se inicia con la *comprensión del problema matemático*, la que consiste en un proceso interno de valoración, análisis y apropiación de la estructura de dicho problema, en aras de lograr una orientación en la búsqueda de una vía adecuada de solución para el mismo, lo que dependerá de los recursos cognitivos y afectivos del resolutor.

La persona que aborda un problema comienza por valorarlo, consciente o inconscientemente, para lo cual tendrá que activar conocimientos, habilidades y valores. Cuando el resultado de la valoración es positivo, a los efectos de la actividad resolutoria, comienza el análisis consciente del problema para lograr una representación interna de los objetos que intervienen en el

mismo, de la lógica de sus relaciones, nexos y cualidades, de manera que se generen esquemas virtuales de solución.

Dicha representación interna se constituye en una comprensión inicial del problema que se aborda y requerirá de la descomposición y comparación de los elementos del mismo (objetos, características y relaciones) y de la identificación, abstracción e integración de los que se seleccionen como relevantes, todo lo cual se realizará sobre la base del desarrollo de un proceso lógico de análisis, síntesis y generalización (Alonso, 2001).



Figura 1: Modelo didáctico de la dinámica del proceso de razonamiento inductivo.

A partir de la comprensión del problema el pensamiento comienza a moverse con un propósito definido, generando un proceso de exploración. Esta exploración deberá estar sustentada en estrategias para la búsqueda de una vía de solución, dando lugar a una *exploración estratégica*, la que va formando un proceso cíclico, que una y otra vez regresa a las condiciones del problema para enriquecer la comprensión que se tiene del mismo, en aras de determinar posibles vías de solución (Polya, 1966). Así la *comprensión del problema matemático* condiciona el tipo de *exploración estratégica* que se llevará a cabo y viceversa.

La relación entre la *comprensión del problema matemático* y la *exploración estratégica* conduce a una *conjetura matemática*, proceso que consiste en la construcción de una hipótesis basada en el razonamiento realizado. De esta relación pueden surgir numerosas conjeturas, la mayoría de las cuales podrán ser falsas y habrá que modificarlas tan pronto como acudan a la mente del resolutor, pero formarán parte del proceso mismo de razonamiento que se aplica al intentar encontrar la vía de solución de un problema.

Justamente, la *conjetura matemática* es una idea hipotética que se obtiene a partir del enriquecimiento y perfeccionamiento de la *comprensión del problema matemático* sobre la base

de los conocimientos y experiencias que posee el individuo. De manera que el conjeturar expresa la capacidad de obtener una idea de forma hipotética, a través de un proceso exploratorio en el que el resolutor aplica sus recursos cognitivos, meta-cognitivos y su capacidad de expresarse de forma fluida, original y flexible, motivado por el interés de resolver el problema matemático que tiene ante sí.

Así las relaciones anteriormente explicadas conducen a una *orientación inductiva*, la que expresa el proceso de búsqueda de una vía de solución para el problema matemático bajo estudio, a partir de la activación de recursos intelectuales que permitan comprender el mismo acudiendo a una sistemática *exploración estratégica*, desde la aplicación de destrezas heurísticas y meta-cognitivas que lleven a la formación de una conjetura matemática.

Ahora bien, la *conjeturación matemática* es también potenciada desde la *investigación validativa* (Álvarez, 2010), que es la configuración de la dinámica del proceso de razonamiento inductivo que se constituye en proceso de verificación de la conjetura obtenida, a partir de su comprobación en nuevos casos, lo cual le dará mayor credibilidad y la convertirá finalmente en la conjetura a demostrar.

La *investigación validativa* de la conjetura matemática resulta muy útil en el sentido de que una cuidadosa observación de los casos que refuerzan dicha conjetura y le proporcionan más crédito, se constituyen a su vez en fundamentos necesarios para la comprobación de la conjetura descubierta inductivamente. Incluso, del estudio de un caso que fortalezca suficientemente la conjetura puede surgir una suposición general que dé lugar al punto de partida para una comprobación, en aras de dar el máximo crédito a la conjetura y dar así respuesta a la exigencia del problema.

