REPRESENTACIONES GRÁFICAS. UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN EL PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Miguel A. Herrera M., Oliver Texta M., Juan Villagómez M., Pericles Ramírez J., Israel Herrera., Abraham Rivera M
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero México
herrerapolo@hotmail.com,israel_hm@hotmail.com

Resumen. Este artículo es el reporte del taller sobre técnicas y estrategias gráficas para la resolución de problemas de probabilidad, llevado a cabo en el Relme 25 celebrado en la Cd. de Camaguey, Cuba, bajo objetivos didácticos que abordan la enseñanza aprendizaje de la probabilidad en el nivel superior. Para ello se seleccionaron y presentaron para su análisis diversos tipos de problemas con el fin de presentar las técnicas apropiadas para su solución. Se contó con la participación de profesores y estudiantes en la construcción colectiva de los significados, a partir de una situación didáctica representada por el planteamiento de problemas de probabilidad que requieren diferentes estrategias en la búsqueda de soluciones. Siguiendo recomendaciones de la Teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997)..

Palabras clave: resolución problemas de probabilidad, técnicas estrategias

Abstract. This article is the report of the workshop on technical and visual strategies for solving probability problems, carried out in Relme 25 held in the city of Camagüey, Cuba, with learning objectives that address the teaching and learning of probability in the higher education level. To do this we selected and submitted for review different types of problems in order to present the appropriate techniques for their solution. The workshop was based on the participation of teachers and students in the collective construction of meanings, from a teaching situation represented by approaching probability problems that require different strategies for their solutions. In order to achieve this, we followed the recommendations of the Theory of Didactic Situations by Brousseau (1997),

Key words: probability solved problems; techniques

Introducción

La enseñanza de la probabilidad y estadística ha presentado un gran desarrollo en los últimos años, debido a su creciente aplicación en varios campos de la ciencia, la tecnología, las disciplinas sociales y administrativas. Muchos países hacen grandes esfuerzos en el diseño de currículos, y materiales específicos, en los diferentes niveles de enseñanza de la Probabilidad y Estadística. Este esfuerzo también se manifiesta, en la existencia de revistas especializadas y eventos locales e internacionales que fomentan el desarrollo y fortalecimiento de una cultura estadística.

Por otra parte, se han detectado dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de la probabilidad, lo cual incide en la calidad de la educación, representando una problemática social que se expresa en la reprobación y deserción de los estudiantes.

Existen varias razones que justifican la propuesta de este taller: la primera es, la referente a nuestra experiencia como docentes: hemos percibido que los temas de probabilidad son de lo más complejo para los estudiantes de todos los niveles educativos; así lo reporta también la literatura en Educación Estadística (Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997). La segunda, es que en el currículo de probabilidad en nuestro sistema educativo en México está presente desde el nivel básico al superior, pero los alumnos terminan su instrucción sin haber adquirido el conocimiento y comprensión de significados. La tercera es que, así como los estudiantes tienen dificultades para entender la probabilidad, los profesores tenemos gran dificultad para enseñarla de manera comprensiva y clara. Esta problemática está asociada a varios factores: no hay mucha investigación en este campo que oriente a los profesores (Kavousian, 2005), no hay suficientes recursos didácticos para apoyar la enseñanza; los libros de texto que se usan para enseñar probabilidad y estadística, dan mayor importancia al procedimiento que a la comprensión, y el acercamiento exploratorio es reducido (Ortiz, Batanero, y Serrano, 2007).

Marco teórico

En la teoría de situaciones didácticas, Brousseau nos habla de la *situación didáctica* (*relación didáctica* (Flores y Barrera, 1999). Este es un sistema de interacciones constituido por el estudiante (o grupo de estudiantes). Esta interacción es, el profesor y un saber determinado (los problemas propuestos por él Una *situación-didáctica* (o fase de la situación didáctica) está asociada con un espacio y tiempo donde la gestión de la situación recae enteramente en el estudiante según Brousseau, citado por Godino (2003). El profesor inicia, establece y monitorea la actividad del estudiante (y el aprendizaje asociado) mediante el manejo de la evolución de la situación. Haciendo esto el profesor define el *contrato didáctico* que gobierna la *relación didáctica* y define las condiciones de su existencia. Este *contrato* es un juego de reglas y estrategias de la *situación didáctica*. En otras palabras, es la justificación que el profesor tiene para presentar esta situación. Es el juego de actitudes que el estudiante espera del profesor y que el profesor espera del estudiante (Brousseau, 1997).

