MODELACIÓN SENOSOIDAL: UN EXPERIENCIA EN EL LABORATORIO VIRTUAL DE CIENCIAS

Jaime Arrieta, Gabriela Buendía, Carmelinda García, Darío López
Universidad Autónoma de Guerrero, México
CICATA-IPN
jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. En este trabajo se concibe a las prácticas de modelación como una actividad que articula dos entidades con la finalidad de intervenir en una de ellas, lo modelado, a partir de la otra, llamada modelo. Elaboramos un diseño de aprendizaje basado en la modelación de fenómenos por modelos senosoidales con la intención de aportar elementos para la caracterización de la construcción de la red de lo senosoidal. Las características de este diseño son la experimentación virtual, la interacción con datos, gráficas y ecuaciones algebraicas y/o diferenciales que modelan fenómenos periódicos, así como el ajuste de los datos con las herramientas tecnológicas que henos diseñado para este fin.

Palabras clave: modelación senosoidal, Laboratorio Virtual, prácticas

Abstract. This paper conceives modeling practices as an activity that links two entities in order to participate in one of them: a model to intervene on that which has to be modeled. We prepare a learning design based on the modeling of phenomena by means of sinusoidal models intended to provide elements for the characterization of the construction of the sinusoidal network. The characteristics of this design are virtual experimentation, interaction with data, graphs and algebraic equations and / or differential modeling periodic phenomena, and the data fit with the technological tools designed for this purpose.

Key words: sinusoidal modeling, virtual laboratory, practices

Introducción

En las clases de ciencias, tradicionalmente se pretende el aprendizaje sin experimentación, sin laboratorios, donde se resuelven problemas de tipo artificial, manipulando fórmulas, despejando variables y operando con entes algebraicos y numéricos; dichos problemas están exentos de lo que llamamos *ruido en datosrespecto a una teoría*.

Nuestro planteamiento es revalorar el papel del experimento en la generación del conocimiento, relacionar las demás ciencias y a las matemáticas con prácticas diferentes a las que actualmente las enlazan. Proponemos a las prácticas de modelación como vínculo entre las ciencias y las matemáticas.

La experimentación y la modelación

La interacción con el fenómeno, o la experimentación en sentido amplio, es una actividad necesaria en las prácticas de modelación. La fase inicial de la modelación es la interacción con el fenómeno. Sin embargo, la simple interacción no caracteriza la modelación, son necesarios actos de articulación entre el fenómeno con otro ente que permita intervenir en el fenómeno a modelar. Por ejemplo, los datos numéricos obtenidos en la experimentación del movimiento pendular no se conforman en modelo hasta que son utilizados para predecir el fenómeno. La modelación se da, en este caso, al articular los datos numéricos con el fenómeno con la intención de predecirlo, es en este momento que la tabla de datos adquiere el estatus de modelo numérico. Esta es la fase del acto de modelar o la construcción de modelos. En este sentido los modelos son herramienta, su razón de ser es la intervención en el fenómeno.

Para la intervención en un fenómeno se construyen y utilizan diferentes modelos, numéricos, gráficos y algebraicos, por mencionar algunos. Articulando los parámetros del fenómeno y de los diferentes modelos se construye una red del fenómeno con sus modelos. Esta red hace posible la intervención en el fenómeno a partir de los modelos sino la articulación de los diferentes modelos. Esta es otra fase de la modelación.

Es posible que los actores conformen una red de modelos con un determinado fenómeno, mas ésta no será estable hasta que pueda prescindir del fenómeno que le dio origen. Es así que estudiantes, después de conformar una red de lo lineal al modelar la elasticidad de los resortes, actúan como sino tuvieran experiencia al modelar el llenado de un recipiente cilíndrico con un gasto de agua constante. No utilizan la red construida previamente pues la red es de la elasticidad de los resortes (Méndez, 2008). Es necesario establecer ligas entre estos dos fenómenos, es necesaria una fase de analogía entre estos dos fenómenos.

