# CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

**ANGELICA CABEZAS RAMIREZ**

**LUZ MYRIAM ORJUELA AGUIRRE**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**
**INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA**
**ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
**LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**
**SANTIAGO DE CALI**
**2015**

# CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

**ANGELICA CABEZAS RAMIREZ**
**Código: 1127109**
**LUZ MYRIAM ORJUELA AGUIRRE**
**Código: 1131288**

**Requisito para optar el título de Licenciadas en Educación Básica con énfasis en Matemáticas**

**Director del Trabajo de Grado**
**LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**
**INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA**
**ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
**LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**
**SANTIAGO DE CALI**
**2015**

**Anexo No. 3**

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

**ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO**

Programa Académico 3469

Fecha

| Día | Mes | Año |
|---|---|---|
| 13 | 04 | 2016 |

| Título del Trabajo o Proyecto de Grado |
|---|
| Concepciones de los Docentes de Ed. Básica sobre el T.F.A. |
| Se trata de: |
| Proyecto ☐ Informe Final ☒ |
| Director |
| Luis C. Recalde |
| Nombre del Primer Evaluador |
| Carlos Alexis Gómez |
| Nombre del Segundo Evaluador |
| Luz Victoria De La Pava |

Estudiantes

| Nombres y Apellidos | Código | Programa Académico |
|---|---|---|
| Angélica Cabezas Ramírez | 1127109 | 3469 |
| Luz Myriam Oriuela | 1131280 | 3469 |

Evaluación

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Aprobado | ☒ | Meritorio | ☐ | Laureado | ☐ |
| Aprobado con recomendaciones | ☐ | No Aprobado | ☐ | Incompleto | ☐ |

*En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de __________ (máximo un mes) ante:*

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

*En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de __________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* dd mm aa

*En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes, expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

| Director del Trabajo o Proyecto de Grado | Primer Evaluador | Segundo Evaluador |
|---|---|---|

| Recomendaciones ☐ | Observaciones ☐ | Razón de desacuerdo - Alternativas ☐ |
|---|---|---|

*Si se considera necesario, usar hojas adicionales.*

| Firmas | | |
|---|---|---|
| | | |
| Director del Trabajo o Proyecto de Grado | Primer Evaluador | Segundo Evaluador |

*AGRADECIMIENTOS*

*Quiero dar las gracias a Dios.  A mis padres, por siempre apoyarme en todo.*

*A nuestro tutor el Profesor Recalde, que con su conocimiento y sabiduría nos guió en este trabajo.*

*Angélica Cabezas Ramírez*

*A mi madre y familia que son mi fuerza para continuar cada día.*

*Quiero expresar mi profundo agradecimiento a nuestro Director el Profesor Luis Recalde por todo su apoyo para llevar a cabo esta tesis, por su paciencia y respaldo durante este recorrido que hoy nos permite culminar la segunda etapa más importante de nuestras vidas.*

*A  las personas que nos animaron y aconsejaron, amigos, compañeros, profesores, en especial al Maestro Jorge Enrique Galeano por escuchar nuestras dudas y ayudarnos a mejorar.*

