# OJOS Y OIDOS LOGARÍTMICOS Y TRIGONOMÉTRICOS

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica Costa Rica
edison.defaria@ucr.ac.cr

**Resumen.** En este curso describimos algunos modelos matemáticos para medir grandes distancias, como la distancia de la tierra a las estrellas o distancias intergalácticas, utilizando modelos logarítmicos. También "escuchamos" el sonido de funciones trigonométricas y de otras funciones más complejas como la función zeta de Riemann. Los modelos sugieren que nuestros ojos tienen un comportamiento logarítmico y que nuestros oídos se comportan trigonométricamente.

**Palabras clave**: medición, funciones, modelos matemáticos

**Abstract.** In this course we described some mathematical models to measure great distances, like the distance from the earth to the stars or intergalactic distances, using logarithmic models. Also we "heard" the sound of trigonometric functions, as well as other more complex functions like the Riemann Zeta function. The models suggest that our eyes have a logarithmic behavior while our ears behave trigonometrically.

**Key words**: measurement, functions, mathematical models

## Introducción

El concepto de función es fundamental para cualquier curso de cálculo diferencial e integral y facilita la simulación y modelación de situaciones físicas, químicas, biológicas y sociales. Según Hitt (2000) "a través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo".

La simulación y la modelación son representaciones de un objeto matemático que está vinculado a una situación física o real. La simulación es una aproximación a un fenómeno mientras que la modelación es la construcción o representación del fenómeno. En el proceso de simulación y de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, los cuales a su vez impulsa la construcción de otros registros de representación: gráfico, simbólico, verbal, icónico, tabular.

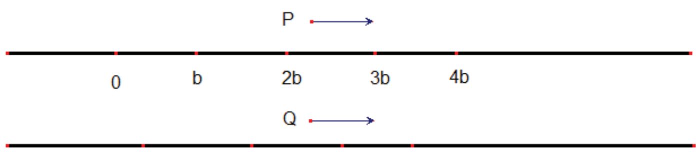
Investigaciones realizadas por Duval (1992) reportan que en estudios en donde se presente un enunciado en el cual están en juego varios sistemas de representación, es importante analizar las articulaciones que hay de un sistema a otro. Para Duval, un aprendizaje significativo se logra cuando se articulan diferentes representaciones de los objetos matemáticos y de las acciones realizadas sobre los objetos, lo que lleva a la construcción de esquemas de acción y de estructuras cognoscitivas. La habilidad para cambiar el registro de cualquier representación semiótica ocupa un lugar central en el aprendizaje de las matemáticas.

Otro aspecto importante se relaciona con la contextualización del contenido matemático construido en el aula. En el caso de las funciones, esta contextualización debería de ser muy natural pues ellas son utilizadas principalmente para modelar fenómenos físicos, químicos, biológicos y sociales.

Según Katz (2009) la idea de logaritmo posiblemente tuvo su origen en el uso de ciertas fórmulas trigonométricas que transformaban multiplicaciones en sumas o restas. Los astrónomos se dieron cuenta de que este procedimiento podría reducir la cantidad de errores de cálculos. Otras fuentes para la idea de logaritmo se encuentran en los trabajos de algunos algebristas como Stifel y Chuquet que elaboraron tablas que relacionaban las potencias de 2 con sus exponentes, y demostraron que la multiplicación en una tabla correspondía a la suma en la otra.

En inicios del siglo XVII John Napier (1550-1617) y Jobst Bürgi (1552-1632), trabajando en forma independiente, construyeron tablas que permitían calcular multiplicaciones de números enteros (no sólo potencias de 2) mediante sumas, pero Napier fue el primero en publicar su trabajo.

En su obra Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (Descripción del maravilloso canon de logaritmo), publicado en 1614, Napier introdujo brevemente las tablas de logaritmos y mostró cómo utilizarlas. En su segundo trabajo Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio (Construcción del maravilloso canon de logaritmos), publicado en 1619, él describió la teoría utilizada para construir las tablas. Para ello, Napier introdujo una recta y un segmento. En la recta él representó la sucesión aritmética creciente $0, b, 2b, 3b, \cdots$ mientras que en el segmento de longitud $r$ él representó una sucesión cuya distancia al punto extremo derecho del segmento forma una sucesión geométrica decreciente $ar, a^2r, a^3r, \cdots$ con $0 < a < 1$. Napier utilizó $r = 10^7$, el radio utilizado para su tabla de senos, y $a$ cercano a 1.




