MECANISMOS DE VALIDACIÓN EN TRANSFORMACIONES ANALÍTICAS. UN ESTUDIO BASADO EN EL ANÁLISIS DE ARGUMENTOS

Florida Pastrana Juárez, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Yadira Lizette Villarreal Calderón, Armando Morales Carballo
Universidad Autónoma de Guerrero México
flor_jua_10@hotmail.com; gcabañas.sanchez@gmail.com; ylvc2004@hotmail.com; armando280@hotmail.com

Resumen. El artículo analiza desde los argumentos presentados por estudiantes universitarios, cómo validan una conjetura en torno a la conservación del área de regiones planas. Tomamos como base, los argumentos que ponen en juego para justificar transformaciones analíticas vinculadas a regiones planas. Nos apoyamos para ello en el modelo argumentativo de Toulmin (Toulmin, 1958), donde la garantía es un elemento fundamental en la validación de una tesis o conjetura por parte del argumentador. Los resultados indican que los estudiantes se validan sus resultados en la fórmula de polígonos como el cuadrado, así como en la integral definida, a fin de conservar una medida de área.

Palabras clave: argumentos, conservación del área, modelo argumentativo, transformaciones analíticas

Abstract. The paper analyzes from the arguments presented by university students, how they validate a conjecture concerning the conservation of the area of plane regions. We take into account the arguments they used to justify analytical transformations linked to plane regions. We used Toulmin´s argumentative model (Toulmin, 1958), where the guarantee is a fundamental element in the validation of a thesis or conjecture on the part of the arguer. The results indicate that the students validate their results in the formula of polygons as the square, as well as in the integral defined, in order to conserve a measure of area.

Key words: arguments, conservation of the area, argumentation model, analytical transformations

Introducción

Este artículo analiza *los recursos argumentativos que emplean estudiantes universitarios para validar una conjetura en torno a la conservación del área, en el contexto de las transformaciones analíticas.* Nuestro marco de análisis son las estructuras argumentativas reconstruidas desde los argumentos escritos y verbales presentados por estudiantes universitarios al momento de conservar la medida del área de una región plana, debajo de la curva de una función continua, en un intervalo cerrado. El estudio de los argumentos se sustenta en el modelo argumentativo de Toulmin (Toulmin, 1958), donde la garantía es fundamental en la validación de una tesis o conjetura por parte del argumentador.

La investigación se desarrolló con 32 estudiantes (19-21 años) de una licenciatura en matemáticas, quienes recién habían estudiado el concepto de integral definida —vista como área bajo una curva— así como métodos y técnicas de integración, considerados básicos, a fin de que estuviesen en codiciones al menos hipotéticamente, de intervenir en las situaciones planteadas. El estudio se llevó a cabo mediante cuatro actividades, que los participantes discutieron en equipos de tres integrantes, durante tres sesiones de dos horas cada una aproximadamente. Las sesiones de trabajo fueron videograbadas para su posterior análisis. Por razones de espacio, en este manuscrito se discute una de las situaciones propuestas.

El estudio de argumentos

El estudio de los argumentos producidos por estudiantes y matemáticos ha sido un tema central de investigación en nuestra disciplina, la Matemática Educativa (Inglis, Mejía-Ramos & Simpson, 2007). Su estudio se apoya fundamentalmente en las prácticas discursivas, a través del análisis de textos y de los usos de la lengua verbal y no verbal (Cabañas-Sánchez & Cantoral, 2010). De manera que la argumentación se articula con la confrontación de significados, de reglas, de propiedades o procedimientos matemáticos entre los estudiantes o bien entre su profesor, originándose cambios discursivos al justificar razonamientos.