Es así que proponemos cuatro fases de la modelación: la interacción con el fenómeno, el acto de modelar y la construcción de modelos, la conformación de una red de modelos con el fenómeno y la analogía.

La modelación virtual

En el intento de incorporar las prácticas de modelación a los sistemas escolares, encontramos diversas dificultades, una de éstas es la ausencia de laboratorios o de instrumentos de medición, que dificultan la reproducción de los fenómenos a modelar.

Como alternativa diseñamos un *software* para calculadoras o PC's, llamado *Laboratorio Virtual de Ciencias (LVC)* que simulan diversos fenómenos de las ciencia naturales o sociales y que atienden a las intenciones de diseños de aprendizaje basados en la modelación (López, 2010).

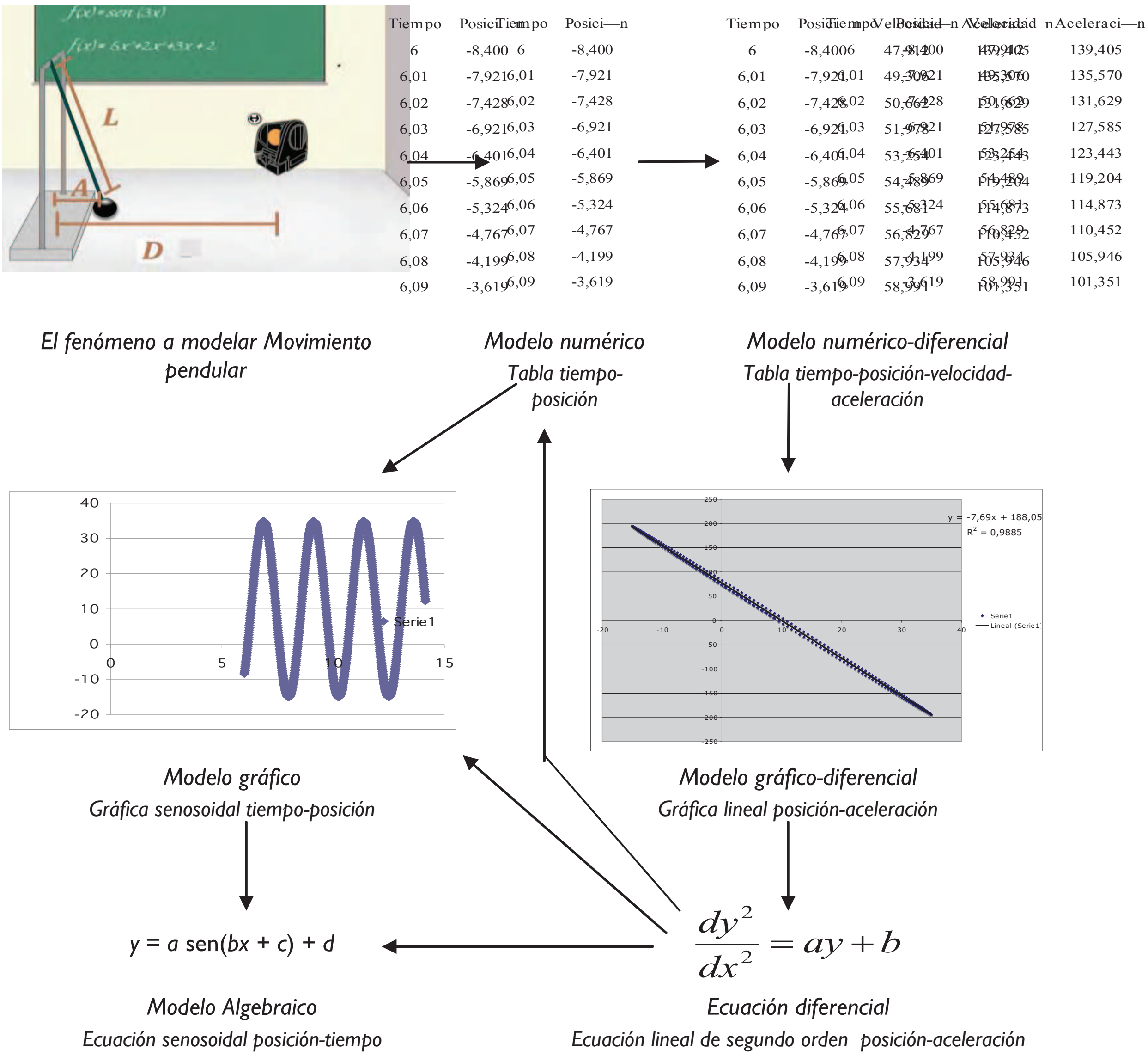
El carácter situacional de las prácticas de modelación es fundamental en nuestra perspectiva, desde este punto de vista, las prácticas ejercidas en contextos virtuales contienen aspectos que las diferencian de prácticas de modelación en otros contextos. Es por esto que estudiamos las "prácticas de modelación virtual", prácticas que devienen de las prácticas de modelación al modificar el contexto de su ejercicio y con ello adquieren características particulares.