La *investigación validativa* se completa cuando se lleva a cabo la *interacción comprobatoria*, en la que el resolutor se implica en la argumentación formal de la conjetura que ya ha sido validada. La conjunción de estos pasos fundamentará dicha conjetura, con lo que se dará respuesta a la exigencia del problema. Al llevar a cabo dicha interacción se genera una dinámica que lleva hacia la solución mediante un razonamiento inductivo-deductivo.

De esta forma, la *investigación validativa* tiene que ser interpretada en íntima relación con la *interacción comprobatoria*, como procesos que se dan en unidad. De manera que la *investigación validativa* lleva a que se confirme, conscientemente, la conjetura inicial del problema, la que se constituye en punto de partida para la demostración matemática o la argumentación formal que sustenta el resultado, a desarrollarse mediante la *interacción comprobatoria*, necesaria para lograr una solución real del problema.

La contradicción se manifiesta cuando en la *investigación validativa*, a pesar de validar con varios casos la conjetura, no se llega a una conclusión determinante o lo suficientemente fuerte como para considerarla confiable, en cuyo caso la *interacción comprobatoria* carece de los fundamentos necesarios para alcanzar la solución del problema, negando a la primera que deberá superar dicha insuficiencia. Así mismo, cuando la *interacción comprobatoria* no cumple con todos los requisitos que exige el proceso demostrativo, la conjetura validada no podrá ser demostrada, negándose dicho proceso comprobatorio.

Esta contradicción se sintetiza en la *conjeturación matemática* y la refuerza, propiciando un mayor nivel de interpretación del problema matemático.

Las citadas relaciones conducen a una *sistematización inductiva*, interpretada como un proceso que potencia la autorregulación del razonamiento inductivo, a partir de la construcción y validación de una conjetura matemática, como base para su comprobación.

Así, la dinámica del proceso de razonamiento inductivo se sustenta esencialmente en los procesos de *orientación inductiva* y *sistematización inductiva*, los que se desarrollan en estrecha relación, y contienen al razonamiento deductivo que aporta la argumentación formal o demostración matemática.

Estrategia didáctica

La anterior modelación sirvió de base para la concepción y elaboración de una estrategia didáctica encaminada a orientar a los profesores para la organización y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, con énfasis en la formación de habilidades para potenciar el razonamiento inductivo.

La estrategia está estructurada en cuatro fases: *inicial*, de *orientación inductiva*, de *sistematización inductiva* y *evaluativa* (Álvarez, 2010), como se muestra en la Figura 2.

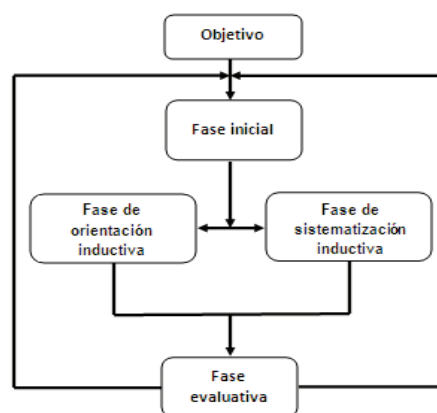


Figura 2: Estructura de la estrategia didáctica

Cada fase está caracterizada por las acciones a desarrollar.

La *fase inicial* contempla condiciones que deben cumplirse por estudiantes y profesores para la aplicación exitosa de la estrategia, exigencias al docente, elementos a contemplar en la preparación metodológica de la asignatura y un diagnóstico al grupo de estudiantes en el que se va a aplicar la estrategia, para conocer previamente su preparación en cuanto al uso de los recursos cognitivos y metacognitivos, así como indagar en aspectos motivacionales que influyen en el éxito o fracaso del proceso de resolución de los problemas.

En la *fase de orientación inductiva* se inicia la dinámica del proceso de razonamiento, de manera que será preciso crear el hábito de observar y analizar en cada problema sus elementos esenciales, para lo cual será necesario:

