

## UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA CONTRIBUIR EN LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Catalina Navarro Sandoval, Jesús Romero Valencia, José Luis Miranda Nava  
 Universidad Autónoma de Guerrero  
 nasacamx@yahoo.com.mx, jromv@yahoo.com

México

**Resumen.** El presente escrito muestra los avances de un trabajo de investigación acerca del concepto de límite, es importante señalar que existe una diversidad de investigaciones alrededor de dicho concepto, sin embargo, el problema sobre los procesos de enseñanza aprendizaje sigue siendo tema de preocupación para más de un investigador, debido a que las dificultades siguen estando presentes en la mayoría de los aprendices. En este sentido, nuestro trabajo se centra en atender la escasa comprensión por parte de estudiantes del nivel medio superior de la UAGRO, respecto del concepto de límite y para ello nos hemos planteado proponer actividades que contribuyan a la comprensión del concepto de límite considerando como base de referencia los planes y programas y libro de texto usados en el NMS de la UAGRO. Para ello, nos hemos dado la tarea de buscar, analizar y organizar investigaciones respecto de tres aspectos: epistemológico, didáctico y cognitivo. Con la intención de identificar y usar, algunas propuestas presentadas en las investigaciones

**Palabras clave:** límite, actividades, perspectivas cognitiva, didáctica

**Abstract.** In this paper we show some topics about a limit concept research, we should point that there is a wide variety on this concept researches, however the teaching-learning process problem is even an important topic for researchers because the troubles are still present in most of students. Thus, this work emphasizes in caring the limited understanding of pre-bachelor students of the UAGro about the limit concept. To do this, we proposed some activities that help the limit concept understanding, taking programs and text books used in the UAGro as foundation. To do this we were searching, analyzing and organizing researches about three main aspects: epistemological, didactical and cognitive, to intent identify and use some proposals presented in the researches.

**Key words:** limit, activity, perspective cognitive, didactic

### Introducción

Como se ha señalado en el resumen de este escrito, el presente trabajo de investigación se encuentra en desarrollo actualmente, y para comunicar las ideas esenciales del mismo comenzaremos comentando que en los antecedentes se muestran aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos, esta clasificación se decidió debido a que muestra información que nos da luz para atender el problema de la escasa comprensión por parte de estudiantes del nivel medio superior de la UAGRO, respecto del concepto de límite, donde se pretende proponer actividades que contribuyan a la comprensión del concepto de límite considerando como base de referencia los planes y programas y libro de texto usados en el NMS de la UAGRO.

### Antecedentes

Con las investigaciones de corte epistemológico, se pretende indagar sobre la naturaleza y el origen (a grandes rasgos) del concepto de límite, Ferrante, (2009) señala que en la larga

evolución del concepto (desde la matemática griega hasta el siglo XIX) se observa claramente la necesidad de explicitar y formalizar la noción de límite, dado que se utilizaba de forma implícita desde la época griega y que es hasta el siglo XIX cuando se llega a la definición formal y esta es la que se usa y/o trabaja en la actualidad ya sea para validar algunos resultados obtenidos o bien para demostrar otros más generales. Es importante señalar que de Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII, aparece una idea muy intuitiva del proceso del paso al límite, pero no existía el concepto como tal, ya que ni siquiera se había explicitado el concepto de función, pero sí aparece como proceso implícito en algunos métodos utilizados. Ahora el *Método de exhaución*, se le atribuye a Eudoxo, aunque la utilización más conocida la hizo Arquímedes (en el año 240 a.c) al trabajar con la esfera y el cilindro y en La cuadratura de la Parábola, quien aplicaba el método del cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc. El método consistió en aproximar en la figura otras en las que se podía medir la magnitud correspondiente, de manera que se aproximaba a la magnitud buscada. Por ejemplo para estimar la superficie del círculo se inscriben y circunscriben polígonos regulares de  $n$  lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de  $n$  triángulos isósceles) luego se duplica el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos hasta que la diferencia queda exhausta.