La red de lo senosoidal

Consideramos una red llamada lo senosoidal como la red que articula un fenómeno con sus diferentes modelos senosoidales. Estos modelos pueden ser numéricos, numéricos-diferenciales, ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, gráficas y gráficas-diferenciales.

En esta red partimos del fenómeno, experimentando construimos una tabla que se constituye en el modelo numérico, calculando las razones de cambio construimos un modelo numérico-diferencial, ajustando los datos distancia-aceleración obtenemos la ecuación diferencial que modela el fenómeno. En un camino paralelo podemos pasar del modelo numérico, al modelo algebraico vía el ajuste de los datos tiempo-posición. Los dos caminos desarrollados se articulan comparando los resultados obtenidos al resolver la ecuación diferencial y comparando la tabla de datos generada a partir de la solución y su gráfica (figura 1).

Figura 1. La red senosoidal que articula los modelos con el fenómeno



Esta red pretende poner en funcionamiento elementos que la investigación socioepistemológica ha propuesto para desarrollar en pensamiento trigonométrico (Buendía y Montiel, 2009, 2011). Al ser una perspectiva teórica interesada en el rol epistemológico de las prácticas en la construcción del conocimiento matemático, Buendía y Montiel proponen elementos que integran el pensamiento trigonométrico –más que la función trigonométrica como tal- y que se desarrollan en el ejercicio intencional de ciertas prácticas.

Así, la especificidad de este comportamiento periódico se construye en un contexto de variación, y se distingue de otros comportamientos cuando se reconoce en sus cambios y sus variaciones sucesivas el mismo *tipo* de comportamiento (trigonométrico, acotado y periódico). Proponen entonces, como aportación al rediseño del discurso matemático tradicional, un escenario donde la ley de variación de un comportamiento periódico-acotado constituya una herramienta predictiva.

"La modelación del movimiento pendular", un diseño de aprendizaje basado en la modelación senosoidal

Elaboramos un diseño de aprendizaje basado en la modelación de fenómenos por modelos senosoidales con la intención de aportar elementos para la caracterización de la construcción de la red de lo senosoidal. El diseño esta guiado por las fases que hemos definido para la modelación.

Fase I. La experimentación.

En esta fase los estudiantes experimentan con un péndulo virtual; a través de la simulación por medio de software, toman datos y los estructuran en una hoja de cálculo.

