SERIES: UNA INTRODUCCION

Abel Baca Ramírez, Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora México
baca@gauss.mat.uson.mx, guty@gauss.mat.uson.mx

Resumen. Se propone una introducción al estudio de series, mediante el planteamiento de situaciones problemáticas, que se plantean a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora. Se espera que a partir de este planteamiento, ellos vayan construyendo significados personales acerca de los objetos matemáticos: series, series convergentes, series divergentes, series geométricas así como de los principales criterios de convergencia de series.

Palabras clave: series, convergente, divergente, geométrica, criterios

Abstract. One way to introduce series in engineering students is presented in this paper. A problematic situation is offered to students of a career in engineering of the University of Sonora, and then we hope they construct personal meanings about series, convergent series, divergent series, geometric series and the principal convergence criterions.

Key words: sequences, convergent, divergent, geometric, criterions

Introducción

En el semestre 2007-1 se aplicó un cuestionario a estudiantes de las carreras de Ingeniería de la Universidad de Sonora. El cuestionario contenía 3 situaciones-problema acerca de 3 temas diferentes de matemáticas. Uno de los temas era el de Series numéricas. El problema era el siguiente:

Se tiene un primer cuadrado, y a partir de él se construye un segundo cuadrado uniendo los puntos medios de los lados del primer cuadrado, y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de todos los cuadrados. Ver Figura 1.

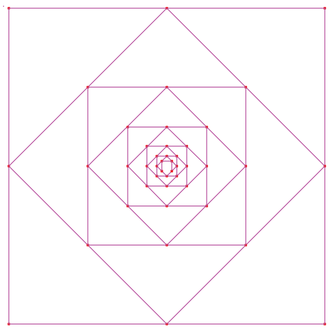

Figura 1: Aquí se muestran los primeros 11 cuadrados

El objetivo de dicho cuestionario era el de observar qué tipos de respuestas daban los alumnos a los que se les aplicó. Posteriormente se harían modificaciones al problema y se complementaría con preguntas para seguir observando el tipo de respuestas.

Alumnos de las carreras del área de Contabilidad y Administración, cuyos temas de cálculo no incluyen el estudio de Series, sólo hicieron comentarios sueltos, aduciendo que la suma era infinita y que no se podía calcular; algunos dijeron que necesitaban más datos; y muchos no dieron ninguna respuesta. Los alumnos de las carreras de Ingeniería hicieron desarrollos muy intuitivos, es decir, hicieron cálculos en lo particular, primero de la longitud del lado del cuadrado al que le querían calcular el área. Hicieron sumas de áreas de los primeros cuadrados, algunos calcularon el área de los primeros once cuadrados, que son los que se muestran en la figura. A partir de esos resultados, hicieron comentarios respecto a la suma total de áreas, algunos aseguraban que la suma no pasaría de dos veces el área del primer cuadrado.

Ninguno hizo referencia a una Serie Geométrica Convergente, pero más de uno trató de recordar alguna fórmula para hacer el cálculo final, identificando que se trataba de un problema relacionado con aspectos ya estudiados previamente por ellos.

Estos resultados muestran que los significados personales de los alumnos de Ingeniería de la Universidad de Sonora, respecto a Series y su Convergencia, no son los adecuados, es decir, están lejanos de los significados institucionales vertidos en el programa de la materia respectiva y de la bibliografía sugerida en dicho programa.

Con base en todo lo anterior, nos formulamos diversas interrogantes que si bien no constituyen planteamientos para la elaboración de un proyecto de investigación, si requerían analizarse para la elaboración de nuestra propuesta de enseñanza. Entre dichas preguntas teníamos las siguientes:

- *¿Para qué enseñar Series a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora?*
- *¿Qué enseñar de Series a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora?*
- *¿Cómo temas de Series enseñar a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora?*
- *¿Qué problemas de Ingeniería que involucren Series en su solución les interesa resolver a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora?*
- *¿Cómo acercar los significados personales acerca de Series de los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora, a los significados institucionales referenciados en el Programa de la Materia de Cálculo Diferencial* e *Integral II, de la Bibliografía sugerida por dicho programa y de nuestras observaciones y concepciones individuales?*

La problemática

Con el propósito de profundizar en nuestra comprensión del problema, nos dimos a la tarea de identificar los problemas que se presentan en el aprendizaje de las series por parte de los estudiantes, haciendo, por una parte, un análisis de nuestra experiencias docentes y de las observaciones realizadas con la aplicación del cuestionario ya señalado y, por otra, revisando investigaciones realizadas en matemática educativa sobre el particular. Adicionalmente entrevistamos a tres profesores de cursos de ingeniería posteriores a los de cálculo, en búsqueda tanto del señalamiento de problemas detectados como de concepciones y visiones sobre la importancia del tema en sus cursos y, quizá, práctica profesional.