- ❖ Lograr que los estudiantes identifiquen la estructura (condiciones y exigencias) y las componentes (objetos, características y relaciones) de los problemas matemáticos, realizando la valoración y análisis de muchos problemas de varios tipos y explicando la importancia de profundizar en cada uno de sus elementos, en aras de obtener una correcta comprensión (Alonso y González, 2003).
- ❖ Propiciar que aprendan a considerar diferentes alternativas para llegar a una conjetura, fijando la atención en las características de los objetos que componen el problema y en las relaciones que existen entre ellos para poder apreciar sus analogías y diferencias.
- ❖ Llevar a utilizar, siempre que sea posible, diferentes representaciones de un mismo problema, para observar relaciones que pueden estar implícitas (Rizo y Campistrous, 1999).
- ❖ Transmitir patrones de análisis de los problemas, aprovechando para ello la resolución de problemas en la pizarra, en voz alta, por parte del profesor o estudiantes aventajados.
- ❖ Favorecer el intercambio, la comunicación y el contraste de ideas, aprovechando el trabajo en grupos pequeños en los que se discutan problemas (Schoenfeld, 1985), de manera que se vayan creando patrones de razonamiento inductivo para la conformación de conjeturas y su exteriorización.
- ❖ Incluir en el trabajo problemas abiertos que requieran de la selección de datos y de la determinación de condiciones para poder llegar a una solución.

Algunas preguntas que pueden resultar útiles al docente en esta etapa, para desarrollar su trabajo de moderador del proceso son: ¿Puedes explicar con tus propias palabras de qué trata el problema? ¿Qué componentes involucra este? ¿Cómo se relacionan los objetos del

problema? ¿Cuáles son las condiciones y exigencias? ¿Cómo te representas el problema? ¿Esta representación te sugiere alguna idea que quieras exponer?

Este tipo de preguntas debe llevar a una idea hipotética que indique por dónde debe ir la solución del problema. A tales efectos se requiere además:

- ❖ El análisis conjunto (profesor y estudiantes) de problemas en los que realicen un proceso exploratorio que dé lugar a regularidades que se vayan perfeccionando hasta lograr una conjetura, con lo que se transmitan patrones de exploración y se estimule la capacidad de obtener una idea, de forma hipotética, a través de un proceso exploratorio.
- ❖ Propiciar el desarrollo de analogías con problemas ya resueltos y discutir su aplicación colectivamente para extraer reglas formuladas por los propios estudiantes (Polya, 1990).
- ❖ Enseñar la aplicación de estrategias heurísticas tales como: consideración de casos particulares, consideración de un caso general y consideración de todos los casos posibles, en aras de hacer especializaciones o generalizaciones que permitan conjeturar.
- ❖ Emplear métodos participativos en clase, reconociendo los avances de los estudiantes que se destaquen en la exploración, de manera que se activen los recursos motivacionales de los mismos, con lo cual se movilizarán las habilidades cognitivas y metacognitivas que deben conducir la actividad exploratoria.
- ❖ Formar estrategias de autocontrol o autorregulación durante el proceso de resolución, desarrollando actividades en las que los estudiantes describan su propio proceso de pensamiento mientras trabajan.

Algunas preguntas que pueden ayudar a la orientación de esta etapa son: ¿Has resuelto antes algún problema con un rasgo similar? ¿Por qué no analizar algún caso particular o un caso más general? ¿No podrá reducirse a un problema más simple? ¿Tal vez funcione la división en casos y la consideración por separado de cada uno de éstos? Explique ¿cómo llegó a esa conclusión? Trate de encontrar más de una forma de hacerlo.

Para formar estrategias de autocontrol será muy importante que el profesor trabaje sistemáticamente empleando preguntas como: ¿Qué están haciendo? ¿Por qué lo están haciendo? ¿Cómo les ayudará eso a formular una conjetura? ¿Qué harán con ella cuando la tenga?

La *fase de sistematización inductiva* se desarrolla en estrecha relación con la anterior para tratar de validar la conjetura encontrada y luego comprobarla. En este sentido se requiere:

- ❖ Reforzar las estrategias de autocontrol o autorregulación, en aras de que se valide el grado de generalidad y veracidad de la conjetura obtenida, confirmándola con un adecuado número de casos que permitan su fortalecimiento antes de someterla a demostración.
- ❖ Propiciar que se examinen sus consecuencias en aras de verificar su validez y reforzar la conjetura.
- ❖ Hacer que se apropien del conocimiento de que una conjetura adquiere más crédito con la verificación de cada nueva consecuencia.
- ❖ Fomentar el uso de casos que realmente constituyan oportunidades de debilitar la conjetura, en aras de su perfeccionamiento, así como de ratificación de la misma.
- ❖ Potenciar el trabajo en grupo en aras de discutir y verificar las consecuencias de la conjetura descubierta, como argumento o fundamento para la propia conjetura.
- ❖ Fomentar concepciones y actitudes que faciliten la revisión y exteriorización de ideas que se tengan sobre posibles conjeturas en aras de cambiarlas de existir una razón fundamentada para ello, o defenderla con argumentos sólidos en caso de existir razones para ello.
- ❖ Emplear ejemplos en los que al validar una conjetura con determinados casos esta se destruya, de manera que esto se aproveche para demostrar cómo adicionándole una restricción se puede hacer resurgir.