*Luz Myriam Orjuela Aguirre*

**TABLA DE CONTENIDO**

CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA ..... 1

RESUMEN ..... 1

INTRODUCCIÓN ..... 2

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN ..... 3

1.1. Presentación del problema de investigación ..... 3

1.2. Justificación ..... 5

1.3. Objetivos ..... 10

1.3.1. Objetivo General ..... 10

1.3.2. Objetivos específicos ..... 10

1.4 Marco teórico y de antecedentes ..... 10

1.4.1 Marco de antecedentes ..... 10

1.4.2 Marco curricular ..... 15

1.4.3 El análisis de concepciones ..... 17

1.5 Teorema Fundamental de la Aritmética ..... 21

1.6 Metodología ..... 27

2 DESCRIPCIÓN DEL DESARROLLO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA ..... 29

2.1 Los números primos para los pitagóricos ..... 29

2.2 La teoría de números y Euclides ..... 30

2.3 Eratóstenes y su método para hallar primos ..... 37

2.4 El libro de texto de Nicómaco ..... 38

2.5 Al-Farisi un paso importante en el TFA ..... 38

2.6 El cálculo de los divisores de un número de Jean Prestet ..... 41

2.7 Los números de Mersenne ..... 42

2.8 El pequeño teorema de Fermat y los números primos ..... 43

2.9 Euler: el octavo número perfecto ..... 45

2.10 Legendre y la distribución de los números primos ..... 48

2.11 Gauss: el último eslabón ..... 50

3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS IDENTIFICADOS EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA ..... 55

3.1 La primalidad de 1 ..... 55

3.2 La unicidad del TFA ..... 56

3.3 El orden o la distribución de los números primos ..... 57

4 CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES ..... 58

4.1 Población objeto de estudio ..... 58

4.2 Instrumento ..... 59

4.3 Objetivo de las preguntas en cada etapa ..... 59

4.3.1 Contextualización ..... 59

4.3.2 Valoración del conocimiento de los números primos ..... 60

4.3.3 Conocimiento del Teorema Fundamental de la Aritmética ..... 60

4.3.4 Implicaciones del Teorema Fundamental de la Aritmética en la enseñanza ..... 60

4.4 Categorías de análisis ..... 60

4.4.1 Categoría 1: Desarrollo histórico del concepto de número ..... 61

4.4.2 Categoría 2: Conocimiento sobre el Teorema Fundamental de la Aritmética y los números primos ..... 62

4.4.3 Categoría 3: Enseñanza del Teorema fundamental de la Aritmética y los números primos en la escuela ..... 63

4.4.4 Categoría 4: Aplicaciones y usos de los números primos ..... 64

4.5 Descripción de las respuestas obtenidas por los docentes ..... 64

4.5.1 Aspectos cualitativos de las respuestas de los docentes ..... 65

4.5.2 Análisis cuantitativo de las respuestas de los docentes ........ 78

5 CONCLUSIONES ........ 92

REFERENCIAS ........ 96

ANEXOS ........ 99

ANEXO 1 ........ 99

ANEXO 2 ........ 100

## ÍNDICE DE FIGURAS


**Figura 2.1 Teorema Fundamental de la Aritmética en los Elementos**............................... 34
**Figura 4.1 Vigencia de la noción de número de Euclides** .................................................. 78
**Figura 4.2 Respuesta de un profesor de colegio público (primaria, grado segundo)**....... 79
**Figura 4.3 Número como representación de una cantidad**................................................ 79
**Figura 4.4 Semillero de Ciencias (Secundaria, grados 6 a 9):**........................................... 80
**Figura 4.5 Relación números irracionales** ......................................................................... 80
**Figura 4.6 Papel del cero** ...................................................................................................... 81
**Figura 4.7 ¿el cero es un número natural?** ......................................................................... 81
**Figura 4.8 Colegio público (Secundaria 6° y 7°):** .............................................................. 81
**Figura 4.9 Semillero de Ciencias (Secundaria):** ................................................................. 82
**Figura 4.10 Vigencia noción de número primo de Euclides** .............................................. 82
**Figura 4.11 Colegio público**.................................................................................................. 83
**Figura 4.12 ¿es el 1 un número primo?**................................................................................ 84
**Figura 4.13 Infinitud de los números primos** ...................................................................... 85
**Figura 4.14 Dos profesores intentaron dar la demostración del teorema**......................... 85
**Figura 4.15 Enunciar el Teorema Fundamental de la Aritmética** ..................................... 86
**Figura 4.16 Teorema Fundamental de la Aritmética** ........................................................ 86
**Figura 4.17 Uso del TFA**........................................................................................................ 88
**Figura 4.18 Reconoce la descomposición** ............................................................................ 89
**Figura 4.19 Primer caso: sobre usos de la descomposición**................................................ 89
**Figura 4.20 Segundo caso: sobre uso de la descomposición**.............................................. 90
**Figura 4.21 Divisores de 121** ................................................................................................ 90