Todos estos aspectos nos condujeron a plantear, de origen, la existencia de una problemática que es muy similar a la que se señala en Rosas (2007), "encontramos deficiencias en los estudiantes como las siguientes:

- *Alumnos con conceptos incompletos o incorrectos acerca de sucesión y serie.*
- *Confusión en el manejo del concepto de sucesión y serie.*
- *Uso de métodos para analizar la convergencia de sucesiones al momento de estudiar la convergencia de una serie numérica.*
- *Confusión en el manejo de los diversos criterios de convergencia aplicables a las series numéricas.*
- *Uso de los criterios de convergencia mediante ensayo y error.*
- *Uso de criterios de convergencia de series para estudiar la convergencia de sucesiones infinitas.*
- *Problemas (en materias posteriores) para resolver algún tipo de actividad que involucre el manejo de series numéricas y de potencias.*
- *Comentarios de otros departamentos indicando las dificultades de los alumnos al abordar las aplicaciones que requieren el manejo de sucesiones y series.*
- *Alto número de alumnos con calificaciones no satisfactorias en los exámenes que incluyen estos temas."*

Por otra parte, en su trabajo de investigación, en el cual analizan el tratamiento que se da a las series en estudios superiores y presentan los resultados de trabajos desarrollados con profesores y alumnos de la Universidad de Jaén, así como el resultado de análisis de las concepciones sobre series de algunos textos de cálculo, Sánchez Gómez y Marcolini Bernardi (2006), "Sugerimos tomar en cuenta, a la hora de diseñar una propuesta alternativa de enseñanza de series, las siguientes cuestiones:

a) Asignar más tiempo a la construcción del concepto de Series y Convergencia
b) Apoyarse en aplicaciones prácticas, modelos y situaciones problema para la construcción de la noción de serie

Tomando en cuenta estas consideraciones, nuestro problema consiste en diseñar una secuencia didáctica para la Enseñanza de Series en las carreras de Ingeniería de la Universidad de Sonora, tomando en cuenta las características intrínsecas del conjunto de estudiantes (alumnos de las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería de Minas, Ingeniería Industrial, Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería Química, Geología) al que va dirigido el Curso de Cálculo Diferencial e Integral II, y específicamente el Temas de Series y Convergencia de Series.

Dicha secuencia didáctica deberá tomar en cuenta de manera muy importante, las respuestas a las preguntas mencionadas anteriormente: ¿Para qué enseñar?, ¿Cómo enseñar? y ¿Qué enseñar? de Series y su Convergencia a los estudiantes de las carreras de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

En concordancia con nuestro propio conocimiento y los resultados de las entrevistas a docentes de las carreras de ingeniería, ratificamos nuestra convicción de que el tema de Series es importante en la formación de un ingeniero, cualquiera que sea su dominio profesional.

Un tema recurrente en las entrevistas fue la necesidad de que los estudiantes tuvieran un nivel adecuado de conocimientos de las series de potencias, las cuales desempeñan un papel notable en la solución de algunas ecuaciones diferenciales y, en general el tema de Series es soporte para el estudio de otras disciplinas, que marcadamente aparecen en los estudios de posgrado de las ingenierías.

Estas delimitaciones nos dan también una pauta para promover la construcción de significados personales de conformidad con una selección adecuada de significados institucionales que deberán plasmarse en los documentos correspondientes sobre el tema.

Para ello se requiere un marco teórico que abarque aspectos Epistemológicos, Cognitivos y Didácticos, que son básicos para formular cualquier sistema de enseñanza, y en particular de Enseñanza de las Matemáticas, y que también nos proporcione elementos teóricos que nos permita dar respuesta a las preguntas ¿Para qué enseñar series? ¿Qué enseñar de Series? y ¿Cómo enseñar Series? a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora. El marco teórico que encontramos más adecuado para los propósitos mencionados, es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2008).

