

UNIDADES DIDÁCTICAS EN EL ÁREA DE PRECÁLCULO. UN ESTUDIO SOBRE ORGANIZADORES DE CONTENIDO

Landy Sosa Moguel, Irene Pérez Oxté, Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán
smoguel@uady.mx, carolina_azul.18@hotmail.com, alanda@uady.mx

México

Resumen. En este escrito se presentan resultados de un estudio socioepistemológico para diseñar unidades didácticas basadas en prácticas y verificar la efectividad de organizadores de contenido matemático en su diseño, en el área de Precálculo. En el estudio se buscó determinar condiciones y situaciones para la generación de aprendizajes matemáticos asociados a las nociones de variación y cambio. Se identificó que la relación entre las experiencias de los estudiantes, la naturaleza variacional de las situaciones y la matemática en actividades de naturaleza social fueron un factor determinante en el éxito en la resolución de los diseños de aprendizaje.

Palabras clave: reorganización, saberes, precálculo, práctica, aprendizaje

Abstract. In this paper we present results of a socioepistemologic study to design practice-based didactic units and verify the effectiveness of organizers of mathematical content in their design, in the area of Precalculus. The study sought to determine conditions and situations for the generation of mathematical learning associated with notions of variation and change. It was found that the relationship between students' experiences, the variational nature of mathematics in situations and activities of social nature were a determining factor in the successful resolution of learning designs.

Key words: reorganization, knowledge, Precálculo, practice, learning

Introducción

En la búsqueda de condiciones y circunstancias socioculturales para estructurar un currículo matemático de bachillerato acorde al contexto de una institución educativa particular, en esta investigación se pretende aportar evidencia empírica que oriente bajo qué condiciones y situaciones reorganizar los saberes matemáticos en Precálculo para la generación de aprendizajes matemáticos a partir de diseños didácticos basados en la noción de práctica.

En esta investigación se reconoce como *práctica* a las actividades humanas que posibilitan la construcción de conocimiento matemático en los usos de conocimiento y quehacer de una comunidad para resolver una situación o problema en un contexto específico.

La discrepancia entre la matemática que se enseña y la que se usa en la cotidianidad, entre la actividad matemática escolar y aquella en campos científicos, queda en un plano visiblemente notorio cuando se mira a la matemática en actividades de naturaleza social. Si bien con esta óptica de la matemática se resalta la emergencia del rediseño del discurso matemático escolar y de prácticas educativas que susciten una actividad matemática más auténtica por parte de los estudiantes, también se reconoce a la *práctica* como un contenido transversal en el currículo y eje de reorganización, pues en prácticas como predecir, modelar y optimizar en el quehacer

científico se ha concitado el uso y desarrollo de conocimientos, herramientas y habilidades matemáticas, por ejemplo, para entender y explicar fenómenos de naturaleza variacional.

En contexto escolar, Arrieta y Méndez (2009) dan evidencia de cómo la experiencia que se crea mediante el ejercicio de una práctica de modelación lineal, otorga herramientas matemáticas y argumentativas a los estudiantes, con las que significan conocimiento matemático relativo a la noción función. Según Mejía y Nieves (2001), el aprendizaje en Precálculo se debe desarrollar a partir de experiencias para conformar una estructura mental en los estudiantes que les permita acercarse cualitativa y cuantitativamente a los procesos de cambio. Con tal propósito, se considera la pertinencia de la reorganización de contenido y tratamiento didáctico en Precálculo basado en prácticas de resolución de problemas y la modelación de lo variacional (Alanís y Salinas, 2009).

Con el objetivo de verificar la efectividad de organizadores de contenido en unidades didácticas en Precálculo basadas en prácticas, se desarrolló un estudio exploratorio en el que se cuestionó, ¿En qué medida las unidades didácticas basadas en prácticas favorecen la construcción de conocimiento matemático en Precálculo?

Marco teórico

La investigación se encuadra en dos complejidades asociadas al aprendizaje matemático: la construcción de conocimiento y los diseños didácticos, ambas analizadas en el marco de la Socioepistemología. Con esta teoría se analizan los procesos de construcción y organización del conocimiento matemático a partir del análisis de los contextos y prácticas específicas de las comunidades sociales. Dicho así, la organización y construcción de conocimiento matemático comporta el uso de verbos como predecir, argumentar, gesticular, estabilizar y acumular, que representan prácticas vinculadas al uso social y funcionalidad de la matemática (Cantoral, 2004).