El interés por el estudio de los argumentos se justifica en los procesos de validación matemática, así como en la construcción de pruebas o demostraciones matemáticas (Fischbein, 1982; Recio & Godino, 2001; León & Calderón, 2001; Crespo & Farfán, 2005, Cabañas-Sánchez & Cantoral, 2010). La validación, como bien sabemos, es un tema importante en la enseñanza de las matemáticas y se sustenta de conceptos sobre objetos, relaciones y procedimientos propios de la disciplina. Este concepto engloba tanto a los procesos de prueba deductiva como a la actividad que involucra a la persuación sistemática, basada en un punto de vista personal (Lannin, 2005; Harel & Sowder, 1998 citados en Lew & So, 2008). En consecuencia, implica razonamiento, así como la elaboración de explicaciones o justificaciones, donde los argumentos desempeñan un papel central. Por ello compartimos la postura de León y Calderón (2001), quienes sostienen que con la validación se busca demostrar la verdad de un enunciado o una teoría y lograr la adhesión de un público a ese enunciado o teoría.

El modelo argumentativo de Toulmin

Un concepto fundamental para Toulmin (1958) es el de argumentación, quien lo entiende como la exposición de una tesis controvertida, el examen de sus consecuencias, el intercambio de pruebas y buenas razones que la sostienen, y una clausura bien o mal establecida. El modelo argumentativo está constituido por seis elementos básicos a los que denominamos categorías, cada una desempeña un papel diferente en un argumento. Los elementos que lo constituyen son: La aserción (A) es la tesis a defender, a debatir, por parte del que argumenta ya sea en forma oral o escrita. La evidencia (E) es la información en la cual se basa la aserción. La garantía (G) justifica la conexión entre evidencia y aserción haciendo referencia, ya sea por medio de una regla, una definición, o mediante una analogía. La garantía es apoyada por el soporte (S) a través de nueva evidencia. El calificativo modal (C) especifica el grado de certeza, la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza en la tesis; y la refutación (R) presenta las excepciones de la aserción. Las seis categorías del modelo están conectadas en la estructura que se muestra en la Figura

1. Categorías que no siempre van a estar explícitas en un texto argumentativo.

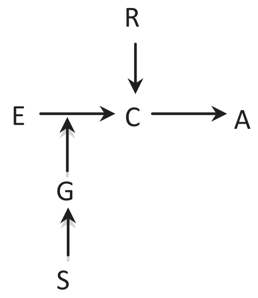

Figura 1. Estructura del modelo argumentativo de Toulmin.

Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) sostienen que cuando se modelan argumentos apoyados en el esquema argumentativo de Toulmin, se da el caso en que algunas partes del argumento no son verbalizados explícitamente por el argumentador. Se refieren explícitamente al soporte y a la refutación o excepción a la regla. Y aun cuando todos los elementos contribuyen a la reconstrucción de las estructuras argumentativas, es claro que la garantía presentada por el argumentador, es la que le dará validez o no a sus argumentos; apoyados en datos explícitos o implícitos, asimismo, de conceptos, relaciones matemáticas y procedimientos.

La noción de conservación del área en transformaciones analíticas

Las nociones de conservación del área y transformaciones analíticas son claves en este trabajo y se comprenden en sentido de Cabañas-Sánchez (2011), quien las caracteriza como sigue:

Conservación del área

> "... modificación que no produce cambios en un área. Significa que el valor de un área permanece sin cambios mientras su figura puede ser transformada a otra cualitativamente nueva. Puede darse a partir del cambio de posición de una figura sin modificar su forma, al realizar movimientos como la rotación, traslación y reflexión (Cabañas-Sánchez, 2011, p.70)".

Las *transformaciones analíticas* se comprenden por la autora como sigue:

Se conciben como aquellas que se derivan de un conjunto de operaciones algebraicas sobre expresiones analíticas relativas a la integral definida. El resultado de tales transformaciones es un número real y positivo que representa el valor de un área, situado bajo la representación gráfica de una función continua en un intervalo cerrado. La obtención de dicho número se fundamenta en definiciones, propiedades de los números y de objetos matemáticos como función continua, noción de intervalo, partición del intervalo, integral indefinida y definida. La interpretación geométrica de estas representaciones en el intervalo dado, revelan *cambio de forma* o de *posición* o bien ambas; la medida del área correspondiente *se conserva*.