Descripción de la propuesta

La propuesta está compuesta por nueve bloques de problemas, y cada bloque representa un tema. Los temas tratados son los siguientes:

Bloque 1. El Problema de Carlita

Bloque 2. Representación de Números Racionales por medio de Sumas Infinitas

Bloque 3. Series Geométricas

Bloque 4. Una Serie Telescópica

Bloque 5. La Serie Armónica

Bloque 6. Propiedades de las Series Convergentes

Bloque 7. Criterios de Convergencia

a) Criterio de Divergencia

b) Criterio de Comparación

c) Criterio de la Integral

d) Criterio del Cociente

Bloque 8. Series-P

Bloque 9. Series Alternantes

Esta propuesta se complementa con un problemario. Se sugiere que se proponga a los estudiantes, como un reforzamiento de los significados personales construidos en la aplicación de la propuesta, y puede ser una actividad extra clase o como una tarea.

Metodología

La propuesta se aplicó a 2 grupos de estudiantes de carreras de ingeniería, que estaban cursando la materia Cálculo II durante el semestre 2009-1, un grupo tenía 35 estudiantes y el otro 30. Se dividió a los grupos en equipos de 5 estudiantes cada uno, y se les fueron presentando los problemas por bloques, y para cada bloque se destinó un tiempo de 50 minutos, que es lo que dura aproximadamente una clase. Los equipos se formaron por afinidad entre los estudiantes dándoles la libertad de escoger a cada quien el equipo al que querían pertenecer. Se le entregaba a cada estudiante un bloque en forma de actividad, se les daba un tiempo de 5 minutos para que leyeran y entendieran la situación planteada. Se les preguntaba si había alguna duda en el planteamiento de la situación y se les respondía mínimamente lo necesario. Se les pedía que por equipo plantearan una solución al problema, después de debatir entre los integrantes de cada equipo, durante 20 minutos. Luego se le pedía a cada equipo que plantearan sus respuestas, y que se abriera una discusión dirigida por el profesor, durante 20 minutos. Los 5 minutos restantes se invertían en consensar respuestas y para su validación. Si algún problema exigía una inversión de tiempo mayor, se continuaba al día siguiente con dicha actividad.

Una muestra de problemas

El Problema de Carlita

Carlita es una niña de 11 años y cursa quinto año de primaria. Ella quiere hacerle un regalo sorpresa a su papá el día del padre, y para ello ha pensado construir un porta-retrato usando cuadrados de fomi de diferentes colores y colocar en él una foto de ella misma sabiendo que a su padre le encantaría tener una foto de ella.

Carlita recortará un cuadrado cuyo lado mide 1 dm. Luego pegará encima de ese cuadrado, otro cuadrado de diferente color, cuyos vértices quedarán en los puntos medios del primer cuadrado. Enseguida recortará otro cuadrado de diferente color al anterior, y hará lo correspondiente. Sucesivamente irá colocando cuadrados hasta que ella lo considere conveniente. El último cuadrado será la foto que ella quiere colocar en dicho porta-retrato.

Pero Carlita está indecisa en cual será esa foto, pues tiene muchas fotos de distintos tamaños que podría usar para dicho regalo.

Ella quiere estar segura de que el material que compre sea suficiente para construir su porta-retrato, así que quiere tener una idea de cuanta cantidad de material ocupará a lo máximo independientemente del tamaño de la fotografía que coloque en su porta-retrato. Su amiga Estefanía le ha dicho que compre muchos cuadrados de fomi de distintos colores que tengan de lado 1 dm para que no le falte material.

Inteligentemente, Carlita piensa que debe haber una manera de saber cual sería la suma de las áreas de todos los cuadrados que se necesiten, independientemente del número de ellos.

Carlita le pregunta a su maestro respecto del problema que enfrenta. Su maestro le dice que cursó 2 años en la escuela de Ingeniería Civil de la Unisón y recuerda que en su curso de Cálculo II, le hablaron de cómo sumar muchos números, que en este caso serían las áreas de todos los cuadrados que Carlita quiere poner en su porta-retrato.

Carlita le dice a su papá que la lleve a la Universidad de Sonora con algún alumno de Ingeniería Civil para preguntarle al respecto. Carlita no quiere que su padre se entere de cuál es el motivo de dicha pregunta, así que sólo le dice que quiere entrevistar a algún alumno de Ingeniería Civil para una tarea de investigación de su escuela.