$$0 \qquad r - ar \qquad r - a^2 r \quad r - a^3 r$$

Napier supuso que los puntos P y Q se movían hacia la derecha de cada recta de la siguiente manera: P se mueve con rapidez constante (aritméticamente) cubriendo intervalos iguales en tiempos iguales: [0,b],[b,2b],[2b,3b],…mientras que Q se mueve geométricamente tal que su rapidez cubre cada intervalo $[0,r-ar]$, $[r-ar,r-a^2r]$, $[r-a^2r,r-a^3r]$,…en un mismo intervalo de tiempo, de tal forma que la distancia recorrida en cada intervalo forma un sucesión geométrica decreciente $r(1-a)$, $ar(1-a)$, $a^2r(1-a)$, … El punto Q se mueve geométricamente si su rapidez es siempre proporcional a su distancia al extremo derecho del segmento.

Si el punto P empieza a moverse desde el origen con rapidez constante igual a rapidez con que el punto Q empieza a moverse (geométricamente) desde el origen, y si P ha sido alcanzado en el punto y por Q cuando la coordenada de Q es x, entonces y es el logaritmo de x.

### Midiendo distancias mediante triangulación

Uno de los métodos utilizados para medir distancias en mediana escala es el de triangulación. Este es un método antiguo. Tales (siglo VI a. C.) utilizó triángulos semejantes para calcular la altura de las pirámides de Egipto, usando longitudes de sombras. Pei Xiu (224-271) identificó la medición de ángulos rectos y agudos para trazar mapas y medir distancias. Liu Hui utilizó el cálculo propuesto por Pei Xiu para medir distancias perpendiculares a lugares inaccesibles.

Los métodos de triangulación utilizados por los topógrafos llegaron a la España medieval por medio de algunos tratados árabes sobre el astrolabio.

### Midiendo grandes distancias

Una posición en la Tierra es dada, por lo general, en coordenadas esféricas. El plano de referencia es el plano ecuatorial, perpendicular al eje de rotación, intersecando la superficie de la Tierra en el ecuador. Los círculos paralelos al ecuador son conocidos como paralelos de latitud. Semicírculos de polo a polo son los meridianos. La longitud geográfica es el ángulo entre el meridiano y el meridiano cero que pasa por el Observatorio Greenwich. Utilizamos valores positivos para longitudes oeste del Greenwich y negativos para longitudes este de Greenwich. También se acostumbra expresar la longitud como la diferencia entre el tiempo local y el tiempo Greenwich. Una revolución completa corresponde a 24 horas, y por lo tanto 1 hora equivale a 15 grados.

La longitud geográfica es el ángulo entre la línea de plomada y el plano ecuatorial. La latitud es positiva en el hemisferio Norte y negativa en el hemisferio Sur. Si observamos a un objeto desde distintos puntos, lo veremos en distintas direcciones. La diferencia entre las direcciones observadas se conoce como *paralaje*. Por lo tanto, paralaje es el ángulo formado por la dirección de dos líneas visuales relativas a la observación de un mismo objeto desde dos puntos distintos, suficientemente alejados entre sí y no alineados con él.

Debido a que la paralaje depende de la distancia del observador al objeto entonces podemos utilizarlo para medir distancias. Para propósitos astronómicos necesitamos líneas de base mucho mayores que la distancia entre los ojos (aproximadamente 7 cm). Las líneas de base más utilizadas son el radio de la Tierra y el radio de su órbita. Distancias a las estrellas más cercanas pueden ser determinadas mediante la *anual*, el ángulo subtendido por el radio de la órbita de la Tierra (denominado *unidad astronómica*, AU) cómo se mira desde la estrella.

La posición de una estrella puede ser medida en relación con alguna estrella de referencia o bien en relación con un sistema fijo de coordenadas. Normalmente podemos mirar entre 1000 y 1500 estrellas, por encima del horizonte. Bajo condiciones ideales, el número de estrellas visibles a simple vista puede ser aproximadamente 10,000, agrupadas en constelaciones.

El desplazamiento en la dirección de una estrella respecto a estrellas "fijas" debido al movimiento anual de la Tierra se conoce como *paralaje trigonométrico* de la estrella. Como mencionamos anteriormente, esto se utiliza para medir la distancia a la estrella: menor paralaje significa que la estrella se encuentra a mayor distancia. La paralaje trigonométrica es el único método directo que se utiliza para medir distancias a estrellas.