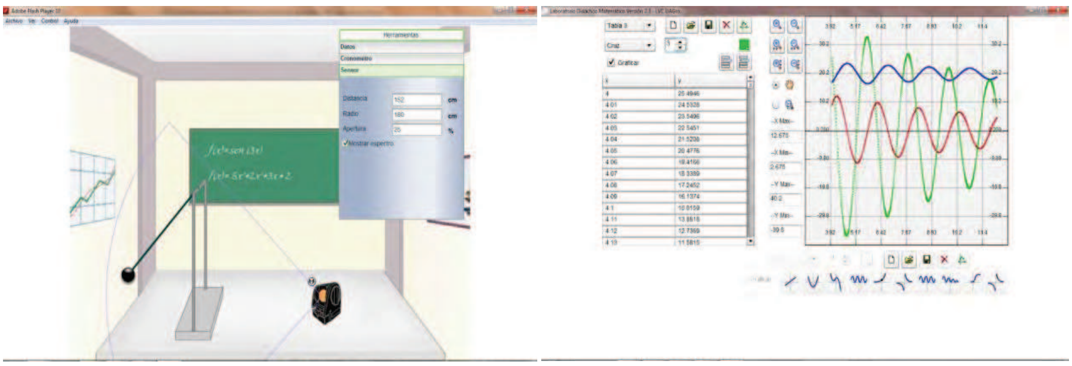


Figura 2. Simulador del movimiento pendular y software (LDM) para el ajuste grafico de datos

Fase II. El acto de modelar, la construcción de modelos

En esta fase se plantean situaciones a los actores en donde tendrán que articular tablas, gráficas y ecuaciones con el fenómeno. Las situaciones planteadas son las siguientes.

1. A partir de la predicción los estudiantes utilizan y caracterizan la tabla, identifican numéricamente el periodo, la amplitud y la frecuencia.

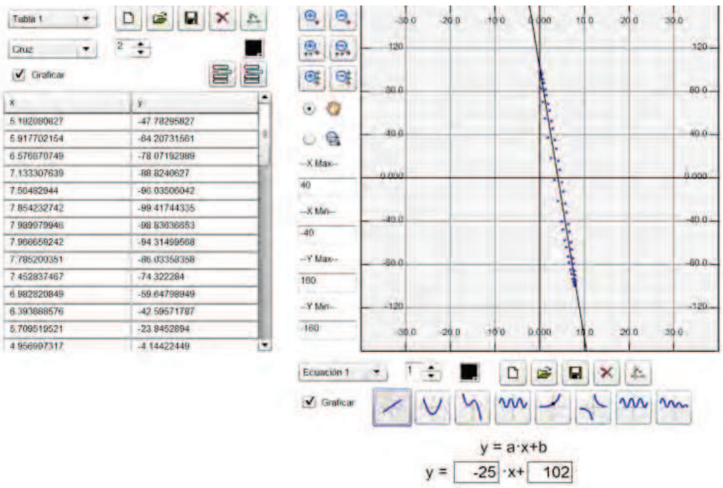
2. En su intento por caracterizar la tabla calculan con la hoja de cálculo la primera razón de cambio y exploran la relación entre tiempo-velocidad, distancia-velocidad.

3. Calculan la segunda razón de cambio y exploran la relación tiempo-aceleración, distancia-aceleración, velocidad-aceleración.

Tiempo	Posici—n	Velocidad	Aceleraci—n
6	-8,400	47,912	139,405
6,01	-7,921	49,306	135,570
6,02	-7,428	50,662	131,629
6,03	-6,921	51,978	127,585
6,04	-6,401	53,254	123,443
6,05	-5,869	54,489	119,204
6,06	-5,324	55,681	114,873
6,07	-4,767	56,829	110,452
6,08	-4,199	57,934	105,946

Figura 3. Modelo numérico-diferencial. Tabla tiempo-posición-velocidad-aceleración

