

## EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO SOBRE JUEGO EQUITATIVO EN FUTUROS PROFESORES

Nordin Mohamed, Juan J. Ortiz, Luis Serrano  
Universidad de Granada  
nordin.mohamed@gmail.com, jortiz@ugr.es

España

**Resumen.** El objetivo de este trabajo es evaluar los conocimientos matemático-didácticos de futuros profesores de Educación Primaria en relación a la idea de juego equitativo. Para evaluar el conocimiento común del contenido se analizan las soluciones dadas por futuros profesores de Educación Primaria españoles a un problema abierto; para evaluar el conocimiento especializado del contenido se pide a los participantes identificar los contenidos matemáticos en la tarea; y para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes se les pide identificar, entre un grupo de respuestas a la tarea proporcionada por alumnos de Educación Primaria, cuáles son correctas e incorrectas. Los resultados sugieren la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores de Educación Primaria, tanto en su conocimiento matemático, como en el conocimiento pedagógico del contenido.

**Palabras clave:** evaluación, conocimiento matemático, profesores, probabilidad

**Abstract.** The aim of this study is to assess the mathematical knowledge of future teachers of primary education in relation to the idea of fair game. Common knowledge of content is assessed through the responses given by future spanish teachers of primary education to an open-problem; specialized knowledge of content is assessed from their analyses of the tasks' mathematical content; and knowledge of content and students is assessed from their assessment of responses provided by primary school students. The results suggest the need to strengthen the training of future primary school teachers, both in their mathematical knowledge as well as in the pedagogical content knowledge.

**Key words:** : assessment, mathematical knowledge, teachers, probability

### Introducción

El conocimiento matemático para la enseñanza es “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 374). Dentro del conocimiento del contenido matemático se distinguen el Conocimiento Común del Contenido (CCC), que es el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona; Conocimiento Especializado del Contenido (CEC), que incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, elegir una secuencia de enseñanza; y el Conocimiento en el Horizonte Matemático (CHM), que incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias.

Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball & Schilling (2008) proponen tener en cuenta el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCE), que es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular; Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CCEn), que incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas; y Conocimiento del Currículo (CC).

El marco teórico utilizado ha sido el propuesto en Godino (2009), quien construye un modelo de niveles y facetas del conocimiento matemático didáctico del profesor que engloba los citados anteriormente y plantea, asimismo una guía para la formulación de cuestiones de evaluación de dicho conocimiento.

La finalidad de este trabajo es evaluar los conocimientos de los futuros profesores de Educación Primaria en relación con la idea de juego equitativo. Más concretamente, se centra en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes, utilizando la metodología y tipos de consignas sugeridas para estos conocimientos en Godino (2009). A continuación se presentan los antecedentes del trabajo, la metodología utilizada y los resultados obtenidos.

### Antecedentes

Comprensión de la idea de juego equitativo en niños y adolescentes

Watson & Collis (1994) estudian las estrategias que siguen los niños para decidir si un dado es o no sesgado, encontrando que, aproximadamente la mitad de los alumnos creían que algunos números tenían más posibilidad que otros de salir, incluso en dados equitativos.

Lidster, Watson, Collis & Pereira-Mendoza (1996) describen un estudio con alumnos de 8 a 14 años en los que se preguntó a los alumnos cuáles, entre una serie de dados, eran o no sesgados. Los autores creen que la noción de equitatividad y sesgo se desarrolla antes del comienzo de la escuela y se preguntan si hay un desajuste entre el aprendizaje previsto por el profesor y el conocimiento construido por el alumno. También cuestionan si la comprensión de la idea de sesgo y equitatividad implica la comprensión previa de la idea de muestreo.

Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz (1999) analizan las concepciones de los niños entre 10 y 14 años. La mayoría de ellos demostraron una adecuada concepción del juego equitativo, aunque hubo una gran variedad en las concepciones de los alumnos, desde los que no diferencian entre sucesos equiprobables y no equiprobables, hasta los que son capaces de resolver correctamente todos los problemas.

Scholtzmann & Anderson (1994) consideran que, incluso los niños más jóvenes, tienen una intuición correcta sobre la esperanza matemática, teniendo en cuenta, tanto la probabilidad, como el valor del premio para tomar sus decisiones. Sin embargo, tanto la asignación de probabilidad, como la puesta en relación del premio y la probabilidad de ganar sigue, con frecuencia, estrategias aditivas.

### Formación de profesores para enseñar probabilidad

Algunas investigaciones señalan la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad en los futuros profesores. Por ejemplo, Azcárate (1995) en un estudio realizado con 57 futuros profesores de Educación Primaria, encontró que muy pocos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios. Se detectó también falta de esquemas combinatorios y ausencia de instrumentos elementales para la asignación de probabilidades, cuantificando las expectativas de ocurrencia de un suceso desde criterios personales.