Si utilizamos como línea de base el diámetro de la órbita de la Tierra, durante un año, una estrella parece describir un círculo si se encuentra en el polo de la esfera celeste o un segmento si se encuentra en la eclíptica o, en otros casos, una elipse. El semieje mayor de esta elipse se denomina la *paralaje* de la estrella y se indica por $\pi$ y es igual al ángulo subtendido por el radio de la órbita de la Tierra, o una unidad astronómica si se ve desde la estrella. La unidad de distancia utilizada en astronomía es *parsec* (pc). A una distancia de un parsec, una unidad astronómica (AU) subtiende un ángulo de un segundo de arco, y al ser 1 radián cerca de 206265´´ entonces un parsec es aproximadamente igual a 206265 AU, y como 1 AU igual a $1.498 \times 10^{11}$ m entonces 1 pc $\approx 3.086 \times 10^{16}$ m. Si la paralaje $\pi$ es dado en segundos de arco entonces la distancia r en pc es simplemente $r = 1/\pi$.

Otra unidad de medida astronómica es el año luz, la distancia que la luz viaja en un año y es aproximadamente $9.5 \times 10^{15}$ m, o 3.26 años luz.

La paralaje de la luna es cerca de 57´, el del sol de 8.79´´ y el de la estrella más cercana (Próxima Centauri) de 0.762´´, una de las tres estrellas del sistema estelar Alfa Centauri, el más cercano a la Tierra. Esto significa que la estrella más cercana a la Tierra se encuentra a una distancia de $1/0.762 \approx 1.31$ pc, unos 4,3 años luz.

## Conceptos fotométricos y magnitudes

Muchas observaciones astronómicas utilizan radiación electromagnética. Podemos obtener información de la naturaleza física de la fuente de radiación, analizando la distribución de energía de su radiación.

La potencia de la radiación por unidad de área se conoce como *densidad de flujo de energía* ($W/m^2$), o simplemente *densidad de flujo* y se denota con la letra F.

En el segundo siglo a. C. Hiparco dividió las estrellas visibles en 6 clases, conforme a su brillo aparente. La primera clase contenía las estrellas más brillantes y la sexta las menos brillantes visibles a simple vista.

La respuesta del ojo humano al brillo de la luz no es lineal. Si las densidades de flujo de tres estrellas se encuentran en proporción 1:10:100, la diferencia de brillo de la primera y la segunda se mira igual que la diferencia de brillo de la segunda y la tercera. Razones de brillo iguales corresponden a diferencias de brillo aparente iguales: *la percepción humana de brillo es logarítmica*.

Norman R. Pogson, en 1856, amplió la clasificación dada por Hiparco. Cómo una estrella de primera clase es cerca de 100 veces más brillante que una de sexta clase, Pogson definió la razón de brillo entre la clase n y la clase n + 1 como $(100)^{1/5} \approx 2.512$.

De esta forma, si tomamos como magnitud cero la que corresponde a la densidad de flujo $F_0$, entonces las otras magnitudes (aparentes) son definidas por la ecuación:

$$M = -2.5 \log(F/F_0).$$

Observe que en la definición anterior se utiliza 2.5 en lugar de 2.512 y es equivalente a la definición de Pogson pues si las magnitudes de dos estrellas son m y m + 1, y sus densidades de flujo son $F_m$ y $F_{m+1}$ respectivamente, entonces:

$$m - (m+1) = -2.5 \log(F_m/F_0)+2.5 \log(F_{m+1}/F_0) = -2.5 \log(F_m/F_{m+1}) = -1$$

y por lo tanto $F_m/F_{m+1} = (100)^{1/5}$.

Análogamente, si dos estrellas tienen magnitudes y densidades de flujo $m_1$, $m_2$ y $F_1$, $F_2$ respectivamente, entonces $m_1 - m_2 = -2.5 \log(F_1/F_2)$.

También es claro que para una estrella de primera magnitud y una de sexta magnitud, la relación entre las densidades de flujo de ambas es $1 - 6 = -2.5 \log(F_1/F_6) = -5$, y por lo tanto $F_1=100F_6$.

Debido a que la densidad de flujo depende del instrumento que utilizamos en la observación, la magnitud aparente depende del instrumento utilizado.

### Magnitud absoluta

La magnitud aparente no dice nada acerca del verdadero brillo de las estrellas. Una cantidad que mide el brillo intrínseco de las estrellas es la *magnitud absoluta*, definida como la magnitud aparente a una distancia de 10 parsecs de la estrella. Si la estrella se encuentra a una distancia r, como la densidad de flujo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la razón entre F(r) y F(10) es $F(r)/F(10)=(10/r)^2$. Si M es la magnitud absoluta de la estrella tenemos:

$$m-M = -2.5\log(F(r)/F(10)) = -2.5\log(10pc/r)^2 = -5\log(10pc/r)$$

con la distancia r dada en parsec.