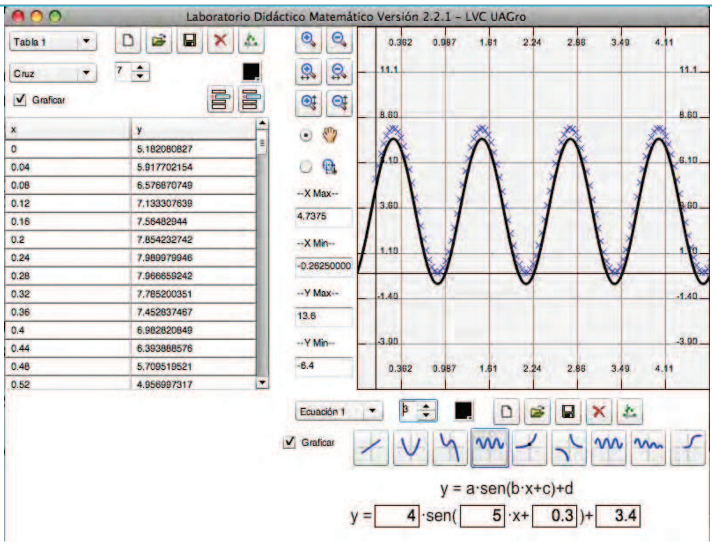
4. Al analizar la gráfica de los datos distancia-aceleración consideran que existe una relación lineal. Ajustan gráficamente los datos con el programa LDM. De esta manera obtienen el modelo diferencial.



$$\frac{dx^2}{dt^2} = -25x + 102$$

Figura 4. Ajuste de datos posición-aceleración y obtención de la ecuación diferencial como modelo

5. En el programa LDM ajustan gráficamente los datos tiempo-distancia, identifican gráficamente el periodo, la amplitud y la frecuencia y articulan los parámetros gráficos con los de la fórmula $y = a\text{sen}(bx + c) + d$.



$x(t) = 4 \text{ sen } (5t + 0.3) + 4$

Figura 5. Ajuste gráfico de los datos tiempo-posición y obtención de la ecuación senosoidal como modelo

Fase III. La red de lo senosoidal

Articulan el parámetro *a* de la fórmula con la amplitud de la gráfica, de la tabla y del movimiento pendular. El parámetro *b* de la fórmula con la frecuencia de la gráfica, de la tabla y del péndulo. El parámetro *c* de la fórmula con el desplazamiento horizontal de la gráfica, el tiempo inicial de la tabla y del péndulo. El parámetro *d* de la fórmula con el desplazamiento vertical de la gráfica, la posición inicial en la tabla y del péndulo.

Fase IV La analogía

Los actores establecen una analogía entre el movimiento pendular y el movimiento armónico simple.

Investigan con que otros fenómenos pueden establecer analogías.

Los actores de la puesta en escena del diseño

Los actores que participan en la puesta en escena son 25 estudiantes de cuarto semestre del Colegio de Bachilleres, organizados en seis equipos cinco de cuatro integrantes y uno de cinco.

Primeras observaciones

El discurso entablado en los equipos y en la búsqueda de consensos en el grupo es muy rico en argumentos pues muestran la articulación que establecen entre el fenómeno y los diferentes modelos. Para mostrar esto presentamos dos episodios, uno del equipo uno donde presentan las formas de predecir con la tabla de datos y el otro del equipo tres tratando de interpretar la gráfica distancia-velocidad.

Episodio 1. Hay diferentes formas de decir cuál es la posición

Este episodio se desarrolla después de discutir la situación donde se pedía que determinaran la posición del péndulo después de 8.48 segundos. La tabla tiempo-distancia contenía datos hasta el segundo 3.44 y el incremento del tiempo era de 0.04 segundos. Para predecir en este caso determinan el periodo, es decir cada que tiempo tomaba la misma posición el péndulo, 1.24 segundos, entonces la posición requerida es la del segundo 1.04, 1.17 metros. El segundo 1.04 lo calculan restando al segundo 8.48 seis veces 1.24, 8.48 -6 (1.24) = 1.04.