Ortiz, Mohamed, Serrano y Rodríguez (2009) realizan un estudio con 167 futuros profesores de Educación Primaria proponiendo problemas elementales de comparación de probabilidades. En general, hacen uso de estrategias correctas, multiplicativas y correspondencias, que se corresponde con un buen nivel de razonamiento proporcional, aunque todavía hay un grupo importante que produce errores. Los errores más frecuentes están relacionados con el sesgo de equiprobabilidad, elementos subjetivos y falta de razonamiento proporcional.

Respecto a la idea de juego equitativo, Azcárate (1995) propone tres ítems basados en el lanzamiento de dos dados, preguntando si sería justo apostar a producto par, suma par y suma 5 o 6. Los participantes mostraron mucha dificultad para diferenciar los juegos equitativos y basan su argumento en la equiprobabilidad de los resultados, reglas aritméticas o argumentación combinatoria. En este trabajo completaremos la investigación de la citada autora, analizando, tanto el conocimiento matemático, como el conocimiento profesional en futuros profesores.

### Método

La muestra participante estuvo formada por 283 futuros profesores de Educación Primaria, estudiantes de segundo curso de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, España, que cursaban la asignatura *Matemáticas y su Didáctica*. Esta materia está estructurada en diferentes bloques de contenido, entre los que incluye uno sobre estadística descriptiva y probabilidad.

Los datos se recogieron en la mencionada asignatura a lo largo de dos sesiones. De acuerdo con Godino (2009), en la primera sesión se proporcionó a los estudiantes el problema presentado en la Figura 1, tomado de un libro de texto, pidiéndoles que resolvieran por escrito el apartado I, con el objetivo de evaluar su conocimiento común del contenido matemático. En la segunda sesión, se pidió que resolvieran por escrito el resto de los apartados, trabajando en pequeños grupos de dos o tres alumnos (N =31).

A continuación presentamos un problema tomado de un libro de texto, junto con algunas soluciones dadas por niños.

1. Resuelve el problema
2. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta
3. Señala cuál o cuáles de las respuestas dadas por alumnos son correctas
4. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea

Problema: Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:

- Lanzan dos dados y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana 1 ficha.
- Si resulta 3, 4, o 5 es Daniel quien gana una ficha.

¿Te parece que este juego es equitativo? ¿Por qué?

Respuestas de los niños:

Ana. "Es equitativo, pues cada uno tiene tres oportunidades de ganar"

Beatriz. "No es equitativo pues Carmen tiene doble oportunidad de ganar que Luis"

Carlos. "Para que fuese equitativo, la diferencia 0 tendría que salir el mismo número de veces que la 3. Pero la diferencia 0 sale 6 veces y la 3 solo 3 veces".

Figura 1. Cuestionario

Para evaluar el conocimiento especializado del contenido, en el apartado 2 se pide analizar el contenido matemático necesario para resolver el problema. En el apartado 3 se debe decidir, entre una serie de respuestas dadas por niños al problema, cuáles de ellas son correctas o incorrectas, y en el 4 indicar las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea evaluando por tanto, el conocimiento del contenido matemático y los estudiantes.

En el apartado 1, la respuesta correcta es que el juego no es equitativo, pues Carmen gana a la larga  $\frac{2}{3}$  de las veces, mientras Daniel gana  $\frac{1}{3}$ . En el apartado 2, se espera que los futuros profesores identifiquen algunos contenidos matemáticos presentes en el problema como: experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, casos favorables y posibles, idea intuitiva de convergencia, equitatividad, variable, valor esperado, razonamiento combinatorio elemental.

En el apartado 3, la respuesta correcta es la que proporciona Beatriz, que considera que el juego no es equitativo. Las respuestas incorrectas son las de Ana y Carlos. En el primer caso, porque Ana no tiene en cuenta la probabilidad de cada uno de los sucesos. El error de Carlos ocurre al no tener en cuenta el orden de los dados, considerando, por ejemplo, indiferentes las soluciones 14 y 41, que está relacionado con la falta de capacidad combinatoria descrita en Azcárate (1995).

En el apartado 4, las posibles dificultades que pueden tener los alumnos son no comprender bien la idea de juego equitativo, no concebir la convergencia a la larga, o manifestar el “Outcome approach” descrito por Konold (1995). También se pueden manifestar sesgos como el de equiprobabilidad referido por Lecoutre (1992) o tener fallos en la idea de esperanza matemática o en el razonamiento combinatorio.