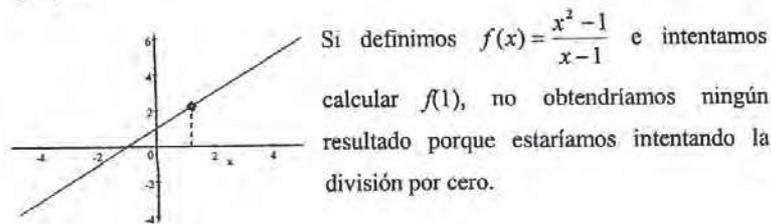
Del aspecto didáctico obtenemos información del tratamiento de la noción del concepto de límite en el sistema escolar, por lo que se realizó el análisis de los programas de estudio y libros de texto del Nivel Medio Superior de la UAGRO. Se encontró que la noción de límite se aborda en el curso de Cálculo Diferencial específicamente en la unidad III, y se menciona que al finalizar la unidad el estudiante debe construir la noción a partir del caso particular de la ruptura de la gráfica de una hipérbola. Además alcanzar los siguientes objetivos: en el primero se dice que el estudiante debe construir e interpretar modelos matemáticos, mediante la aplicación de procedimientos variacionales para comprender y analizar situaciones reales. Y el segundo menciona que el estudiante debe argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales. Respecto del análisis del libro de texto, dado que es la herramienta más cercana con la que cuenta tanto el profesor para la enseñanza y el estudiantes para su aprendizaje de las matemáticas en general y del concepto de límite en particular. En Fernández, Locia, Meza y Nájera (2007), presentan en el primer capítulo de su libro el tema de límite, siguiendo la estructura siguiente. Se inicia con un poco de historia respecto del *cálculo* en general, seguido del tema de *funciones y su graficación*, y finalmente presentan el tema de *límite* (incluye límites laterales, teorema sobre existencia de límite y límites que no existen); en los capítulos II y III presentan el tema de *Derivada* y

aplicaciones de la derivada respectivamente. Cuando se inicia el tratamiento del concepto de *límite* básicamente se presenta bajo el siguiente orden:

1. Se introduce la noción de límite con base en ejemplos, una definición intuitiva, luego límites laterales.
2. Posteriormente se introduce la definición con la que se formaliza la noción.
3. Y por ultimo atienden algunas concepciones que se derivan del manual.

Por ejemplo (ver Figura 1 y 2);

Ejemplo.



Si elaboramos una tabla de valores para graficar la función tendremos:

$x$	-4	-2	0	1	2	4
$f(x)$	-3	-1	1	$\infty$	3	5
$(x, y)$	$(-4, -3)$	$(-2, -1)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$	$(2, 3)$	$(4, 5)$

Figura 1 (Fernández, et al. 2007, pp. 62)

Ejemplo.

Sea la función racional  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ; tratemos de calcular el límite cuando "x" tienda a 2. Esto es  $x \rightarrow 2$ .

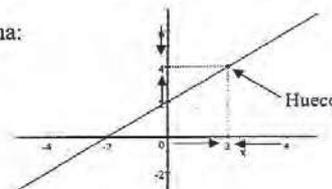
Los valores que toma  $x$  se acercan a 2 por la izquierda (se escribe  $x \rightarrow 2^-$ )

Los valores que toma  $x$  se acercan a 2 por la derecha. (se escribe  $x \rightarrow 2^+$ )

$x$	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	3.5	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1	4.5

Observamos que al acercarse la "x" al valor 2, sea por la izquierda o por la derecha,  $f(x)$  se acerca a 4. En otras palabras, el límite es 4.