# ÍNDICE DE TABLAS

**Tabla 1 Respuestas textuales a las preguntas de la categoría 1** ......................................... 65
**Tabla 2 Respuestas textuales a las preguntas de la categoría 3** ......................................... 74

# CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA


## RESUMEN

El énfasis que se hace en el Teorema Fundamental de la Aritmética en la educación básica no es muy amplio pese a la importancia y los conocimientos que puede movilizar su enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes, es por ello que el presente trabajo de grado se caracteriza por la identificación de las concepciones de los profesores de matemáticas sobre el Teorema Fundamental de la Aritmética, desde una perspectiva Histórico-Epistemológica, a partir de la cual se indaga sobre los obstáculos epistemológicos que se presentaron en la construcción del tema central. Se considera que es necesario analizar las concepciones de los profesores, debido a que éstas caracterizan no solo el conocimiento del profesor sino que también permean la forma en que se desarrollan los conocimientos en el aula de clase.



**Palabras claves:** concepciones, Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA), números primos, obstáculos epistemológicos, enseñanza.

# INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado trata acerca de las concepciones de los docentes de Educación Básica sobre el Teorema Fundamental de la Aritmética, desde una perspectiva Histórico-Epistemológica, el cual se desarrolla en cinco capítulos.

En el primer capítulo del documento se presenta la problemática de investigación, los objetivos generales y específicos, la justificación, el marco de referencia en donde se desarrolla el marco de antecedentes, curricular y teórico, y algunos aspectos generales del tema central.

En el segundo capítulo se desarrolla una historiografía del TFA; se realiza un recorrido desde Euclides hasta Gauss. El primero proporciona los elementos primigenios para su desarrollo y el último realiza la demostración completa del teorema.

En el tercer capítulo se exponen los obstáculos identificados en el desarrollo histórico del TFA, de acuerdo al marco teórico. Estos aspectos fueron tomados como referencia para la elaboración del cuestionario para los docentes.

El cuarto capítulo se centra en el seguimiento realizado a los docentes, se describe la población objeto de estudio, el instrumento que se utilizó para la recolección de la información, es decir, los aspectos que se tuvieron en cuenta para su desarrollo, para ello se muestran los objetivos y los criterios de cada pregunta para su posterior análisis. Finalmente se realiza el análisis tanto cualitativo como cuantitativo de las respuestas.

En el último capítulo se desarrollan las conclusiones de la investigación y el aporte al proceso de aprendizaje-enseñanza de los números primos.

# 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado se muestra de manera general los intereses de la problemática de investigación, la cual se inicia en el marco de la preparación del trabajo de grado de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de esta forma se describe el problema y los objetivos del trabajo de investigación.

## 1.1. Presentación del problema de investigación

En matemáticas, la teoría de números tiene como uno de sus objetivos estudiar las propiedades de las operaciones con números enteros. Entre estas propiedades, la divisibilidad tiene gran importancia, debido a que estudia las condiciones que han de cumplir los números para ser divisibles por otros; cuando se trata de la división exacta se clasifican en números primos y compuestos. Los números primos son aquellos números que tienen exactamente dos divisores distintos, mientras que los números compuestos tienen más de dos divisores. Estos dos tipos de números se relacionan en el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA), el cual afirma que: *todos los números compuestos se pueden descomponer en factores primos de manera única*.

Los números primos y el concepto de divisibilidad son abordados en los primeros años de escolaridad, de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2005), al terminar el grado tercero se espera que el estudiante haya desarrollado el siguiente estándar:

- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.

Al terminar séptimo grado, el estudiante conozca propiedades básicas de la teoría de números, según el estándar:

- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Según lo anterior, las relaciones de divisibilidad se abordan desde los primeros grados de escolaridad y es a partir de aquí que se introduce el concepto de número primo en la escuela, debido a que, este concepto está ligado al cálculo de los divisores y de los múltiplos; sin embargo, la enseñanza de los números primos es bastante limitada, ya que, solo se presenta la definición y se hace la distinción entre números primos y compuestos, sin profundizar en la forma de calcularlos, ni se hace énfasis en ellos cuando se enseña la descomposición de número en sus factores primos. Por ejemplo, la criba de Eratóstenes es una herramienta útil para encontrar los números primos menores a un número dado $n$, no obstante, se convierte en un proceso arduo para un $n$ grande. Este proceso se utiliza por lo general para $n = 100$.