Respecto a la construcción (social) del conocimiento matemático, la noción de contexto adquiere especial importancia, pues de la interpretación de las prácticas que ejercen y las construcciones que hacen determinados grupos sociales se concluye que no están determinadas fuera de su existencia y no son unívocas, por el contrario, es en contextos sociales específicos donde se brinda un abanico de posibilidades de construcciones, si bien variado, restringido, donde los actores toman “lo que está a la mano”, es decir, el contexto social es una totalidad que da significado a las partes (Arrieta, 2003).

Por tanto, se reconoce a la matemática no como un saber fijo y preestablecido, sino como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto

mismo de la práctica que realiza el hombre (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004), es decir, un conocimiento que tiene una función social.

Empero se reconoce que, desde una perspectiva cognitiva, la construcción de conocimientos matemáticos implica el entendimiento e internalización de los símbolos y signos de la cultura y grupo social al que se pertenece, a partir de la negociación mutua de significados y la construcción conjunta de los saberes. Esto es, un conocimiento situado es parte y producto de la actividad, el contexto y la cultura en que se desarrolla y utiliza (Díaz, 2003). Con relación a lo anterior se sabe que:

“el significado de un concepto se deriva del contexto en que está implicado. Por tanto, es el estatuto como útil lo que entra en juego. También se deriva de las relaciones desarrolladas en el contexto con otros conceptos en el mismo dominio matemático o no” (Douady, 1991, p. 116; citado en Godino y Batanero, 1994).

Según Brown, Collins y Duguid (1989, p. 34), “el conocimiento queda referido a la situación de la que surge y en la que se usa, las situaciones co-producen el conocimiento por medio de la actividad. Se puede argumentar que el aprendizaje y la cognición son fundamentalmente situadas”.

Por lo anterior, con base en una perspectiva socioepistemológica, se considera que el conocimiento que se produce en la sociedad se construye bajo un contexto específico, esto es, el conjunto de condiciones y circunstancias en las que física o simbólicamente se sitúa un hecho o persona, asimismo, supone la especificidad de los fenómenos o situaciones, pues éstos han de combinarse de manera única e irreplicable para tener influencia en lo que él acontece. Dicho así, el contexto tiene presencia en las formas de pensar, aprender y actuar de los individuos de una comunidad.

En cuanto a la complejidad de diseño de unidades didácticas en matemáticas, Rico (1998) señala que el problema reside en la definición de criterios para la toma de decisiones sobre tareas en su planeación, desarrollo y evaluación. Por tanto, para su diseño es necesario tomar en cuenta criterios que permitan desarrollar aprendizajes en los estudiantes a través de organizadores menos subjetivos y más funcionales. Se denominan organizadores a aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular tales tareas. Por ende, un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de

construcción y difusión del conocimiento matemático y criterios para abordar y controlar esa complejidad.

En ese sentido se consideran como organizadores a los conocimientos derivados de la didáctica de los conceptos matemáticos, su epistemología, los procesos cognitivos que le son asociados a dichos conceptos y lo sociocultural que, bajo un análisis sistémico (socioepistemológico), proporcionan información sobre los procesos de construcción, organización y difusión del conocimiento matemático.

Método

Se diseñó y experimentó una unidad didáctica en Precálculo basada en la práctica de modelación de lo variacional, fundamentada en el análisis socioepistemológico del concepto función.

Las actividades de aprendizaje se estructuraron a partir de tareas de conceptualización, operación y formalización inherentes al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Así, se conformó un diseño de unidad didáctica en la que subyace la práctica de modelación lineal en situaciones de naturaleza variacional, continua y discreta.

La unidad se experimentó con dieciocho estudiantes (9 hombres y 9 mujeres) del segundo semestre de una escuela preparatoria, quienes aún no habían cursado Precálculo, conformados en equipos de tres personas.