### Conocimiento común del contenido

En este apartado se analizan las respuestas de los futuros profesores a la pregunta de si el juego era equitativo, y también los argumentos para justificarlas. Mediante un análisis de contenido de las mismas se han clasificado en respuestas correctas o parcialmente correctas, según que los estudiantes indiquen que el juego no es equitativo calculando correctamente la probabilidad de cada jugador o que los estudiantes indiquen que el juego no es equitativo porque Carmen tiene más posibilidades, pero sin calcular correctamente las posibilidades de cada jugador. El resto de las respuestas son incorrectas.

En la Tabla 1, observamos que han respondido correctamente solo 3 futuros profesores (1 %). De forma parcialmente correcta han contestado 102 futuros profesores (36 %), que indican que el juego no es equitativo porque Carmen tiene más posibilidades, pero no justifican su respuesta o cometen algún error, que se distribuyen en cinco categorías: R2, con 50 futuros profesores que no realizan ningún cálculo para justificar su respuesta; R3, con 18 futuros profesores que cometen algún error en los cálculos; R4, con 27 futuros profesores que cometen un error al identificar los casos posibles; R5, con 4 futuros profesores, que aunque manifiestan cierta percepción de la convergencia, no llegan a cuantificar las posibilidades de cada jugador y por último la categoría R6, con 3 futuros profesores, que no justifican la respuesta.

De forma incorrecta han contestado 120 futuros profesores (42.4 %), de los que 97 responden que el juego es equitativo y 23 que aunque consideran que el juego no es equitativo, sus justificaciones son incorrectas. Entre los que responden que el juego es equitativo hay cuatro categorías: R7, con 87 futuros profesores que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992); R8, con 5 futuros profesores que basan su afirmación en que se trata de un juego aleatorio; R10, con 2 futuros profesores que no aportan ninguna justificación y R11, con 3 futuros profesores que dan otro tipo de respuestas. Entre los que responden que el juego no es equitativo encontramos dos categorías: R9, con 13 futuros profesores que manifiestan una incorrecta percepción de la independencia y R11, con 10 futuros profesores que dan otro tipo de respuestas.

Respuesta	Correctas/ Parc.correctas	Incorrectas		No contesta
	Juego no equitativo	Juego equitativo	Juego no equitativo	
R1. Respuesta correcta	3			
R2. Sin cálculo de probabilidades	50			
R3. Identifican casos posibles, error en cálculos	18			
R4. Cometan error al identificar casos posibles	27			
R5. Carmen gana a la larga	4			
R6. No justifican respuesta	3			
R7. Sesgo equiprobabilidad		87		
R8. El juego es aleatorio		5		
R9. Incorrecta percepción independencia			13	
R10. No justifican su respuesta		2		
R11. Otras respuestas		3	10	
Total	105	97	23	58

Tabla 1. Frecuencia de respuestas correctas o parcialmente correctas e incorrectas

### Conocimiento especializado del contenido

A continuación, analizamos los resultados en el segundo apartado en que preguntamos por los conocimientos puestos en juego en la solución.

El contenido matemático mejor identificado por los futuros profesores como necesario para resolver el problema fue el concepto de probabilidad (11 grupos). El azar y la aleatoriedad son citados por pocos grupos (6 grupos), siendo también escasa la mención del razonamiento combinatorio o razonamiento lógico (6 grupos), estadística (5 grupos) o estimación de frecuencias de probabilidad o de frecuencia relativa (4 grupos). Dos grupos en cada caso hicieron referencia a experimentación, posibilidades, fracciones y operaciones numéricas. Por último, citados por un solo grupo, aparecen los conceptos de equidad y tabla. No se identifica el espacio muestral, o sucesos, casos favorables o posibles, idea de juego equitativo, valor esperado o razón, por lo que consideramos que el conocimiento especializado del contenido mostrado por los futuros profesores sería, en consecuencia, muy escaso.

### Conocimiento del contenido y de los estudiantes

En los apartados tercero y cuarto se pide a los futuros profesores evaluar las respuestas de estudiantes de Educación Primaria e indicar las causas de sus dificultades.

Los resultados muestran que los futuros profesores han tenido cierta dificultad a la hora de discriminar las respuestas correctas e incorrectas al problema. Así, la respuesta correcta dada por Beatriz ha sido identificada como tal, solo por 14 grupos frente a 17 grupos que consideraron que dicha respuesta es incorrecta. Otro caso difícil de discriminar fue la respuesta incorrecta del alumno Carlos ya que hay 14 grupos que indican que es correcta. El caso más sencillo de discriminar ha sido la respuesta dada por Ana, ya que 27 grupos la identificaron como incorrecta. Entre los participantes hay tres grupos que consideran que hay dos respuestas correctas, que son las dadas por Beatriz y Carlos. Y diez grupos que consideran incorrecta la respuesta correcta de Beatriz, ya que aunque están de acuerdo en que el juego no es equitativo, consideran que la justificación de Beatriz no es adecuada y eligen como respuesta correcta la aportada por Carlos.