### Intensidad de sonido

Vimos anteriormente la respuesta del ojo humano al brillo de la luz es logarítmico. De igual forma la respuesta del oído humano a las variaciones de la intensidad del sonido también es logarítmica. La intensidad de sonido es una expresión de la cantidad de energía que pasa por un centímetro cuadrado de área transversal en un segundo, es decir, la densidad de flujo de energía.

El decibelio (dB) es la unidad relativa utilizada para expresar la relación entre dos magnitudes acústicas o bien entre una magnitud acústica y otra magnitud de referencia. Es la décima parte del belio, el logaritmo de la relación entre la magnitud acústica y la de referencia. Su nombre se debe a Alexander Graham Bell. Un belio representa un aumento de potencia de 10 veces respecto a la magnitud de referencia mientras que cero belios es el valor de la intensidad de referencia.

Se utilizan dos sonidos en la definición pues al escuchar un único sonido, la persona no puede dar indicar con certeza su intensidad, mientras que si escucha dos sonidos entonces puede distinguir la diferencia entre sus intensidades. El oído humano percibe sonidos a partir de una intensidad de aproximadamente $10^{-12}$ Vatios/m$^2$ (corresponde al sonido más débil que se puede escuchar y se toma como el umbral de audición o mínima intensidad audible) y soporta una intensidad máxima de aproximadamente 1 Vatio/m$^2$. Por ser enorme el rango de intensidades de sonido que el oído humano puede detectar sin dolor, es que se ha elegido una escala logarítmica para expresar dicha intensidad.

$$I_{dB} = 10\log(I/I_0)$$

$I_{dB}$ es la intensidad sonora en decibelios, I (Vatios/m$^2$) es la intensidad sonora en escala lineal, $I_0$ (Vatios/m$^2$) es el umbral de audición. En el rango audible, [$10^{-12}$ Vatios/m$^2$, 1 Vatio/m$^2$], la intensidad sonora varía de 0 a 120 dB.

## El sonido de las funciones

Algunas funciones trigonométricas tienen sonidos muy agradables y podemos utilizar un software especial para oírlas. El software Mathematica tiene un comando especial, Play cuya sintaxis es Play[f,{t,tmin,tmax}] que permite "sonar" una función al emitir un sonido de amplitud f(t) durante t segundos.

Play aplicado a una función f(t) define una forma de onda para un sonido con amplitud f(t). La señal es transformada en un voltaje que a la vez se transforma en un desplazamiento. Cuando un sonido es ejecutado, su amplitud es muestreada un cierto número de veces por segundo (8000 hz por defecto), y este número puede ser cambiado mediante la opción SampleRate. Play[f,{t,tmin,tmax}, SampleRate □ r] toma r muestras de la amplitud por segundo. El comando Show[sonido] permite volver a tocar el objeto sonido.

También podemos producir sonidos estéreo utilizando varios canales y Mathematica permite el uso de cualquier número de canales. La sintaxis es:

Play[{f1,f2, …}, {t, tmin, tmax}]

El oído humano percibe sonidos en una banda de frecuencias de 20 a 22000 hz.

Algunos ejemplos que desarrollamos (oímos) en el curso fueron:

1. Play[Sin[2 Pi 440 t], {t,0,1}] emite un sonido puro con una frecuencia de 440 hz por segundo.
2. Play[Cos[50t]Sin[3000t], {t,0,2}] suena como un teléfono fijo.
3. Play[(2tCos[500t])Sin[3000t+2Sin[50t]],{t,0,3}]
4. Play[Sin[700t+25tSin[350t]],{t,0,3}]
5. Play[{Sin[700t+25tSin[350t]],Sin[2000t$^2$ – 500t + 1]},{t,0,4}] sonido estéreo con dos canales.
6. Play[Sum[Sin[1000t√n (1+Cos[nt])],{n,5}],{t,0,5}]
7. Play[RiemannSiegelZ[1000t],{t,0,5}] para la función zeta de Riemann.

Además construimos otros modelos logaritmos como por ejemplo: aquellos utilizados para medir la intensidad de temblores o la dimensión de un objeto fractal. Vimos como los logaritmos y las funciones trigonométricas sirven para explicar fenómenos naturales, y para representar la reacción humana a distintos estímulos. En particular, las funciones trigonométricas son fundamentales para describir modelos que son periódicos. Aplicaciones como estas potencializan la contextualización de las matemáticas y muestran la utilidad de las matemáticas para la vida diaria.

## Referencias bibliográficas

Duval, R. (1992) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.

Hitt F. (2000). *Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática.* México: DME - Cinvestav.

Katz, V. (2009). *A History of Mathematics: An introduction*. Boston: Addison-Wesley.