En cada situación a-didáctica, *término definido por Brousseau (1997),*está presente el momento de validación que puede ser establecido entre los estudiantes o entre el estudiante y el profesor. Es decir se discute la verdad y la eficacia de la solución. Para la validación de los conocimientos matemáticos generados por el estudiante, se supone que la argumentación se da como condición necesaria. En la *Teoría de situaciones didácticas*, el momento de la validación juega un papel crucial debido a que la aceptación de una estrategia de solución está acompañada de una prueba o una demostración (Guerrero, Sánchez, y Lurduy, 2005).

Desarrollo del taller

Explicación del propósito y modalidad de trabajo del presente taller.

El equipo de trabajo tiene que ser capaz de analizar, discutir, socializar y presentar diversas propuestas de solución a los problemas planteados. Haciendo hincapié en los criterios de selección para el trabajo en el aula como son: 1.Heterogeneidad. Los grupos no deben ser estudiantes autoseleccionados. 2. Recalcar la importancia de tiempo para trabajar en grupo en tareas fuera de clase. 3. Evitar el aislamiento de estudiantes en situación de riesgo en los equipos.

Se presento y detallo la información que se requiere para mediante la técnica expositiva e interactiva, de las actividades propias del taller, mostrando la forma de trabajo para las sesiones, presentando los problemas seleccionados con el fin de evidenciar las diversas formas conceptuales y esquemáticas del tratamiento y resolución de los mismos.

Debido a la complejidad de los problemas seleccionados fueron presentados para su discusión entre los integrantes del taller, orientados por los expositores. Este análisis guiado nos permitió bosquejar y poner en contexto los problemas planteados, identificando los aspectos relevantes presentando las diversas formas conceptuales y esquemáticas del tratamiento y resolución de los mismos, así como expresiones algorítmicas. Se analizaron y discutieron los problemas junto con propuestas bajo la estrategia siguiente:

1) Esquematizar, diagramas, dibujos y/o tablas (modelos matemáticos).
2) Técnicas de conteo
3) Codificación:
4) Aplicación de los Axiomas de probabilidad
5) Operaciones algebraicas
6) Interpretación y conclusión

M1.1. Un dado se construye de tal forma que un 1 o un 2 ocurran dos veces más frecuentemente que un 5, mismo que se presenta tres veces más seguido que un 3, un 4 o un 6.

De acuerdo al enunciado podemos construir la distribución de probabilidades.

x	1	2	3	4	5	6	Sumatoria P(x)
P(x)	2a	2ª	a/3	a/3	a	a/3	6 a = 1

Es posible construir un modelo algebraico que nos permita calcular probabilidades para cada uno de los resultados posibles.

$2a + 2a + a/3 + a/3 + a + a/3 = 6a$	$\Longrightarrow$ $a = 1/6$

Si el dado se lanza una vez, encuentre la probabilidad de que:

a) El número sea par P(2)+P(4)+P(6) = 2 a + 2a/3 = 1/3 + 1 / 9 = 4/9

b) El número sea un cuadrad o perfecto P(1) + P(4) = 2 a + a/3 = 7a/3 = 7/18

c) El número sea mayor que 4. P(5) + P(6) = a + a/3 = 4a/3 = 2/9

M1.2. En una prueba aplicada a niños pequeños, se les pide hagan corresponder cada uno de los tres dibujos de animales con la palabra que identifica a cada animal. Si los niños no saben leer tendrán que asignar aleatoriamente las tres palabras con los tres dibujos. Encuentre la distribución de probabilidad para X, el número de correspondencias correctas.

 = 1	Gato = G	1° .- Codificamos figura y palabra
 = 2	Pato = Pa	2°.- Valores de X = 0,1,2 (cero, uno y dos aciertos) sí acierta 2 el 3° también.
 = 3	Elefante = E	3°.- Aplicamos técnicas de conteo para conocer el espacio muestral calcular probabilidades.

