LA NOCIÓN DE FRACCIÓN COMO COMPARADOR PARTE – TODO

Rebeca Flores García
CICATA – IPN México
rebefg@gmail.com

Resumen. El conocimiento sobre el número racional es complejo, diversas investigaciones se han dado a la tarea de establecer los vínculos entre un racional y una fracción; o entre una fracción y una razón, entre otras. En el artículo se reportan evidencias de los resultados encontrados acerca de los significados de las fracciones presentes en la escuela, parte de su tratamiento en el discurso matemático escolar y algunas de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver un problema que implica el manejo de nociones vinculadas a la fracción como comparador parte - todo: partición, equivalencia y unitización. Para ello se aplicó un cuestionario a estudiantes de una escuela secundaria perteneciente al Estado de México, este instrumento incluyó seis situaciones problema, las cuales fueron tomadas tanto de resultados de investigación como de libros de texto, con la intención de analizar la manera en la que algunos de estos significados son abordados y trabajados en ellos.

Palabras clave: fracción, partición, equivalencia

Abstract. The knowledge about the rational number is complex; several investigations have been given to the task of establishing links between a sound and a fraction, or between a fraction and one ratio, among others. The article is reporting evidence of the results about the meanings of the fractions present in the school, part of their treatment in school mathematical discourse and some difficulties presented by students to solve a problem involving the handling of notions related to the fraction as a comparator part - whole: partition, equivalence and unitization. To do this we applied a questionnaire to secondary students belonging to the State of Mexico, which included six problem situations. They were taken from both research results and textbooks, in order to analyze the way in which some of these meanings are addressed and worked on them.

Key words: fraction, partition, equivalence

Introducción

En la actualidad el sistema educativo – sobre todo el nivel básico y medio superior – ha dejado de organizarse en torno a las asignaturas tradicionales, ahora se están haciendo en función de temas, situaciones, problemáticas o competencias. Al respecto, el programa de estudio para la escuela secundaria en México señala que para resolver una situación el alumno debe usar los conocimientos previos, mismos que le permiten *entrar* en la situación, pero el desafío se encuentra en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, para ampliarlo, para rechazarlo o para volver a aplicarlo en una nueva situación (SEP, 2006, p.11). Por lo que, tanto para los alumnos como para docentes la propuesta implantada en la reforma de 2006 para la enseñanza de las matemáticas en el nivel básico, implicará asumir retos que demandan condiciones distintas frente al conocimiento matemático e ideas distintas de lo que significa enseñar y aprender. El estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra (SEP, 1994, p. 81).

El proceso de enseñanza aprendizaje relacionado con las fracciones es ciertamente uno de los más estudiados desde el inicio de la investigación en Educación Matemática, debido quizá a que (junto con la cuestión relacionada con los números decimales) representa una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de todo el mundo (Fandiño, 2005).

Una revisión teórica

El trabajo teórico de investigación durante los últimos 40 años ha afirmado en reiteradas oportunidades que el conocimiento sobre el número racional es complejo. Diversos han sido los investigadores que se han dado a la tarea de mirar lo que se esconde debajo de la noción de fracción, de establecer la diferencia entre una fracción y un número racional, de mostrar diferencias entre nociones como por ejemplo la fracción y razón; así como las relaciones que guardan con otras nociones.

Centrándonos en estudios recientes respecto a los significados asociados a la noción de fracción es posible mencionar que Fandiño (2005) refiere a 14 significados, Lamon (1999), encuentra doce, Kieren (1988) destaca cinco y formula un modelo teórico, mientras que Nesher (citado por Ohlsson,1988) refiere a tres como los esenciales. Estos y otros trabajos, representan considerables progresos hacia una semántica de las fracciones. Por su parte, el Consejo Mexicano de Investigación Educativa elaboró en México estados de conocimiento correspondientes a dos décadas. En 1993, se editó una colección de libros, cuya revisión incluía la producción de la comunidad de investigadores educativos del país de 1982 a 1992; mientras que para el año 2003 se incluye la revisión de 1992 a 2002, en distintos niveles educativos.