Supongamos que Carlita viene con usted y le pregunta cómo puede resolver dicho problema. ¿Podría usted ayudarle?

La idea de Carlita está plasmada en la figura 2:

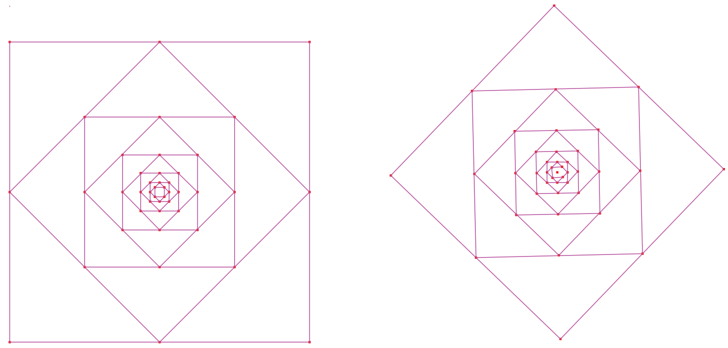

Figura 2: Modelo del portarretrato de Carlita

Contesta las preguntas que se hacen a continuación:

1. ¿Cuál es el área del primer cuadrado?
2. ¿Cuál es el área del segundo cuadrado?
3. ¿Cuál es el área del tercer cuadrado?
4. ¿Puede usted hallar una relación entre el área del tercer cuadrado y la del segundo?
5. ¿Cuál es el área del cuarto cuadrado?
6. ¿Podría usted dar una regla para obtener el área de cualquier cuadrado? Sugerencia: Llámele A1 al área del primer cuadrado, A2 a la del segundo, A3 a la del tercero, y así sucesivamente, es decir A_n sería la del n-ésimo cuadrado. ¿Puede usted dar una expresión para calcular el área de A_n?
7. Si observamos tenemos una sucesión de números A_1, A_2, A_3, A_4,…, An,…. Y nuestro problema consiste en sumar dichos números, es decir, obtener la suma $A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots+A_n+\ldots$ ¿Qué podría usted decir acerca de dicha suma?
8. Vamos a llamarle Sn a la suma de las áreas de los primeros n cuadrados. ¿Cuánto vale S_2?
9. ¿Cuánto vale S_3?
10. ¿Cuánto vale S_4?
11. ¿Cuánto vale S_5?
12. ¿Cuánto vale S_6?
13. ¿Cuánto vale S_7?
14. ¿Es posible dar una expresión para calcular dichas sumas en términos de n?
15. ¿Podría usted expresarla?
16. Si ya tiene usted una manera de calcular la suma de las áreas de cualquier número n de cuadrados, ¿podría usted darle ya una respuesta a Carlita? Si su respuesta es sí, ¿cuál sería su respuesta y porqué?
17. Si su respuesta fue no, ¿por qué?

Este problema es una aplicación del problema original que apareció en el cuestionario, a partir del cual se empezó el desarrollo de este trabajo.

Se le pidió a Carlita que hiciera el portarretrato y se observó lo que ella hacía para recortar los cuadrados, y se retomaron algunas ideas de lo hecho por Carlita. Por ejemplo, el hecho de doblar las esquinas de un cuadrado, hasta los puntos medios de los lados, para obtener el siguiente cuadrado.

Un Problema de triángulos

Observe la Figura 3

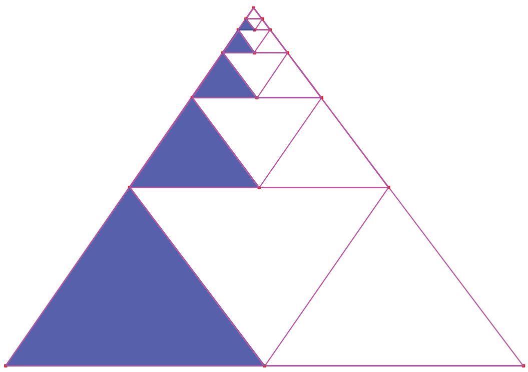

Figura 3

Es un triángulo equilátero, y se han unido los puntos medios de sus lados, luego en el triángulo de arriba se ha hecho lo mismo, y así sucesivamente.