Algunas preguntas que pueden ayudar son: ¿Puede explicar su conjetura? ¿En qué casos se cumple? ¿Conoce un resultado similar? ¿Se les ocurre un contraejemplo o caso para el que no se cumpla la conjetura? ¿Por qué sostiene la conjetura? ¿Qué tan incierta la podemos considerar? ¿Es posible generalizarla? ¿Podemos debilitarla? ¿Podemos mejorarla? ¿Qué es lo que no hemos tenido en cuenta? ¿Podríamos formular la conjetura de una manera más accesible? ¿Cuál es la conjetura definitiva?

Así, en caso de concluirse con la aceptación de la conjetura, será preciso desarrollar el proceso de comprobación de la misma, para lo que se deberá:

- ❖ Trabajar ejemplos que permitan corroborar que del estudio de un caso, que fortalezca suficientemente la conjetura, puede surgir una suposición general que dé lugar al punto de partida para la comprobación que lleve a dar respuesta a la exigencia del problema.
- ❖ Propiciar una cuidadosa observación de los casos empleados y de las consecuencias examinadas para reforzar la conjetura y proporcionarle más crédito, los que se

constituyen en fundamentos necesarios para la comprobación de la conjetura descubierta inductivamente.

- ❖ Ejemplificar cómo demostrar una conjetura a partir de resultados matemáticos ya comprobados.
- ❖ Emplear numerosos problemas en los que el estudiante tenga que implicarse en la argumentación formal de la conjetura que ya ha sido validada.

La *fase evaluativa* tiene dos direcciones fundamentales, una encaminada a la comprobación de los conocimientos y habilidades adquiridos por los estudiantes y otra orientada a la valoración general de los resultados obtenidos con su aplicación en la asignatura, así como a la recolección de opiniones y experiencias que resulten de utilidad para su posterior perfeccionamiento.

Cabe precisar que la introducción sistemática de esta estrategia en la práctica docente de la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Oriente, a partir del año 2010, ha tenido resultados favorables que muestran avances en el aprendizaje del razonamiento inductivo durante la resolución de problemas matemáticos, facilitando un desarrollo de los recursos intelectuales, así como un crecimiento favorable en el interés y la motivación por las matemáticas y la resolución de problemas de esta ciencia.

Conclusiones

El diagnóstico realizado al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Oriente, permitió constatar la existencia de insuficiencias en la aplicación del contenido de esta ciencia a la solución de problemas, fundamentalmente en el razonamiento inductivo requerido para dicha solución, evidenciando la necesidad de una intervención didáctica.

Se realizó una modelación didáctica de la dinámica del proceso de razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos, a partir de los referentes teóricos precisados, la que se sustenta en los procesos de orientación inductiva y sistematización inductiva, que se desarrollan en estrecha relación y contienen al razonamiento deductivo.

La estrategia didáctica que se propone se corresponde con la lógica modelada y posibilita orientar a los profesores para la organización y desarrollo de la dinámica del proceso de sistematización inductiva en la resolución de problemas matemáticos, de manera que se logre un aprendizaje transformador y se contribuya a la solución de las insuficiencias detectadas. La

introducción de esta estrategia en la carrera de Licenciatura en Matemática, a partir del año 2010, ha mostrado resultados favorables.

Referencias bibliográficas

- Alonso, I. y González, H. (2003). *¿Cómo tener éxito al resolver problemas matemáticos?* Potosí: Visión Creativa equipo consultor S.R.L.
- Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran”, Universidad de Oriente. Cuba.
- Álvarez, M. (2010). *Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran”, Universidad de Oriente. Cuba.
- Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.
- Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press.
- Rizo, C. y Campistrous, P. (1999). Estrategias de Resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2(2), 31-45.