En el periodo que va de 1982 a 1992 se destacan algunas de las dificultades que los estudiantes de nivel primaria y secundaria manifestaban respecto a los contenidos programáticos, tales como: comprender conceptos, mecanizar algoritmos y resolver problemas, tanto con números naturales como con números racionales; así como utilizar e interpretar distintos tipos de representación gráfica. Los estudios desarrollados en esta época a nivel internacional se centraron en el análisis de las distintas interpretaciones o significados que un contenido asumía considerando el contexto o la situación en que era usada. Por lo que los trabajos de Freudenthal (1983), Kieren (1976), Ohlsson (1988) y Brousseau (1981) tomaban fuerza, mientras que en México, algunos investigadores de México que incursionaron en el estudio de las fracciones debido a la influencia de las investigaciones francesas de los IREM (Institutos para la investigación de la enseñanza de las matemáticas) fueron Block, Balbuena, Dávila, entre otros (citados por Bonilla, Block y Waldegg, 1993).

En el periodo que va de 1992 a 2002, sólo nueve de las ciento dieciséis investigaciones revisadas incluían el tema de las fracciones. Se encontraron como autores que fundamentaban esa línea de investigación los trabajos desarrollados por Thomas Kieren y Hans Freudenthal. De manera muy particular, el trabajo de Valdemoros (1995 y 2001), señala que una dificultad adicional en el manejo y resolución de problemas con fracciones es la conservación referente (unidad) a la que la expresión $\frac{a}{b}$ remite, dificultad que no se observa en el caso de problemas con los números naturales.

Metodología

Se aplicó un cuestionario a estudiantes de una escuela secundaria perteneciente al Estado de México, este instrumento incluyó seis situaciones, las cuales fueron tomadas tanto de resultados de investigación como de libros de texto, con la intención de analizar la manera en la que algunos de estos significados son abordados y trabajados en ellos. El cuestionario fue aplicado a 36 estudiantes de cada grado del nivel secundario, haciendo un total de 108 estudiantes correspondiente al turno vespertino.

Resultados

En esta sección se reportan evidencias de los resultados encontrados acerca de los significados de las fracciones presentes en la escuela, su tratamiento en el discurso matemático escolar y las dificultades que presentan los estudiantes de uno de los seis problemas que fueron planteados.

El reparto de tres barras de dulce

Este problema fue retomado y adaptado del estudio que Lamon (1999) desarrolló con niños de nivel elemental. Aunque pareciera que el problema será sencillo y directo en su solución, las respuestas de los estudiantes no evidencian una solución así, diversas son las formas en que ellos dan cuenta de la respuesta a la que los conducen sus percepciones e intuiciones.

Seis niños comparten estas barras de dulce. ¿Cuánto le toca a cada uno?

Figura1. El reparto de tres barras de dulces.

En la solución de este problema se alude a una combinación de dos tipos de unidades, de acuerdo con Lamon (1999), una unidad que incluye más de un ítem continuo y una unidad que incluye uno o más objetos continuos que han sido preparticionados. Asimismo, señala que diferentes tipos de unidades pueden proporcionar desafíos a diferentes a los niños. En ocasiones, uno de los factores que afectan un pensamiento del niño acerca de un problema está relacionado a si él puede o no ver todas las piezas bajo consideración.

De igual manera, establece que la noción de *partición* es un mecanismo fundamental para la construcción de los conceptos y operaciones con números racionales También destaca la importancia que adquiere la noción de *equivalencia* cuyas raíces de su comprensión va más allá de las fracciones y son cultivadas cuando se realizan diferentes particiones que resultan en las mismas cantidades relativas

La respuesta esperada para este problema variará dependiendo de la forma en que los estudiantes *reconceptualicen* la unidad en piezas de diferente tamaño; que en este caso pueden ser tamaños que corresponden en términos de: a) un rectángulo pequeño, b) rectángulos pequeños, c) una barra compuesta de seis rectángulos pequeños y d) tres barras. Así que la respuesta, podría darse, respectivamente como: 3 (rectángulos pequeños), $\frac{3}{2}$ (de dos rectángulos pequeños), $\frac{1}{2}$ barra y $\frac{1}{6}$ (de 3 barras) o bien, en expresiones equivalentes a alguna de las descritas.