¿Qué puede decir de la suma de las áreas de todos los triángulos sombreados?

Un problema de áreas entre curvas:

Observe la Figura 4

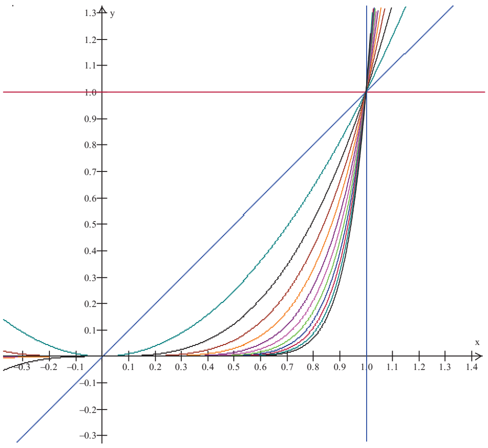

Figura 4

La figura 6 muestra las gráficas de las funciones $y=1$,$y=$ soy= x^2,$y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$, $y=x^6$, $y=x^7$, $y=x^8$, $y=x^9$, $y=x^{10}$ en el intervalo $[0,1]$.

Preguntas

1. ¿Cuánto es el área entre las gráficas de $y=1$ y $y=x$, en el intervalo $[0,1]$?
2. ¿Cuánto es el área entre las gráficas de $y=x$ y $y=x^2$, en el intervalo $[0,1]$?
3. ¿Cuánto es el área entre las gráficas de $y=x^2$ y $y=x^3$, en el intervalo $[0,1]$?
4. ¿Cuánto es el área entre las gráficas de $y=x^3$ y $y=x^4$, en el intervalo $[0,1]$?
5. ¿Observa algún patrón en la sucesión de números obtenidos?
6. ¿Puede decir cuál es el patrón?
7. Ahora calcule el área entre las gráficas de $y=x^n$ y $y=x^{n+1}$.
8. Si este proceso se continúa indefinidamente, entonces se obtiene una sucesión infinita de números que representan el área entre las curvas $y=x^n$ y $y=x^{n+1}$ para $n=0,1,2,3,\ldots$Representa la suma de todas las áreas como una serie.
9. ¿Geométricamente, si juntamos todas esas áreas, ¿qué es lo que se obtiene?
10. Entonces, la serie anterior debe converger al valor obtenido geométricamente. Explique.

El problema de la torre inclinada

Se apilan bloques idénticos de una unidad de longitud sobre el borde de una mesa. El centro de gravedad del bloque superior debe quedar sobre el bloque debajo de él, el centro de gravedad de los dos bloques superiores debe quedar sobre el bloque debajo de ellos, y así sucesivamente (Ver Figura 5).

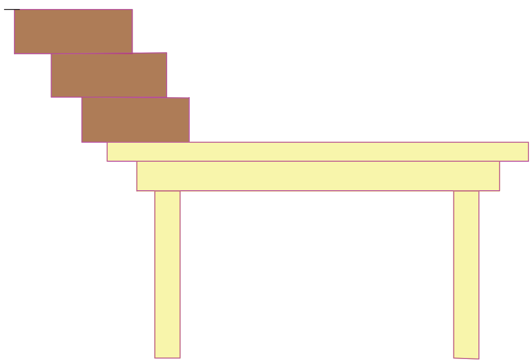

Figura 5

Preguntas:

1. Si la pila de bloques sólo consta de un solo bloque, ¿Cuánto sería su desplazamiento $x1$ a partir del borde izquierdo de la mesa?

2. Si la pila de bloques consta de dos bloques, ¿Cuánto sería el desplazamiento x1 del bloque inferior? ¿Cuál sería el desplazamiento x2 del bloque superior?
3. Si la pila de bloques consta de tres bloques, ¿Cuánto valen los desplazamientos x1, x2 y x3?
4. Si la pila de bloques consta de n bloques, ¿Cuánto valen los desplazamientos x1, x2, x3, …, xn?

Referencias bibliográficas

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Rosas, A. (2007). *Transposición didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del discurso escolar actual en el nivel superior*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Sánchez Gómez, C. y Marcolini Bernardi, M. (2006). *Análisis comparativo de las concepciones sobre series numéricas en universidades latinoamericanas y españolas*. Universidad de Jaén. España.