La situación que se propone es ¿Cuál es la posición del péndulo en el segundo 1.374?

Luisa: Se calcula de otra forma que el anterior

Roberto: Si, ya tengo la forma. Mira, tomamos la posición en el más cercano (señala la posición en 1.36) o sea 6.915. Aja, te falta .014, lo multiplicas por la velocidad (señala la celda donde ha calculado la velocidad promedio en 1.36, escribe .014 por 12.14) y nos da 0.1699, casi 0.17, esto es lo que me faltaba de metros. Aja, y sale (anota 6.915 + 0.17) 7.085. Aja 7.085 metros.

Análisis: El método de Roberto es $x\ (t + h) = x\ (t) + h\ \Delta x/\Delta t$, un método basado en la serie de Taylor de primer orden, con argumentos contextuales y con diferencia finitas.

Episodio 2. ¿Por qué sale un círculo?

María: Ya te fijaste, que rara sale la gráfica, ¿por qué sale un círculo?

Ulises: Jamás me hubiera imaginado que la gráfica saliera así.

María: ¿Cómo te explicas esto?

…

Isaías: Ya me rompí la cabeza y no doy, como que debe de haber un equilibrio. Si el péndulo está más lejos la velocidad disminuye, si esta cerca la velocidad aumenta.

Ulises: No. En el punto más cerca la velocidad es cero y en el punto más lejos también.

Isaías: Aja, pero yo imaginaba así porque deben de compensarse para que quede una cantidad constante. Todos los puntos deben de quedar a una distancia igual del centro. Es círculo pues.

María: Pero los puntos no son distancia, son distancia como velocidad.

Isaías: Pero es lo mismo. Aquí quién es el centro.

Ulises: Mira este es el punto más cercano al sensor y este el más alejado. (Señala con el dedo en la gráfica el punto (0,0) y le punto (8,0)). Cámbiale ahí (se refiere al simulación del péndulo) el vuelo del péndulo y se va hacer más grande (el círculo).

Isaías: Entonces el centro es como el centro del péndulo. Aja, ahí la velocidad es máxima en una dirección por eso esta hacia arriba (señala el punto (4,20)) y la otra es la velocidad máxima pero en otra dirección por eso esta hacia abajo (señala el punto (4,-20)). Aja, ya sabía que tenía razón es como guardar el equilibrio. Va aumentando la posición y va aumentando la velocidad, luego sigue aumentando y baja la velocidad (con su dedo va recorriendo la parte superior del círculo) y luego al revés pero negativo (ahora recorre la parte inferior del círculo de derecha a izquierda).

Análisis: En este episodio es notorio como argumentan los actores utilizando elementos del movimiento pendular así como propiedades del modelo gráfico y numérico.

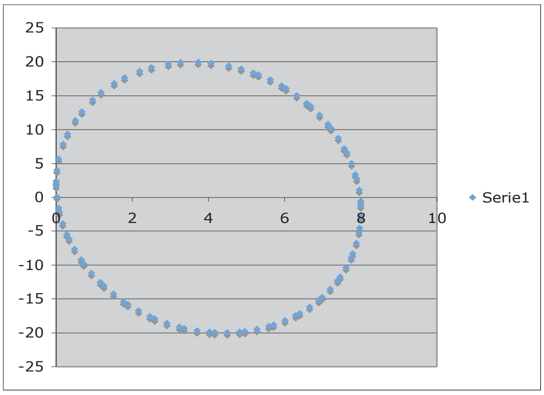


Figura 6. Gráfica posición-velocidad

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa22*, 1285-1294 México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Buendía, G. y Montiel, G. (2011) From History to Research in Mathematics Education: socio-epistemological elements for trigonometric function. In Katz, V. and Tzanakis, C. (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. Mathematical Association of America.

López, C. (2010).*El laboratorio virtual de ciencias, una experiencia intercultural*. Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Méndez, M. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 575 - 581. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.