Desde el punto de vista de la matemática, las transformaciones analíticas (Cabañas-Sánchez, 2011, p. 72) a las que aludimos y que comprenden la conservación del área, verifican las propiedades siguientes:

Sea *R* una función de variable real de la forma $f(x)=kx^n$ con $k > 0$, en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, *a*, *b* $\in$ *R*, continua en dicho intervalo y, por tanto, diferenciables en el intervalo abierto.

A(*R*)= Valor del área bajo la curva de *R*.

Sea *T* una transformación sobre *R* tal que *T*(*R*) es nuevamente una función y *A*(*T*(*R*)) el valor del área de *T*(*R*).

Entonces *A*(*T*(*R*))=*A*(*R*).

La relación *A*(*T*(*R*))=*A*(*R*) se verifica a partir de transformaciones sobre funciones continuas, definidas en un intervalo cerrado, en las que se localizan: 1) el método de cambio de variable; 2) el método para determinar coeficientes de una función polinómica, definida en un intervalo cerrado dado, con la condición de que el área se conserve; 3) transformar una región de área en otra, sin que su medida se altere, y; 4) determinar a partir de los parámetros de funciones polinómicas de grado *n*, qué familia de funciones son las que conservan el área debajo de la curva de su representación gráfica.

Resultados y discusión

La actividad. La actividad que se discute es la siguiente:

Considera las siguientes expresiones $f(x) = 4$; $g(x) = ax$; $h(x) = bx^2$. Encuentra los valores de *a* y *b* de manera que la región formada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo [0, 4] tenga la misma área. Bosqueja geométricamente.

Una primera acción de los estudiantes fue la representación del área debajo de la gráfica de la función $f(x) = 4$ en el intervalo [0,4]. Sin dificultad reconocieron que dicha región representaba un cuadrado. En consecuencia, tenían claro que la medida de área a conservar era precisamente la de ese polígono. Una mayoría la determinó mediante la fórmula $l \times l$, otros, mediante la integral definida (Figura 2).

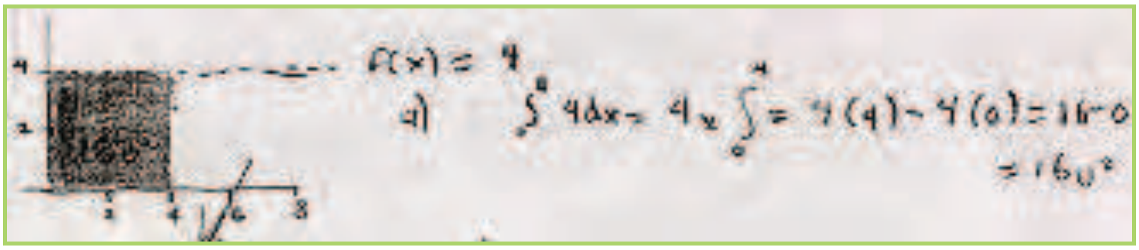

Figura 2. El uso de la integral definida en la determinación del área debajo de la curva de una función lineal.

Quienes validaron sus argumentos en la integral definida, usaron la fórmula que establece que la integral definida de la función *f*(*x*) en el intervalo $[a,\ b]$ es igual a la diferencia entre los valores de cualquiera de sus primitivas en los extremos superior e inferior del intervalo. Es decir, por medio de la resta:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A través de los argumentos de los estudiantes se documenta que muchas veces "no recuerdan como resolver la resta" y recurren al profesor a fin de que les diga cómo se resuelve.