Estas respuestas tienen relación con la noción *unitizar* propuesta por Lamon (1999, p. 42):

> (…) la asignación cognitiva de una unidad de medida para una cantidad dada; (…), es el tamaño del *bite* mental en términos de los cuales se piensa acerca de la unidad, (…) es un proceso que está en la mente de la persona.

De este modo, también advierte que:

> este proceso es un proceso diferente al de decidir la unidad, agregando que: no solamente es importante para los estudiantes el ser capaces de identificar la unidad en una situación particular; sino que, con objeto de desarrollar sofisticación en el razonamiento, es importante reconceptualizar la unidad en términos de piezas de diferentes tamaños; es decir, es de utilidad ser capaces de *unitizar* y *reunitizar* en el curso de la solución del problema (p.48).

Siendo:

$$I = 3\,(\text{de }1) = 18\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$n\left(\frac{1}{n}\right) \qquad U = 3\,(\text{de }1) = 6\left[\left(\frac{1}{2}\right)(\text{de }1)\right] = 18\left[\left(\frac{1}{6}\right)(\text{de }1)\right] = 9\left[\left(\frac{1}{3}\right)(\text{de }1)\right]$$

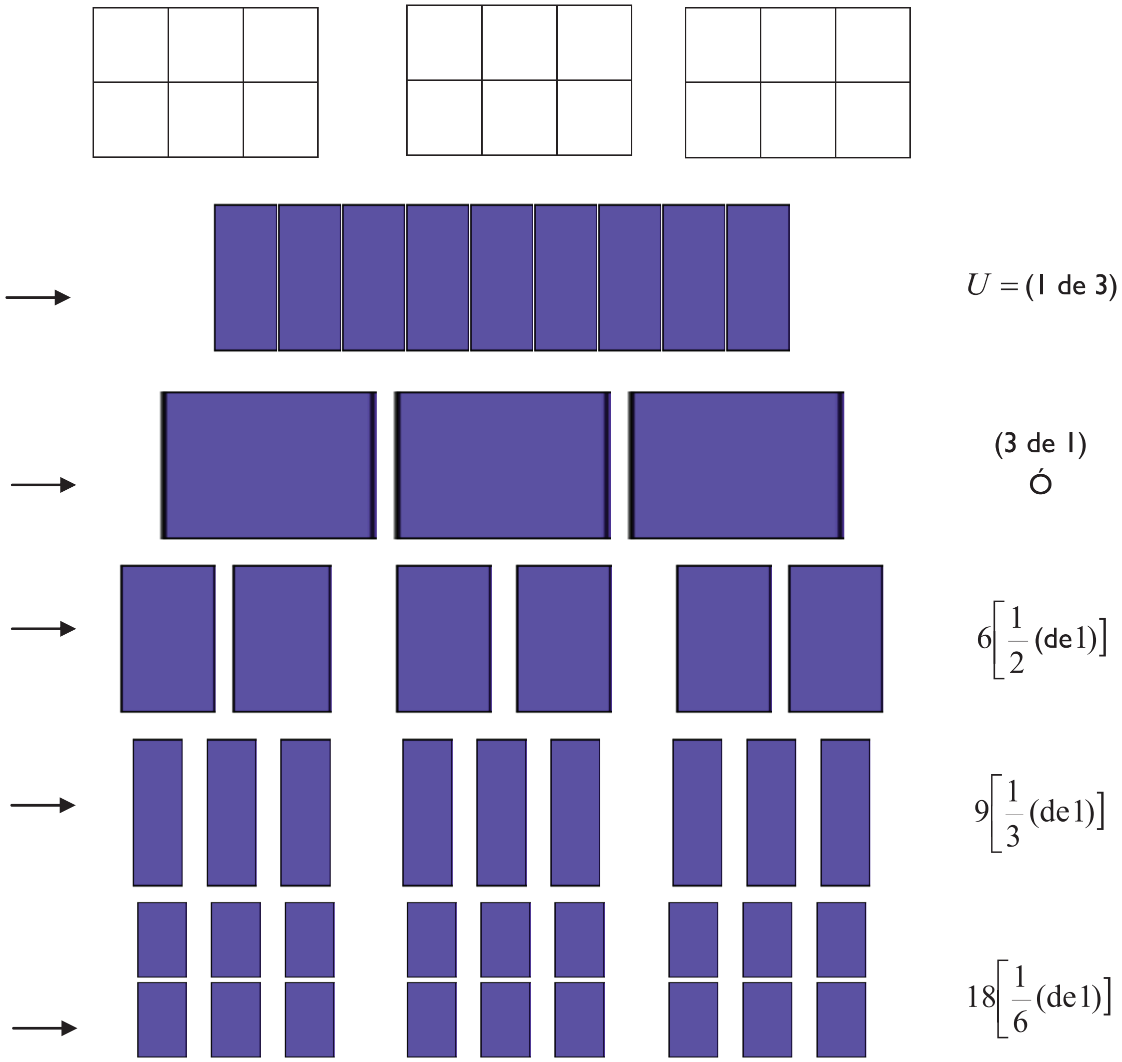
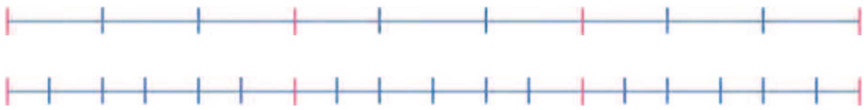