Empecemos por la probabilidad de acertar las tres relaciones de figura y palabra.

⇨ *Relacionar correctamente tres pares:*

[1 y E] = A	[2 y G] = B	[3 y Pa] = C	*Codificamos cada par de Figura y palabra Correctamente.*
A	B	C	*Existen 6 maneras diferentes como Pueden suceder tres relaciones correctas " Como son tres" A B C Permutados = 3! = 6 casos de 36*
A	C	B	
B	A	C	
B	C	A	
C	A	B	
C	B	A	

Analicemos la probabilidad de dos aciertos que es lo mismo para tres aciertos.

P(2 aciertos) = [P(1) P(E)] [P(2) P(G)] [P(3)P(Pa)]
P(2 aciertos) = [(1/3) (1/3)] [(1/2) (1/2)] [(1/1) (1/1)] = (1/36) (6) = 6/36 = 1/6
P(1)=P(E)=1/3 (Ya que tenemos tres figuras y tres palabras y solo escogemos una de cada una), P(2)=P(G)=1/2 (solo quedan dos figuras y dos palabras y solo escogemos una de cada una). Solo queda una figura y una palabra P(3)=P(Pa)=1

Para el caso de obtener un acierto tenemos tres casos:

Caso I P(1 acierto) = [P(1) P(E)] [P(2) P(Pa)] [P(3)P(G)] *(solo un par es correcto)* A *(acierta)* D *(falla)* E *(falla) codificamos*
Caso II P(1 acierto) = [P(2) P(G)] [P(1) P(Pa)] [P(3)P(E)] *(solo un par es correcto)* B *(acierta)* F *(falla)* H *(falla) codificamos*
Caso III P(1 acierto) = [P(3) P(Pa)] [P(2) P(E)] [P(1)P(G)] *(solo un par es correcto)* C *(acierta)* I *(falla)* J *(falla) codificamos*
P(1 acierto) = [(1/3) (1/3)] [(1/2) (1/2)] [(1/1) (1/1)] = (1/36) (6) = 6/36 = 1/6 (*Para cualquiera de los tres casos la probabilidad es 1/6*)
P(1)=P(E)=1/3 (Ya que tenemos tres figuras y tres palabras y solo escogemos una de cada una), P(2)=P(Pa)=1/2 (solo quedan dos figuras y dos palabras y solo escogemos una de cada una). Solo queda una figura y una palabra P(3)=P(G)=1

Caso I	A D E Permutamos 3 != 6			
Caso II	B F H Permutamos 3! = 6			
Caso III	C I J Permutamos 3! = 6			*Total 18 casos de 36*
P(0 aciertos) = 1- P(2 aciertos) - P(1 acierto) = 1 – 1/6 – 1/2 = 2/6 = 1/3				
x	0	1	2	Sumatoria P(x)
P(x)	2/6=1/3	18/36=1/2	6/36=1/6	12/36+18/36+6/36 = 1

M1.3. Mr. Bandido es un bien conocido ranchero y no tanto bien conocido como ladrón de ganado (abigeo). Mr. bandido tiene 20 cabezas de ganado listas para venderlas, 16 de estas cabezas son de Mr. bandido y consecuentemente tienen su hierro (marca) las otras 4 tienen hierros (marcas) diferentes. Mr. bandido conoce que el inspector en la plaza de venta del ganado checa el 20% de cualquier envío de ganado, Mr. bandido tiene dos camiones uno con capacidad para todas las cabezas de ganado y otro con capacidad de 10 vacas. Mr. bandido considera que tiene cuatro estrategias diferentes para seguir en su intento de comercializar sin ser atrapado.

a) Defina las estrategias de Mr. Bandido.

b) ¿Cuál estrategia minimiza la probabilidad de que Mr. bandido sea descubierto?

c) ¿Cuál es la probabilidad de ser descubierto bajo cada estrategia?

Códigos: 1 = vaca legal 0 = vaca robada

Estrategia1: Utilizar el camión de capacidad 20 cabezas un sólo envío.