Veamos lo anterior en la gráfica de la derecha:



Matemáticamente se escribe así:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = 4$$

Figura 2: Fernández, et al, 2007, pp. 67

“Para que una función tenga límite en un punto donde  $x=a$ , se requiere que el límite por la izquierda sea igual al de la derecha de no cumplirse esto, la función no tiene límite en  $x=a$ ”

Del aspecto cognitivo en López (2011), reporta algunos preconceptos, concepciones, dificultades y obstáculos que están presentes en estudiantes del Nivel Medio Superior, respecto de la noción del concepto de límite.

### Preconceptos de límite

El preconcepto de límite está asociado básicamente al de “una barrera no rebasable”.

### Concepciones de límite

Las concepciones de límite como referencia a movimiento de las variables, indistintamente de que se alcance o no límite.

La concepción de límite como el valor que toma la función (ó como una sustitución), en el punto que se está analizando, sin importar el análisis del comportamiento de la función.

La concepción de límite como aproximación susceptibles de hacerse tan exacta como se desee; proceso de inducción incompleta.

La concepción de límite como un valor inalcanzable.

La concepción de límite como un movimiento físico.

La concepción de límite como una barrera intraspasable.

La concepción de límite como una marca o como el último término de un proceso.

La concepción de límite como “transferir al límite las propiedades de los elementos”.

La concepción de límite de basta tomar para cada  $\epsilon$  una  $\delta$  igual a  $\epsilon$ . (Esta estrategia es correcta para el caso de algunas funciones).

La concepción de límite de considerar el proceso al infinito como una sustitución.

La concepción de usar la definición de límites laterales para determinar límite de alguna función.

**Dificultades del concepto de límite**, en (Vrancke, et al 2006), reportan:

Dificultades para comprender que el concepto de límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.

Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales.

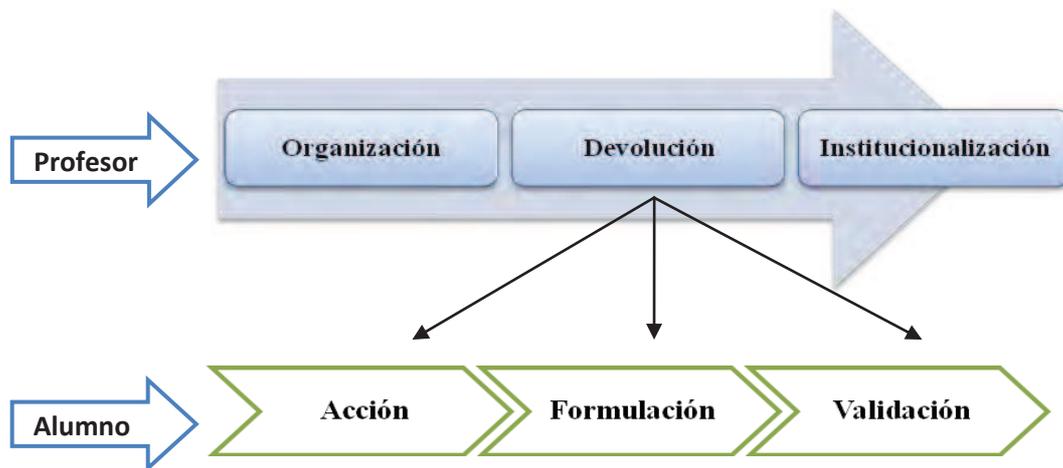
Dificultades para la manipulación algebraica de las funciones cuyo límite se quiere determinar.

Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.

## Marco teórico y metodología

Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

La teoría que sustenta nuestro trabajo de investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas y la metodología a usar es la Ingeniería Didáctica, ya que ambas nos conducen a cumplir el objetivo de nuestra investigación, ya que Brousseau (1986) define a las *situaciones a-didácticas* como aquellas situaciones en las que el alumno por iniciativa propia enfrenta cierto problema por sí sólo y a las *situaciones didácticas* las define como aquellas que son más amplias que las situaciones a-didácticas, ya que las primeras considera que el enseñante está implicado con el sistema de interacciones del alumno, con los problemas que él le ha planteado. Una situación didáctica tiene la intención de que el alumno adquiera un conocimiento específico, pero dicha adquisición depende de las actividades que desempeñan tanto el alumno como el profesor, así pues las situaciones didácticas se clasifican en situaciones de acción, formulación, validación y de institucionalización, como se muestra en el siguiente esquema.