Tabla 1. Actividades de la unidad didáctica de modelación lineal

Actividad 1: Movimiento de un objeto		Actividad 2: Costo de un servicio																																					
Práctica																																							
Generar modelos matemáticos para calcular y representar la variación de movimiento de cuerpos u objetos con rapidez constante		Generar estrategias y modelos matemáticos para calcular costos a partir de datos numéricos																																					
Situación																																							
		<table border="1"> <tr> <td colspan="6">Compañía A</td> </tr> <tr> <td>Cantidad de llamadas</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>12</td> <td>18</td> <td>21</td> </tr> <tr> <td>Cantidad a pagar por el consumidor (\$)</td> <td>54.8</td> <td>59.6</td> <td>69.2</td> <td>78.8</td> <td>83.6</td> </tr> <tr> <td colspan="6">Compañía B</td> </tr> <tr> <td>Cantidad de llamadas</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>12</td> <td>18</td> <td>21</td> </tr> <tr> <td>Cantidad a pagar por el consumidor (\$)</td> <td>101.5</td> <td>103</td> <td>106</td> <td>109</td> <td>110.5</td> </tr> </table>		Compañía A						Cantidad de llamadas	3	6	12	18	21	Cantidad a pagar por el consumidor (\$)	54.8	59.6	69.2	78.8	83.6	Compañía B						Cantidad de llamadas	3	6	12	18	21	Cantidad a pagar por el consumidor (\$)	101.5	103	106	109	110.5
Compañía A																																							
Cantidad de llamadas	3	6	12	18	21																																		
Cantidad a pagar por el consumidor (\$)	54.8	59.6	69.2	78.8	83.6																																		
Compañía B																																							
Cantidad de llamadas	3	6	12	18	21																																		
Cantidad a pagar por el consumidor (\$)	101.5	103	106	109	110.5																																		
Tareas																																							
1-2	Describir qué cambia en la situación y con respecto a qué cambia																																						
3	Indicar el lugar o posición en el que	Tomar una decisión sobre qué compañía																																					

	llegarán los autos a la meta	telefónica ofrece mejor costo de servicio para los hogares
4	Proporcionar un modelo matemático que permita calcular la posición de cada auto conforme el tiempo transcurre	Decidir y argumentar qué gráfica modela el costo del servicio telefónico en los hogares
5	Estimar que tan lejos estará un auto de control remoto cuando haya transcurrido un determinado tiempo	Generar un modelo matemático asociado a los costos de los servicios telefónicos para una empresa y tomar la decisión justificada sobre qué compañía telefónica conviene contratar
6	Etiquetar los ejes coordenados de una representación gráfica, así como describir verbalmente el movimiento de los autos de control remoto durante el lapso de la carrera que se representa gráficamente	

Resultados

El establecimiento de una relación entre la naturaleza de las situaciones y las experiencias de los estudiantes, a partir de la fijación y discusión de la variación, favorece que evolucionen sus recursos y habilidades matemáticas para modelar lo variacional, pero en especial para darle significado a la matemática de la variación y el cambio.

La práctica de modelación lineal y el papel de las experiencias previas de los estudiantes presentes en cada actividad del diseño didáctico, en conjunto dieron la pauta para que ellos movilicen recursos matemáticos y manifiesten significados de nociones matemáticas (por ejemplo, la noción función) y físicas (velocidad, distancia), como puede observarse a continuación en las respuestas de los estudiantes.

Equipo 2: $\text{Velocidad de coche} \times \text{Tiempo transcurrido} = \text{distancia recorrida}$

minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A1	8	11	14	17	20	23	26			
A2	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
A3	4	8	12	16	20	24	28			

Imagen 1. Respuestas de la Tarea 4 - Actividad: Movimiento de un objeto

Lo anterior permitió que los estudiantes asignaran significados a las componentes de los modelos matemáticos que proporcionaban, de tal manera que al variar una condición en la situación, ellos reconocieron cómo se traduce esto en el modelo obtenido (ver la Imagen 2).

Equipo 2 - Tarea 3

(Modelo matemático)

$$\text{Monto a pagar} = (\text{Número de llamadas}) \times (\text{costo por llamada}) + (\text{Renta de línea})$$

Compañía A

$$M = (100) \times (1.6) + (50) = \$210$$

Compañía B

$$M = (100) \times (.5) + (100) = \$150$$

“La compañía B (le conviene) porque cada llamada cuesta \$. 50 mas la renta que son 100 y al llegar a las 100 llamadas de los dos se comparan los precios y es más barato la compañía B”

Equipo 2 - Tarea 5

Renta A en empresas: \$100
 Renta B en empresas: \$200

monto a pagar = $1.6 \times 100 + 100 = \$260$
costo por llamada # de llamadas Renta

monto a pagar = $.5 \times 100 + 200 = \$250$
costo por llamada # de llamadas Renta

Imagen 2. Respuesta del Equipo 2 - Actividad: Costos de un servicio o producto

Asimismo, las condiciones sociales como la experiencia y la función social de la matemática en los diseños, permitieron evolucionar la práctica de modelación lineal en los estudiantes, lo que se constató en las estrategias, herramientas e incluso argumentos que emplearon en las actividades. Véanse los ejemplos siguientes.