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 20= 4 vacas a inspeccionar*				*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*	*3ª vaca*	*4ª vaca*		
I	0	1	1	1	1	1 manera	364/969
II	1	1	1	1	0	4 maneras	casos que puede ser descubierto suman 605/969
III	2	1	1	0	0	6 maneras	
IV	3	1	0	0	0	4 maneras	
V	4	0	0	0	0	1 manera	

Caso I no lo descubren P(X=0) = (16/20)(15/19)(14/18)(13/17) = 364/969

Casos II,III,IV y V es descubierto por lo tanto:

Sabemos que: P(S)= 1= P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)

P(1)+P(2)+P(3)+P(4) = 1 – P(0) = 1- 364/969 = 605/969 = 0.6243

Estrategia 2: Utilizar el camión de capacidad 10 cabezas dos envíos.

1er envío 10 vacas legales no es descubierto.

2° envío 10 vacas 6 legales 4 robadas

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 10= 4 vacas a inspeccionar*		*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*		
I	0	1	1	1 manera	1/3
II	1	1	0	2 maneras	casos que es descubierto suman 2/3
III	2	0	0	1 maneras	

Caso I no lo descubren P(X=0) = (6/10)(5/9= 30/90= 1/3

Casos II y III es descubierto por lo tanto:

Sabemos que: P(S)= 1= P(0)+P(1)+P(2

P(1)+P(2)= 1 – P(0) = 1- = (6/10)(5/9)= 1-1/3= 2/3= 0.6666

Estrategia 3: Utilizar el camión de capacidad 10 cabezas dos envíos.

1er envío de 10 vacas 9 legales y 1 robada.

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 10= 4 vacas a inspeccionar*		*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*		
I	0	1	1	1 manera	4/5
II	1	1	0	2 maneras	1/5 desc.

2° envío de 10 vacas 7 legales y 3 robadas.

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 10= 4 vacas a inspeccionar*		*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*		
III	0	1	1	1 manera	7/15
IV	1	1	0	2 maneras	casos que es descubierto suman 8/15
V	2	0	0	1 maneras	

Nota: debemos notar que los caso fueron marcados de I al V ya que hay una cuestión importante de cómo se debe analizar el problema:

El espacio: *muestral* es= *casos que no es descubierto + casos donde es descubierto*

P(S)= 1= P(no descubren)+P(lo descubren) *por lo tanto:*

P(no descubren) = P(caso I) P(caso III) = [(9/10)(8/9)][(7/10)(6/10)] = 28/75

1 = 28/75 + P(lo descubren) así: P(lo descubren)= 1- 28/75 = 47/75=0.6266

Estrategia 4: Utilizar el camión de capacidad 10 cabezas dos envíos.

Dos envíos de 10 vacas 8 legales y 2 robadas.

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 10= 4 vacas a inspeccionar*		*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*		
III	0	1	1	1 manera	
IV	1	1	0	2 maneras	casos que es descubierto suman
V	2	0	0	1 maneras	

Nota: Es parecido al anterior analizamos en similar forma:

P(S)=1=P(no descubren)+P(lo descubren) así: P(no descubren)=P(caso I)P(caso III)

= [(8/10)(7/9)][(8/10)(7/10)]=28/45)(28/45) =784/2025

1= 784/2025 + P(lo descubren) así: P(lo descubren)=1-784/2025 =1241/2025= 0.6128

Conclusión: las estrategias 1,3 y 4 podría pensarse que cualquiera de ellas disminuye el riesgo de ser descubierto.

2ª Sesión. Se trabajo con un segundo bloque de problemas don diversas estrategias de solución.

M2.1 Se tienen que asignar aleatoriamente dos contratos de construcción a una, o más, de tres empresas: I, II y III. Cualquier empresa puede recibir más de un contrato. Si cada contrato produce una ganancia de $90, 000 (dólares) para la empresa, calcule la ganancia esperada para la empresa I. Si las empresas I y II pertenecieran realmente al mismo propietario, ¿cuál sería la ganancia total esperada del dueño?

Nota: nos limitaremos a obtener las probabilidades, ya que el interés del taller es analizar la obtención de probabilidades.