Pocos grupos detectan las causas de los razonamientos erróneos. En el caso de la respuesta incorrecta de Ana, las estrategias erróneas que consisten en considerar todos los resultados equiprobables (sesgo de equiprobabilidad) y en la incorrecta estimación de los casos posibles han sido reconocidas por 6 grupos de futuros profesores cada una de ellas, seguida de la de no comprender bien la idea de juego equitativo (3 grupos). Solo dos grupos han reconocido las estrategias de considerar los números en lugar de diferencias y la justificación de que el alumno no comprende el problema. En el caso de la respuesta incorrecta de Carlos, la estrategia errónea más reconocida ha sido considerar que el alumno falla en la estimación de casos posibles (4 grupos), seguida de la estrategia de centrarse solo en la diferencia cero (2 grupos). Menos reconocidas han sido las estrategias de considerar que el alumno no comprende bien la idea de juego equitativo y la justificación de que el alumno no comprende el problema.

En ambos casos destaca el importante número de grupos que no explica la causa del error cometido por el alumno.

### Discusión y conclusiones

Los resultados del estudio muestran que la mayoría de los futuros profesores de Educación Primaria de la muestra tienen un escaso conocimiento común del contenido, pues no reconocen ni aplican correctamente la idea de juego equitativo para resolver el problema. Entre los participantes que han respondido de forma incorrecta, el error identificado con más frecuencia ha sido el sesgo de equiprobabilidad, que coincide con los resultados obtenidos en Ortiz et al. (2009), aunque en este caso resolviendo problemas de comparación de probabilidades. Otros errores han sido la realización incorrecta de los cálculos de probabilidad, el sesgo conocido como la falacia del jugador y los que han basado su respuesta

en que el juego es aleatorio. Se ha detectado también falta de capacidad combinatoria y una incorrecta percepción de la equitatividad del juego, como en Azcárate (1995), pero en una proporción muy superior. Destaca el hecho de que casi la cuarta parte de los futuros profesores no contesta el problema.

El conocimiento especializado del contenido mostrado por estos futuros profesores al identificar los contenidos matemáticos en la tarea propuesta fue claramente insuficiente, ya que solamente algunos grupos reconocen los conceptos de probabilidad y de aleatoriedad como contenidos matemáticos necesarios para resolver el problema, y fallan en el reconocimiento de otros conceptos matemáticos fundamentales. Nuestros datos apoyan las conclusiones de Chick & Pierce (2008), quienes indican que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica, y, en consecuencia, por este motivo podrían fallar en conseguir que los estudiantes aprendan dichos contenidos.

En relación con el conocimiento del contenido y los estudiantes, menos de la mitad de los grupos de futuros profesores acertó que la respuesta correcta era la aportada por la alumna Beatriz y casi la mitad considera que es correcta la respuesta errónea de Carlos. Fue mucho menor el conocimiento mostrado de las posibles razones de los errores en las respuestas de los alumnos, posiblemente porque los futuros profesores carecen de habilidad para explicar los errores de los estudiantes y desconocen los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que transmitirles mediante una adecuada transposición didáctica previa.

Los resultados apuntan la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores de Educación Primaria, tanto en su conocimiento matemático, como en el conocimiento pedagógico del contenido. Como consecuencia, el formador de profesores debe tener en cuenta estos diversos tipos de conocimiento, al abordar la formación de profesores para enseñar probabilidad.

*Agradecimientos:* Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20; Proyecto EDU2010-14947 (MCIN) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

### Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Cádiz, Cádiz, España.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 37, 37-55.

- Chick, H. L., & Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. Recuperado el 11 de junio de 2012 de [http://www.ugr.es/~icmi/iase\\_study/](http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/).
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, 3(1). Recuperado el 12 de julio de 2011, de [www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html).
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics* 23, 557-568.
- Lidster, S. T., Watson, J. M., Collis, K. F., & Pereira-Mendoza, L. (1996). The relationship of the concept of fair to the construction of probabilistic understanding. En Clarkson, P. C. (Ed.), *Technology in Mathematics Education, Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne* (pp. 352-359). Sydney: MERGA.
- Ortiz, J. J., Mohamed, N., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2009). Asignación de probabilidades en profesores en formación. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1545-1554. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Scholttmann, A., & Anderson, N. H. (1994). Children's judgements of expected value. *Developmental Psychology* 30 (1), 56-66.
- Watson, J., & Collis, K. F. (1994). Multimodal functioning in understanding chance and data concepts. En Ponte, J. P. y Matos, J. P. (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 369-376). Lisboa: Universidad de Lisboa.