Por otra parte en los primeros niveles escolares, tampoco se hace énfasis a las propiedades de los números primos o las muchas cuestiones que han surgido por su estudio. Según Burkhart (2009, pág. 157), “los números primos son a menudo descritos como los ‘bloques de construcción’ de los números naturales”, es decir, son los átomos de los números naturales, son las piezas básicas de su estructura, por ello, se debería dar un enfoque más amplio en las aulas de clase.

Aunque este tema es relevante en el aprendizaje de las matemáticas, como se mencionó anteriormente, no se hace un acercamiento adecuado en la escuela. Se plantea que esto puede ser producto de la poca reflexión que se hace sobre el trabajo con números primos y toda la historia que han tenido a lo largo del desarrollo de la matemática. Por ello, se propone que es necesario estudiar el desarrollo histórico de los números primos, cabe mencionar que (Barbin, 2000, citado por (Martínez & Chavarría, 2012, pág. 2)):

> Las dos razones que más comúnmente se ofrecen para la inclusión de la dimensión histórica en la enseñanza de la matemática son que la historia provee una oportunidad para desarrollar la visión de lo que es realmente la matemática y que nos permite tener una mejor comprensión de conceptos y teorías.

De modo que el uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas representa para el docente una manera de entender mejor los conceptos y desarrollarlos de formas diferentes con los estudiantes, así como reconocer las dificultades que podrían presentar los estudiantes en la comprensión del concepto, tener otra perspectiva de lo que es la matemática, que no es estática sino que ha evolucionado. Según Castro (2001), “para el profesor, la historia dentro de la enseñanza de las matemáticas le permite conectar un conjunto de medios que hacen más asequible al alumno el conocimiento matemático” es por ello que tanto los profesores en formación, como en ejercicio deben tener en cuenta el desarrollo histórico de un concepto matemático, debido a que esto les brinda explicaciones históricas y epistemológicas de la construcción del concepto.

De aquí, que la historia se pueda usar para describir y analizar las concepciones que tienen los profesores sobre el TFA, concepciones que probablemente están relacionadas con la evolución histórica del teorema, las cuales incluso podrían ser concepciones erróneas en las que también inciden los profesores.

En este sentido, de acuerdo a lo planteado anteriormente, se estableció el siguiente interrogante que sintetiza el problema propuesto: ¿*Cuáles son las concepciones y usos que los profesores de matemáticas de Educación Básica tienen acerca del Teorema Fundamental de la Aritmética*?

## 1.2. Justificación

La relevancia de este trabajo se puede observar desde tres perspectivas: la primera, el papel de la historia en la enseñanza; segundo el rol de los profesores en el proceso de enseñanza y tercero, la importancia del estudio de los números primos, todo ello ha llevado al desarrollo de esta investigación y a partir de ella se espera aportar a la visión de la Educación Matemática en Colombia.

La consolidación de las matemáticas como se presentan actualmente ha sido un largo camino de intentos, errores, dificultades, adelantos y retrocesos en los cuales el hombre tuvo un papel importante, como se menciona en diferentes ámbitos, las matemáticas son un constructo humano, por lo cual su edificación está ligada a las creencias y la cultura de cada época; conocer cómo se ha dado su desarrollo proporciona a los profesores una visión más amplia de entender las matemáticas, que le permite apropiarse de otras herramientas para el desarrollo de su labor docente, poder inferir en qué momentos o en qué temas los estudiantes van a encontrarse con mayores dificultades para comprender un concepto. El profesor va a poder planear estrategias y actividades para ayudar a los estudiantes a construir su conocimiento, de una forma eficaz y significativa, por ello la historia de las matemáticas se puede considerar como un instrumento importante en el ejercicio docente.