Establecimiento de secuencias de cambios

$$A1 = 3x + 5y$$

$$A2 = 2x + 6 = y$$

$$A3 = 4x - y$$

Equipo 6- Actividad 2

	3	2	3	4	5	6	7
3m/n + 5	8	11	14	17	20	23	26
2m/n + 6	9	10	12	14	16	18	20
4m/n + 0	4	9	12	16	20	24	28

Equipo 4 - Actividad 2

A partir del comportamiento de datos de un modelo primario, establecen otro modelo cuando se ha variado una condición en la situación

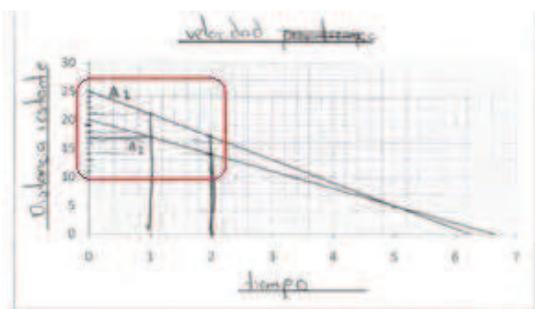
A) \$=1.6 (x)+50
B) \$=.5(x)+100

→

A) \$=1.6 (x)+2 (50)
B) \$=.5(x)+2 (100)

Equipo 3 - Actividad 3 y 5

Imagen 3. Evolución en las estrategias o herramientas matemáticas ante una práctica de modelación lineal



2. Describe verbalmente el movimiento de los autos de control remoto durante el lapso de la carrera que se representa en la gráfica anterior:

$A1 = 4 \text{ m/min}$ $A2 = 3 \text{ m/min}$
 El primer auto de lataba mas distancia que el segundo por el tercer mas velocidad comienzan a encontrarse, hasta que en un momento se empiezan por que el que tiene mas velocidad.

Equipo 3- Actividad 2

Imagen 4. Argumentos de los estudiantes ante situaciones de modelación lineal

Así, incorporar en los diseños las experiencias del estudiante con la actividad matemática que se pretende construya, en este caso, la práctica de modelación lineal, favorece que el estudiante otorgue significados a los conceptos matemáticos que subyacen en las actividades (en esta unidad, el concepto función lineal) y realmente hace que evolucione su práctica conforme se enfrenta a más situaciones de este tipo.

Conclusiones

Cuando en los diseños de aprendizaje se parte de organizadores obtenidos de la interacción del análisis entre la epistemología del conocimiento, lo social, cognitivo y didáctico asociado a nociones del Precálculo, adquiere importancia la integración tanto de la matemática en actividades de naturaleza social como de tareas que posibiliten el desarrollo de estructuras cognitivas variacionales para ampliar las posibilidades de éxito en la resolución de actividades y en la construcción de significados matemáticos.

Así, la relación dialéctica entre las prácticas diseñadas bajo este modelo y las experiencias de los estudiantes, es decir, entre la función social de la matemática y el individuo son condiciones bajo las cuales el estudiante otorga un significado a lo que hace y por ende construye conocimiento matemático que es funcional en la situación que le da cabida.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. y Salinas, P. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(3), 355-382.

Equipo 3 - Actividad 3:

“Si la compañía realiza muchas llamadas le conviene la B porque aunque la renta sea cara las llamadas son más baratas. Si son pocas las llamadas le conviene la A porque la renta es menor”

Equipo 5 - Actividad 3:

“La compañía B, porque a pesar de que a partir de 3 llamadas se cobra \$101.5, después cobra por llamada \$1.5 que resulta menos costoso que la compañía A”

- Arrieta, J. y Méndez, M. (2009). La experiencia como la evolución de las prácticas sociales. En P.Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 573-580. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Institución Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional. Unidad Zacatenco. Distrito Federal, México.
- Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En Leonora, D. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1)*, (418-422) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, January-February, 32-42.
- Cantoral, R. (2004) Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L, Díaz (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1)*, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Díaz, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 5 (2). Consultado el 20 de Septiembre de 2011 en: <http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html>
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Mejía, H. y Nieves, A. (2001). Propuesta de análisis del cambio en el Precálculo, a partir de una situación real. En C. Cortés, F. Hitt, A. Sepúlveda y L. Guerrero (Eds.). *Memorias del Noveno encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior* (pp. 174-181). Michoacán: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1(1), 22-39.