Esquema I

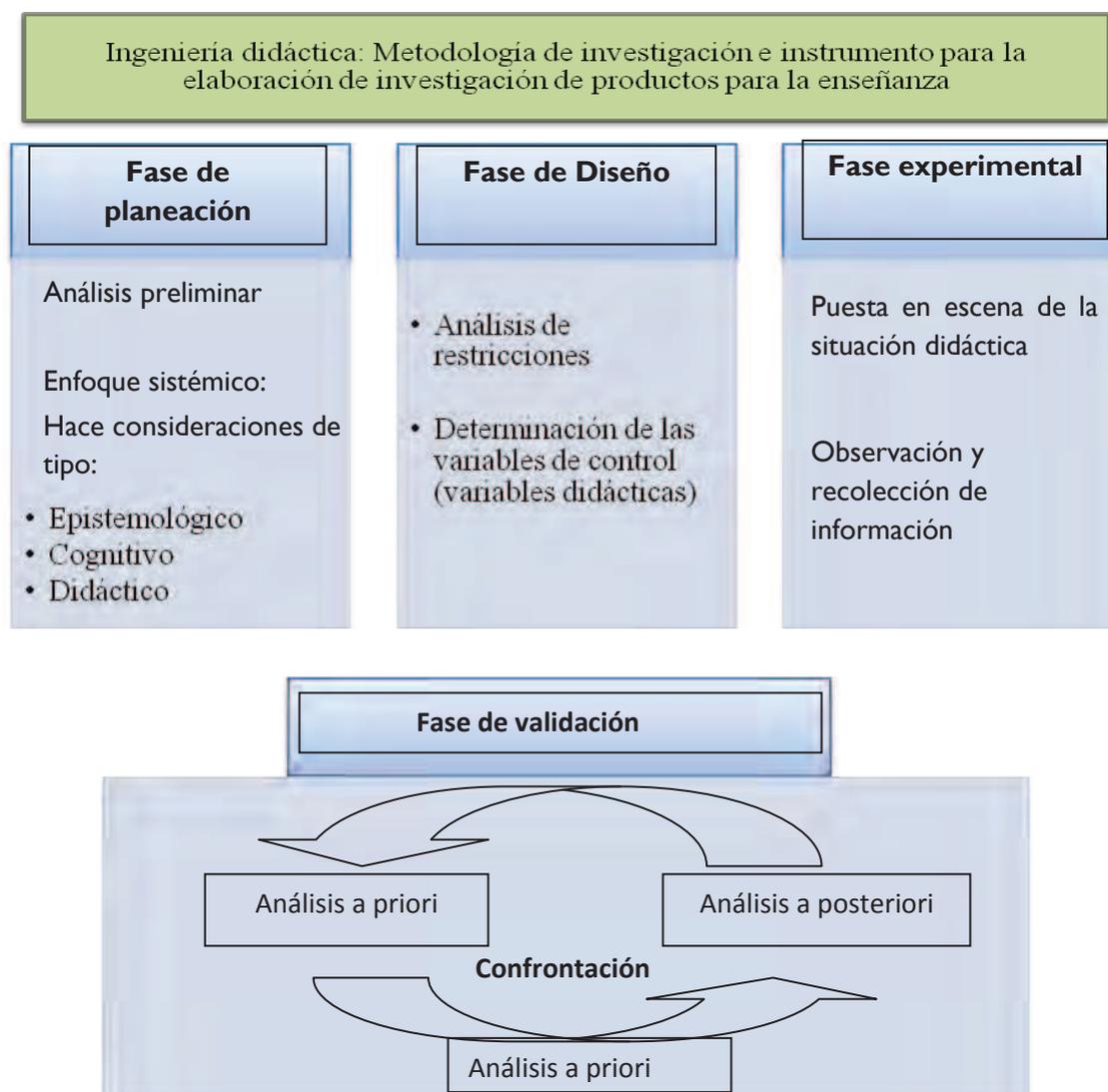
*Situación de acción*, aquí se genera la interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