Figura 2. Distintas representaciones de la unidad

La importancia matemática de las nociones incluidas en el problema:



1 de 9

1 de 18

Figura 3. La interpretación de la unidad en la recta numérica.

Se "observa" que la unidad U , por las pre – particiones manifiestas se puede dividir en tantas partes enteras como se desee obteniendo fracciones unitarias como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$ ó $\frac{1}{8}$.

Y que la unidad U queda entonces "arreglada" como 3 (de $\frac{1}{3}$); ó 6 (de $\frac{1}{6}$); ó 9 (de $\frac{1}{9}$); o 18 (de $\frac{1}{18}$). Por lo que estos hechos se colocan desde un punto de vista de los racionales como estructura en cuestiones que apuntan hacia la propiedad de densidad y hacia la propiedad descrita como: $m\left(\frac{1}{m}\right)=1$; es decir, a la noción de inversos multiplicativos.

De las respuestas de los estudiantes se puede decir que cerca del 90 % de los estudiantes de cada grado respondió apropiadamente el problema, en cuyas estrategias observamos su percepción del problema y en su respuesta reflejan la idea generada al respecto. Aquí lo interesante es precisamente el cómo lo asumen y entienden, ya que a pesar de considerarse un problema "fácil", cuya solución parece inmediata en el fondo no lo es, requiere de concepciones sólidas como lo son las nociones de *partición unitización y equivalencia.*

A continuación se presentan evidencias de las soluciones planteadas por 4 estudiantes:

En un primer nivel se encuentran lo realizado por Enriqueta, de primer grado:

Ella considera a la unidad como compuesta de 18 rectángulos pequeños; por lo que su respuesta proviene de la realización del cociente $18 \div 6$.

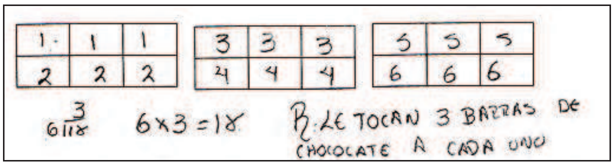


Figura 4. El planteamiento de Enriqueta

En un segundo nivel, se encuentran la producción de una estudiante de segundo grado

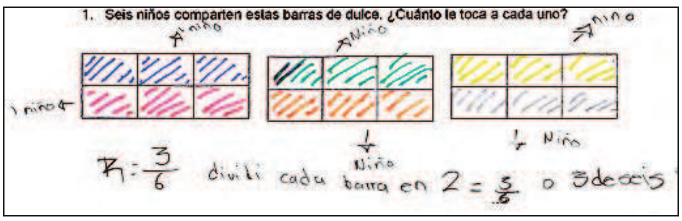


Figura 5. El procedimiento de Sandra

Ella visualiza la unidad como compuesta de 3 barras por lo que su respuesta proviene de la realización del cociente $3 \div 6$ (una unidad formada por 3 de 1).