CASO X i	*Primera Asignación*	*Segunda asignación*	*P (Xi)*	
1	*A 1*	*A 2*	*(1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	*Cada caso se permuta: n! = 2! = 2 Por lo que son 18 en total*
2	*A 1*	*B 2*	*1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	
3	*A 1*	*C 2*	*1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	
4	*A 2*	*B 1*	*1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	
5	*A 2*	*C 1*	*1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	
6	*B 1*	*C 2*	*1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	
7	*B 2*	*C 1*	*1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	
8	*B 1*	*B 2*	*1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	
9	*C 1*	*C 2*	*1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9*	

La distribución de probabilidad quedaría para la empresa A: (Para cualquiera de las empresas es lo mismo)

X= cantidad de contratos asignados	X=0 Casos 6,7,8,9	X=1 Casos 2,3,4,5	X=2 Caso 1	Sumatoria P(Xi)
P(Xi)	(1/9)(4)=4/9	(1/9)(4)=4/9	1/9	2(4/9)+1/9= 9/9 = 1

M2.2 Un vendedor de equipo pesado puede entrevistar a uno o dos clientes diariamente con una probabilidad de 1/3 y 2/3, respectivamente. Cada entrevista tendrá como resultado una no venta o una venta de $50,000 (dólares) con probabilidades de 0.9 y 0.1, respectivamente. Obtenga la distribución de probabilidad para las ventas diarias. Encuentre la media y la desviación estándar de las ventas diarias. Codificamos: 1= compra 0= no compra, P(1) = 0.1 P(0) = 0.9

Persona A

Caso=Xi	A	P(Xi)
I	1	(2/3)(0.1)(0.1) = 1/150
II	0	(2/3)(0.1)(0.9) = 3/50

Personas B y D

Caso=Xi	B	D	P(Xi)
III	1	1	(2/3)(0.1)(0.1) = 1/150
IV	1	0	(2/3)(0.1)(0.9) = 3/50
V	0	1	(2/3)(0.9)(0.1) = 3/50
VI	0	0	(2/3)(0.9)(0.9) = 27/50

P(S) = 1/30 +9/30 + 1/150 + 3/50 + 3/50 + 27/50 = 1

Es importante señalar y resaltar lo referente al aprendizaje cooperativo. De manera que cumplan criterios que definen la cooperación:

- Interdependencia positiva. Los miembros del equipo deben confiar el uno del otro.
- La responsabilidad individual, de la asignación de las tareas.
- La interacción cara a cara, por lo menos parte del tiempo, parte del aprendizaje se lleva a cabo como equipos de discusión y debate sobre las estrategias de conflicto y soluciones.
- Desarrollo y uso adecuado de las relaciones interpersonales para el trabajo en equipo, incluyendo liderazgo, comunicación, y resolución de conflictos.
- Es necesario tener presente una auto-evaluación de rendimiento del equipo.

Conclusiones

La dinámica de trabajo propuesta permitió establecer un vínculo estrecho de los maestros, participantes y expositores. Se podrá percibir las dificultades en los esquemas individuales y proponer estrategias alternativas de solución en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Permitiendo que los tiempos de aprendizaje se manejen de manera flexible, privilegiando la adquisición del sentido de los contenidos conceptuales abordados. Con esta experiencia, se posibilitará cambios en el futuro desempeño en el aula de los participantes. Es necesario que la capacitación docente sea un proceso continuo, sistemático y permanente.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics* , *32* 199.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic.

Flores, H. y Barrera, S. (1999). Brousseau in action: Didactical situation for learning how to graph functions. *The Fourth Asian Technology Conference in Mathematics*. Guangzhou, China.

Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Recuperado el 25 de Abril de2010, de Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/monografiatfs.pdf

Guerrero, F., Sánchez, N. y Lurduy, O. (2005). La práctica docente a partir del modelo DECA y la Teoría de las situaciones didácticas. *Enseñanza de las Ciencias. Número Extra. VII Congreso* , 1 - 5.

Kavousian, S. (2005). The development of combinatorial thinking in undergraduate students. *Psychology of Mathematics Education of North America, Annual Meeting* 3). Roanoke, Virginia.

Ortiz, J., Batanero, C., y Serrano, L. (2007). Modelización y simulación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto de educación secundaria. *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* 129). Huesca, España.