*Situación de formulación*, el objetivo de esta situación es la comunicación en informaciones entre alumnos. Para esto deben de modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándose y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

*Situación de validación*, aquí es donde los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones y de esa forma convencer a uno o varios estudiantes de la validez de las afirmaciones que se hacen.

*Situación de institucionalización*, ésta situación está bajo la responsabilidad del profesor, donde se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Esta parte teórica es fundamental para nuestro trabajo, ya que nos permitirá la organización y planificación de la propuesta que se pretende realizar con base en los resultados de otras investigaciones y enfocada al nivel medio superior. Por otra parte, la ingeniería didáctica será la metodología que nos conduzca determinar aquellos elementos que serán esenciales para el logro del objetivo de nuestro trabajo de investigación. Así, el proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases como se muestra en el siguiente esquema de acuerdo con Lezama y Farfán (2001) y Artigue, (1995).



Esquema 2

## Conclusión

De acuerdo con la información anterior, estamos en condiciones de realizar la propuesta de actividades que contribuyan a la comprensión del concepto de límite enfocada al Nivel Medio Superior de la UAGRO. Para comenzar asumiremos que el estudiante ha comprendido el concepto de límite, si es capaz de realizar actividades en las que use conocimientos previos elementales relacionados con el concepto de interés, así como explicar y relacionar el resultado de las tareas en las que dicho objeto matemático sea determinante. Por tanto en la propuesta de actividades se tomarán en cuenta los hallazgos hechos en cada uno de los aspectos presentados a lo largo de la investigación, por ejemplo: involucrar la idea geométrica que está relacionada con situaciones ligadas al contexto geométrico, como por ejemplo, la aproximación de áreas de polígonos inscritos en un círculo según se aumenta el número de lados. Por otro lado se atenderá lo propuesto en el programa de estudios donde se señala se aborden problemas relacionados con fenómenos físicos, químicos, biológicos, sociales, etc., por lo tanto es importante diseñar problemas que atiendan esa integración y vinculación, en la propuesta de actividades se cuidará que el estudiante trabaje y relacione el trabajo algebraico y gráfico del concepto de límite, así como su representación tabular.

## Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7 (2), 33-115.
- De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. 1(2)
- Fernández, J., Locia, E., Meza, e. y Nájera, O. (2007) Matemáticas V. *Cálculo Diferencial*, Colectivo de la UAG (Texto para el alumno).
- Ferrante, J. (2009). Una Introducción al Concepto de Límite (dos mil años en un renglón). Editorial de la U. T. N. Disponible en <http://www.edutecne.utn.edu.ar>
- Gómez, C. y de la Fuente, A. (1998). Análisis de manuales escolares a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias*. 16(1), 73-84.

- Lezama, J. y Farfán R. M. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 161-193.
- López, E. (2011). Un estado del arte sobre investigaciones cognitivas acerca del concepto de límite. El caso de habla hispana. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, México.
- Sierra, M., González, M., y López, C. (1999). Evolución historia del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de salamanca*
- Sierra, M., González, M., y López, C. (2000). Concepciones de los Alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria Sobre Límite Funcional y Continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 3(1), 71-85.
- Vrancke, S., Gregorini, I., Engler, A., Muller, D. y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral*. Disponible en <http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf>

#### PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIO UAG.

Programas de estudio. Área: Físico Matemático, para escuelas preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero.