

EL USO DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES COMO UNA ESTRATEGIA PARA EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez
 ESIME Unidad Zacatenco-IPN
 CECyT II Wilfrido Massieu- IPN
 martha.garcia@gmail.com, abenitez@ipn.mx

México

Resumen. En este documento se analiza el trabajo de diez estudiantes en una actividad que tuvo como propósito conocer la forma en que el manejo de múltiples representaciones, utilizando la hoja electrónica de cálculo, contribuye para su reflexión sobre el comportamiento de una función. Se asume que la habilidad para representar es una competencia esencial para el aprendizaje de la matemática. Los referentes teóricos relacionan las representaciones utilizadas con el tipo de razonamiento de los estudiantes. Los resultados muestran que los estudiantes tienen mayor familiaridad con la representación numérica y la utilidad de iniciar la exploración de una actividad simplificándola.

Palabras clave: representaciones, excel, función, cálculo

Abstract. In this document we analyzed the ways students related two or more representations when they use the spreadsheet in the problem solving process. Representations contribute their reflection on the function performance. We assume that the ability to represent is an essential competency for mathematics learning. The theoretical framework relate to representations theory. The findings obtained make it possible to assert that students show greater familiarity with the numerical representation and the usefulness of proposing a simplification of the original problem.

Key words: representations, spreadsheet, function, calculus

Introducción

La primera década del siglo XXI se caracterizó por el uso de tecnologías digitales y por el manejo de una gran cantidad de información. Para adaptarse a estos cambios, los individuos requieren desarrollar habilidades que les ayuden a manejar en forma eficiente, las Tecnologías de Información y Comunicación [TIC] así como a analizar y utilizar la información disponible, tanto en su vida cotidiana como en su actividad profesional. Los sistemas educativos de diferentes países conscientes de estas necesidades, están modificando sus modelos académicos, el eje de estas reformas, es el concepto de competencia.

En México, se han implementado reformas en los diferentes niveles educativos, la Secretaría de Educación Pública [SEP] puso en marcha reformas en el Nivel Medio Superior [NMS] atendiendo: a) al desarrollo de habilidades y conocimientos básicos o competencias; b) a la definición de los elementos de formación básica comunes a todos los programas de un subsistema; c) a la flexibilidad y enriquecimiento del currículo y d) al establecimiento de programas y prácticas docentes centradas en el aprendizaje e impulsó la creación del Sistema Nacional de bachillerato, acuerdo No. 442 publicado en el Diario oficial de la Federación el 26

de septiembre de 2008. En el nivel superior no han sido menores los esfuerzos, los académicos han reflexionado sobre los retos educativos de este siglo y la transformación de sus prácticas educativas para generar un espacio que ofrezca a la población estudiantil que atienden, estrategias y actividades que promuevan su aprendizaje en los diferentes ámbitos de la ciencia y la tecnología para su desarrollo profesional. En esta dirección en el Instituto Politécnico Nacional [IPN] se ha implementado un modelo académico que pone énfasis en el aprendizaje del estudiante de una forma integral, con una gran preocupación por la calidad científica, tecnológica y humanística en la formación de los egresados; que combine en forma equilibrada el desarrollo de conocimientos, habilidades, actitudes y valores y que otorgue importancia a las metodologías de enseñanza innovadoras que incorporen el uso de las TIC (Un Nuevo modelos Educativo para el IPN, 2004, p.69).

Los principios expresados en el Modelo Educativo del IPN están en concomitancia con los que emanan de los trabajos de La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE], en los que se señala que el capital humano es un factor clave para el crecimiento económico de una nación, sin menoscabo de su importancia en los ámbitos de salud y de inclusión social. Por otra parte, en el proyecto PISA se estableció una definición del concepto de competencia como la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo actual, emitir juicios fundamentados y ser capaz de usarlas en las necesidades de la vida personal, laboral y social, actual y futura, como un ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar (ISEI-IVEI, 2004). En relación con la matemática, el estudio PISA establece como competencias matemáticas: a) pensar y razonar; b) argumentar; c) comunicar; d) modelar; e) plantear y resolver problemas; f) representar y, g) utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones (ISEI-IVEI, 2004). Las ideas anteriores relacionadas con las competencias matemáticas que se sugiere promover en los estudiantes durante su vida académica, motivaron el desarrollo de dos investigaciones en el IPN (No. 20111060 y No. 20110397) que tuvieron como objetivos: Identificar y analizar las competencias matemáticas generales y específicas que requieren los estudiantes de las carreras de ingeniería y de bachillerato en el área de ciencias exactas y que incorporan las TIC, y proponer actividades para el desarrollo de esas competencias matemáticas.

En este documento se analiza el trabajo de un grupo de estudiantes en una de las actividades diseñadas que tuvo como propósito conocer la forma en que el manejo de múltiples representaciones utilizando la hoja electrónica de cálculo, contribuye para que los estudiantes reflexionen sobre el comportamiento de una función (García y Benítez, 2010).

Elementos teóricos relacionados con las representaciones

En este trabajo se asume que la habilidad para representar es una competencia esencial para el aprendizaje de la matemática. Las representaciones que utilizan los estudiantes, están relacionadas con el tipo de razonamiento que tienen; Parnafes & diSessa, (2004) señalan que la reflexión de los estudiantes está estrechamente relacionada con la representación externa y el contexto en el que se emplea, cada representación resalta u oculta aspectos de un concepto, y el uso de varias representaciones favorece una comprensión más flexible de los conceptos matemáticos (p. 251). Otro autor que se refiere al papel de las representaciones para el aprendizaje de la matemática es Ainsworth (2006), para él las representaciones externas también juegan un papel primordial, señala que después de que un estudiante entiende en qué forma se encuentra codificada la información en una representación, y cuál es su relación con el dominio que representa, los estudiantes eligen la que les resulta más adecuada para efectuar una tarea o resolver un problema, esta elección se convierte en un ejercicio cognitivo.

Las tecnologías digitales y el manejo de distintas representaciones

Retomando las ideas de Parnafes & diSessa (2004) quienes señalan la relación que establecen entre la representación utilizada y el tipo de razonamiento de los estudiantes y de Ainsworth (2006) de la elección de una representación que consideran conveniente para abordar un problema, es posible inferir que el uso de diferentes representaciones enriquece la comprensión de los conceptos matemáticos y apoya el trabajo de los estudiantes durante el proceso de resolución de un problema, lo que revela la importancia de diseñar actividades que promuevan el empleo y relación de múltiples representaciones de los conceptos matemáticos involucrados. En esta ardua tarea las tecnologías digitales, como la computadora, los equipos multimedia de CDROM, las redes locales, el Internet, etc. pueden convertirse en auxiliares en el trabajo de los estudiantes; para relacionar internamente representaciones externas y otorgar significado a las representaciones utilizadas. Existe una amplia variedad de tecnologías digitales, en este documento se hará referencia a Excel. Wilson, Ainley & Bills (2004) la consideran una herramienta de gran utilidad en actividades de exploración, un medio para que los estudiantes relacionen representaciones, un auxiliar para realizar generalizaciones para lograr una mejor comprensión del comportamiento de la relación entre las variables de una función.

Las ideas planteadas en los párrafos anteriores fueron el punto de partida para el diseño e implementación de la actividad que se reporte en este documento.

Metodología

La metodología utilizada en la investigación que aquí se reporta es de tipo cualitativo, consistió en analizar el trabajo realizado por el grupo de 10 estudiantes durante dos sesiones.

Sujetos e instrumentos

Participaron 10 estudiantes provenientes de un bachillerato tecnológico, con edades de 18 y 19 años, sus antecedentes académicos eran Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral. Los estudiantes cursaban la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral del primer semestre de una carrera de ingeniería.

Los instrumentos empleados durante la recogida de datos fueron:

- ❖ Reportes escritos elaborados en forma individual.
- ❖ Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.
- ❖ Reportes elaborados por el profesor-investigador.
- ❖ Archivos de Excel guardados en discos flexibles elaborados por los estudiantes en forma individual y en pareja.

Construcción y organización de las sesiones

Los elementos que guían el análisis de la investigación realizada con apoyo de Excel son:

1. Identificar la forma en que los estudiantes representan la situación planteada.
2. Identificar la forma en que relacionan las representaciones empleadas.
3. Documentar la forma en que analizan el comportamiento de la función que representa el fenómeno.

Conceptos matemáticos involucrados

- a) Teorema de Pitágoras; b) Dominio de una función; c) Inecuaciones; d) Gráfica de funciones; e) Propiedades de los triángulos rectángulos y f) Ecuación cartesiana de una recta

Actividad de la escalera

La actividad de la escalera se diseñó a partir de un problema propuesto por Zill & Wright (2010, p.58) en el que se tiene una escalera recargada en una pared y se solicitaba expresar la longitud de la escalera en términos de la distancia entre la base de la pared y la base de la escalera. El problema se modificó para incluirlo en la actividad de la escalera, en ella se plantea

la siguiente pregunta ¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar una escalera al deslizarla sobre el piso y recargarla en una pared?

Considere que junto a la pared se encuentra una caja cúbica de 1 m de arista (Figura 1).



Figura 1. Vista lateral de la escalera y la caja

Para identificar el análisis que los estudiantes realizan de la función que representa la situación se propusieron las siguientes instrucciones y preguntas:

- ❖ Dibuja algunas posibles posiciones en las que se puede colocar la escalera
- ❖ ¿Qué datos del enunciado de la situación que se plantea en la actividad consideras necesarios para llegar a la solución?
- ❖ ¿Cuáles son las variables que identificas en los datos?
- ❖ ¿Puedes establecer alguna relación entre estas variables? Escribe la relación.
- ❖ ¿Hasta este momento has tomado en cuenta la caja? Explica en qué forma

Análisis de datos

El trabajo de los estudiantes se dividió en tres etapas que se describen a continuación.

Análisis de la forma en que representan y explican la situación planteada

En relación con la primera instrucción los estudiantes dibujaron en una hoja de papel diferentes posiciones en que podía ser colocada la escalera. Los registros escritos y las grabaciones muestran que esta instrucción ayudó para que los estudiantes comprendieran el significado de *altura máxima*, como se observa en las Figuras 2 y 3.

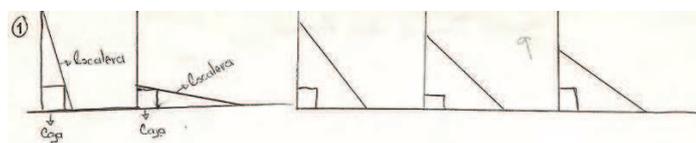


Figura 2. Trabajo inicial de José



Figura 3. Trabajo inicial de Dulce

Los dibujos de los estudiantes sugerían que habían comprendido la situación, pero sus respuestas mostraron que tuvieron dificultades para identificar las variables y constantes y para establecer relaciones entre ellas, como se observa en la Figura 4.

Figura 4. Trabajo de Dulce

Esto motivó al investigador para sugerir modificar la situación original, es decir, realizar una simplificación eliminando algún dato, los estudiantes mencionaron que sería más simple si se eliminara la caja. La sesión concluyó con esta propuesta.

Exploración numérica y gráfica de un problema más simple

En la siguiente sesión se plantearon nuevas instrucciones:

- a) ¿Puedes escribir una expresión algebraica que relacione los datos, sin considerar la caja?
- b) Llena la Tabla I con algunos valores de las alturas y distancias horizontales, que se puedan obtener al mover la escalera sobre el piso cuando uno de sus extremos se encuentra en la pared.

Los estudiantes propusieron utilizar el Teorema de Pitágoras para relacionar la altura que alcanza la escalera, la distancia de la base de la escalera a la pared y la longitud constante de la escalera, al parecer los dibujos que habían realizado en la sesión anterior les sugirieron la conveniencia de utilizar el Teorema de Pitágoras. Posteriormente identificaron que la altura que alcanza la escalera podía ser despejada de esta relación. Esto permitió que propusieran una relación funcional para calcular la altura que alcanza la escalera, a partir del Teorema de Pitágoras.

Tabla I. Relación entre la distancia y la altura de la escalera

h	d	L
Altura que alcanza la escalera	Distancia de la escalera a la pared (horizontal)	Verificación del teorema de Pitágoras con valores de h y d

El primer acercamiento de los estudiantes con Excel fue para concentrar los resultados que habían obtenido con la calculadora. En esta etapa se explicó a los estudiantes la conveniencia de usar Excel para el manejo numérico de funciones, ya que los datos de una columna de la hoja de cálculo están relacionados con otras columnas mediante una relación funcional. En la Figura 5 se observa la elaboración, con Excel, de una tabla y una gráfica.

Una vez elaboradas la tabla y la gráfica, se les sugirió que analizaran ambas para motivar la relación entre los datos de las dos representaciones.

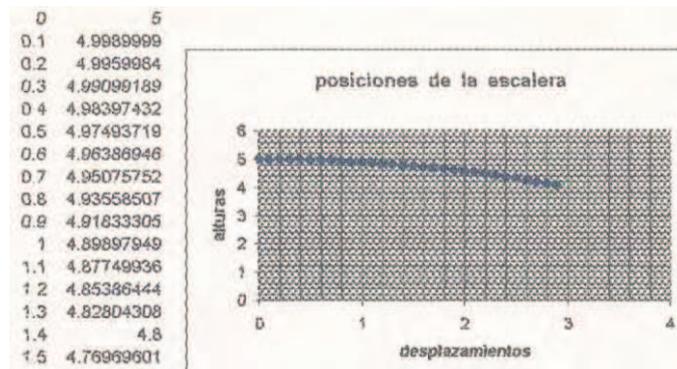


Figura 4. Trabajo de José con Excel

Exploración numérica y gráfica del problema original.

El análisis de la situación original fue dirigido por el investigador, García y Benítez (2010) analizan la forma en que es posible orientar la reflexión de los estudiantes para considerar la situación original. Sugieren identificar la escalera con una recta que corta a los ejes x; y en los puntos (0,h) y (d,0). La ecuación de esta recta es:

$$y - h = -\frac{h}{d} x \tag{1}$$

El extremo superior derecho de la caja tiene coordenadas P(1,1). Para garantizar que el punto (1,1) quede por debajo de la recta, se requiere que el punto de la recta (1,y) cumpla $y > 1$.

$$1 \leq y = -\frac{h}{d} (1) + h \tag{2}$$

$$1 \leq y = h \left(\frac{-1+d}{d} \right) \tag{3}$$

$$\frac{d}{d-1} \leq h \tag{4}$$

La gráfica de la función $\frac{d}{d-1} = h$ se traza en el mismo plano que la gráfica del problema auxiliar y representa la altura (h) que alcanza la escalera en función del desplazamiento horizontal (d) considerando que el extremo superior derecho de la caja se encuentra por debajo o tocando a la escalera. Es importante que los estudiantes reflexionen en el significado

de la inecuación $\frac{d}{d-1} \leq h$ como una región del plano. Esta región y la gráfica de

$h = \sqrt{25 - d^2}$ se cortan en dos puntos, la ordenada de uno de ellos corresponde a la altura máxima buscada.

Conclusiones

En el trabajo de los estudiantes se identifican avances y retrocesos, atribuidos a la familiaridad del estudiante con la representación empleada. En las primeras exploraciones, José y Dulce representan diferentes posiciones que puede tener la escalera de la escalera y dibujan también la caja, lo que sugiere que habían comprendido la situación planteada. Sin embargo en su respuesta, se observa que en un principio no identificaron la necesidad de conocer la distancia de la base de la escalera a la pared ni la distancia del piso al extremo superior de la escalera, al parecer los estudiantes, al cambiar de representación, tuvieron problemas con el manejo de la información.

El trabajo realizado por José y Dulce proporciona evidencia de que el manejo de múltiples representaciones fortalece el aprendizaje de un concepto, lo que coincide con lo que afirman Parnafes & diSessa, (2004), los dibujos de las posiciones de la escalera les sugirieron la posibilidad de utilizar el teorema de Pitágoras, y posteriormente establecer una relación funcional entre las variables, la tabla elaborada con Excel favoreció analizar el dominio de la función y relacionarlo con el contexto de la actividad.

Durante la actividad se identificó que los estudiantes mostraron mayor familiaridad con la representación numérica de la función (tabla elaborada en la hoja electrónica de cálculo), para analizar el comportamiento de la misma.

La simplificación de la actividad contribuyó para que los estudiantes identificaran la relación entre las variables y las constantes presentes en la actividad y exploraran la forma el cambio en los valores de las variables.

Referencias bibliográficas

SEGOB, (2008). *Acuerdo No. 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*, DOF: 26/09/2008, Diario Oficial de la Federación. Recuperado de http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5061936&fecha=26/09/2008

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction* 16(3), 183-198.

García, M. y Benítez, A. (2010, Noviembre). Relación entre representaciones de un concepto matemático con apoyo de tecnologías digitales. *XII Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*. D. F., México.

- Parnafes, O. & diSessa A. A. (2004). Relations between types of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9(3), 251–280, Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- IPN Instituto Politécnico Nacional, *Un Nuevo Modelo Educativo para el IPN*. Dirección de Publicaciones, México. Recuperado el 9 marzo de 2009 de:
<http://www.comunidades.ipn.mx/riieeme/Languages/Espanol/UploadFiles/Documents/20ModeloEducativoVersion27julio2003Resumen.pdf> (2004).
- ISEI-IVEI Instituto Vasco de Evaluación e Investigación Educativa (2004). *Primer Informe de la Evaluación PISA 2003*, <http://www.isei-ivei.net/cast/pub/PISA2003euskadic1.pdf>
- Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2004). Spreadsheet generalizing and paper and pencil generalizing. *Proceedings of the twenty-eighth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*, Bergen, Norway, 4, 441-448.
- Zill, D. & Wright, W. (2010) Cálculo de una variable. *Funciones* (pp. 57-58). México: McGraw-Hill Interamericana.