Para representar las regiones de área asociadas a las funciones lineal y cuadrática, tenían claro que debían determinar el valor de los parámetros *a* y *b*, aunque inicialmente se les dificultó entender cómo proceder. Una vez que determinaron el valor de los parámetros *a* y *b* mediante la integral definida representaron las regiones de área correspondientes. Primero, en palabra de los estudiantes *"calculamos la integral definida"* y luego "*igualamos el resultado con dieciséis*". Esto es, representaron una integral definida para determinar el valor de cada parámetro y la igualaron a dieciséis. Una vez obtenido los valores, los sustituyeron en las funciones *g*(*x*) y *h*(*x*) y posteriormente representaron las regiones de área. En la figura siguiente, se muestra la reconstrucción de los argumentos presentados por el equipo 1.

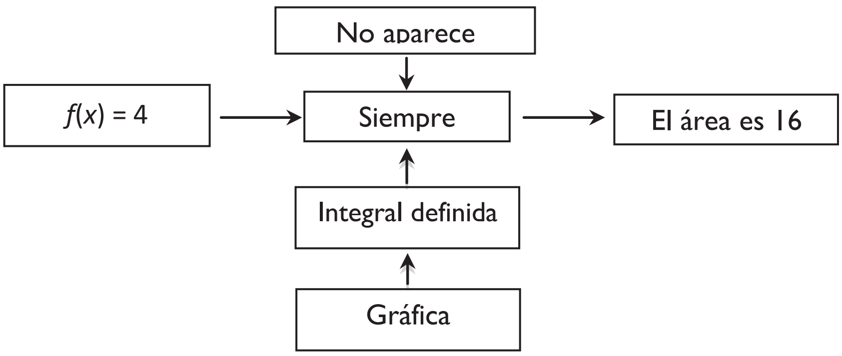

Figura 3. Estructura argumentativa reconstruida de los argumentos que validan el inciso a de la actividad.

Los estudiantes que recurrieron a la integral definida para determinar la medida del área de la región situada debajo de la gráfica de la función $f(x) = 4$ en el intervalo [0,4], argumentaron su uso porque "*recuerdan que la integral es el área*" o "*porque son funciones y como se pide encontrar el área*".

Conclusiones

Dos mecanismos de validación aparecieron en los argumentos escritos y verbales de los estudiantes, para garantizar que la medida del área de una región se conserva: a). Fórmulas básicas para calcular el área de polígonos (cuadrado y el triángulo) y b) la integral definida. La primera, al reconocer que debajo de la gráfica de una función constante, la región representa una figura conocida, un cuadrado; en consecuencia también usaron la fórmula correspondiente para determinar la medida del área de ese polígono. Esta medida de área debían determinarla a fin de saber cuál era medida de área a conservar. La segunda, para regiones de área más complejas. La representación gráfica apareció a modo de soporte al momento en que justificaron la medida de área a conservar. Por ejemplo, para indicar que se trataba de un polígono que les era familiar.

Referencias bibliográficas

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico* (tesis de doctorado inédita). México: Cinvestav-IPN.

Cabañas-Sánchez, G. & Cantoral, R. (2010). Exploring de notions of comparison, conservation and measurement of the area in university students. A study through their arguments. In M.M. Pinto and T.F. Kawasaki (Eds), *Proceedings 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 241-248). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Cabañas, G. & Cantoral, R. (2009). Perception of the notions of conservation, comparison and measurement of the area. A study through arguments in the classroom. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica), Supplemento n.4 al n. 19*, 97-104.

Crespo, C., Farfán, R.M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(3), 287-317.

Crespo-Crespo, C., Farfán, R.M. & Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (1), 287-317.

Fischbein, E. (1982). 'Intuition and proof'. *For theLearning of Mathematics 3*(2), 9–24.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P., Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66(1), 3-21. doi: 10.1007/s10649-006-9059-8.

León-Corredor, O.L. & Calderón, I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 5-21.

Lew, H.Ch & So, K. N. (2008). Two justification processes in solving algebraic Problem using graphing technology. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre and T. Rojano (Eds), *Proceedings 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 113-120). Morelia, Mich, Mexico: PME.

Recio, A. & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics 48* (1), 83-99.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* UK: Cambridge University Press.