En un tercer nivel, se encuentran las producciones de Erick, de primer grado y Jaime de segundo:

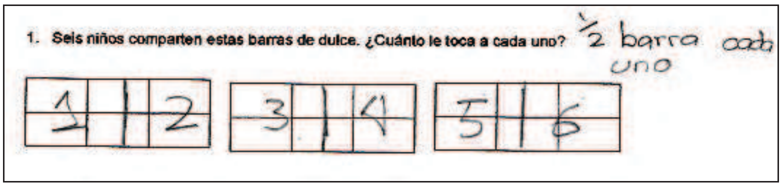


Figura 6. El planteamiento de Erick

Erick visualiza a la unidad como una de 3 (una unidad formada por 1 de 3) por lo que su respuesta proviene del cociente $1 \div 6$.

En el caso de Jaime se observa una visualización similar a la de Erick.

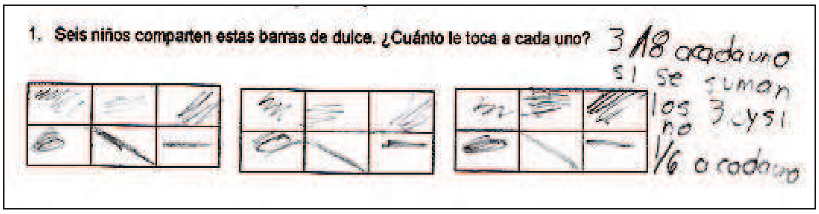


Figura 7. La solución de Jaime

Sin embargo parece que existe una confusión en cuanto a que: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$; es decir, este estudiante parece tener la falsa idea de la suma de fracciones: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Hecho que parece haberse inducido por la equivalencia de fracciones: $\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$ y por la condicional "si se suman" planteada por el estudiante.

Conclusiones

El planteamiento generó la aparición de un par de nociones centrales en la respuesta, la unitización y la partición. Tanto una como otra juegan un papel fundamental en la comprensión del problema. Las producciones de los estudiantes permitieron "mirar" la forma en que percibían a la unidad a partir de lo que veían, ya sea una unidad compuesta o no, su respuesta delata la idea que evoca en sus pensamientos. A pesar de aparentar ser un "planteamiento sencillo y directo" las respuestas generadas por los estudiantes dan cuenta de una variedad de interpretaciones al respecto y de cómo establecen un vínculo entre una imagen y un tipo de simbolización.

Se destaca que a pesar de ser un objeto de investigación muy trabajado por casi dos décadas – las fracciones y los distintos significados que le son asociados – continúa siendo el tema de Aritmética que mayores dificultades presenta al finalizar la educación primaria (Eudave y Dávila, citados por Ávila, Block y Carbajal, 2003). Es así como se reitera que en la educación secundaria las investigaciones en torno a la noción de fracción, sus significados y su operatividad son escasas, la mayoría se encuentra centrada en la educación primaria.

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Block, D. y Carvajal A. (2003). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En: Ángel D. López y Mota (Coord.) *Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje. Tomo I. El campo de la educación matemática, 1993-2001. Educación en ciencias naturales*. (pp. 49 - 170) México: COMIE

Bonilla, E., Block, B. y Waldegg, G. (1993). *La investigación Educativa en los Ochenta, Perspectivas para los Noventa. Cuaderno 10, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* México: Congreso Nacional de Investigación Educativa.

Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italy.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Marquette University. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, New Jersey.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

SEP, (Secretaría de Educación Pública) (1994). *Libro para el maestro*. Educación Secundaria, Matemáticas. México.

SEP, (Secretaría de Educación Pública) (2006). *Programas de Estudio 2006*. Educación básica. Secundaria, Matemáticas. México.