En este mismo sentido el profesor es un eje primordial en la enseñanza, antes solo se realizaban investigaciones en torno a los estudiantes y el aprendizaje, sin tener en cuenta el papel del profesor en este proceso, sin embargo, esto ha cambiado desde hace algún tiempo, ya que, se observó que éste también desempeña un rol importante en los procesos que se dan en el aula de clase, como lo plantea Brousseau (2007, pág. 52) “la acción de un profesor comprende un fuerte componente de regulación de los procesos de adquisición de un alumno”, el profesor se convierte de esta forma en el principal recurso humano que orienta y guía la manera en que los estudiantes comprenden y aprenden las matemáticas, pero, cada profesor posee o ha desarrollado durante su aprendizaje unas concepciones o creencias acerca de las matemáticas, que están implícitas en la forma en que enseña.

El estudio de concepciones ha tenido auge en los últimos tiempos, debido a que, estas caracterizan no solo el conocimiento del profesor sino que también permean la forma en que se desarrollan los conocimientos en el aula de clase; de acuerdo a la revisión bibliográfica realizada en la base de datos de la Universidad del Valle y la Red Bibliotecaria y Documental Matemática (DOCUMAT) los trabajos realizados en torno a las concepciones del TFA en profesores de matemáticas son escasos. En Colombia existen trabajos sobre las concepciones de los profesores en los que el objeto de estudio ha sido conceptos como números reales, resolución de problemas, las Tecnologías de la Información y la Comunicación, entre otros. Sobre el TFA o los números primos no se encontró ningún trabajo.

Indagar acerca de las concepciones de los profesores contribuye al análisis de cómo se lleva a cabo el aprendizaje, como lo expresa en Mora y Torres (2007, pág. 23) “las concepciones se constituyen en una herramienta para el análisis del saber y el diseño de situaciones didácticas que permiten analizar las actuaciones de los estudiantes en relación con un concepto matemático”, es decir, a partir de conocer las concepciones se puede mejorar las interacciones de los estudiantes con las nociones matemáticas, en este caso las concepciones de los profesores, para mejorar la enseñanza.

El profesor se encuentra en uno de los polos del sistema didáctico, los cuales son descritos por Chamorro (2003, pág. 72) como sigue:

> -*El alumno,* que debe aprender aquello que previamente ha sido establecido socialmente, según su edad, nivel y tipo de estudios, y que la institución toma como proyecto a desarrollar.
> -*El saber,* en este caso las matemáticas, que deben ser transmitidas como patrimonio a las nuevas generaciones, el objeto de estudio.
> -*El profesor,* encargado por la sociedad y la institución de llevar a cabo el proyecto de enseñanza, de hacer funcionar todo el sistema.

En los tres polos se dan diferentes interacciones que se pueden analizar en los subsistemas: profesor-alumno, alumno-saber y profesor-saber. Se observa que el profesor interactúa con el saber y con el estudiante, el profesor en este sentido debe poseer unas bases sólidas sobre los conocimientos matemáticos para así contribuir a la adquisición de éste por parte de los estudiantes; en este caso se prevé reflexionar sobre las interacciones que se presentan en el subsistema profesor-saber, las cuales condicionan la forma en que se desarrollan las clases.

En esta investigación el conocimiento matemático o saber a considerar es el relacionado con el Teorema Fundamental de la Aritmética, el cual moviliza un gran número de conceptos matemáticos, tales como el concepto de número primo, el concepto de divisibilidad, así como las operaciones de multiplicación y potenciación, la idea de factorización, entre otros; todos estos temas son elementales en la enseñanza de la matemática y requieren de una comprensión clara por parte de los estudiantes para ser utilizados en distintos contextos.

La idea central del TFA, es la descomposición en factores primos de manera única, la cual debe ser explorada de diferentes formas, debido a que este tema no solo está presente en la

Educación Básica, sino que también aparece en diversos temas de la matemática en la Educación Secundaria y universitaria, en las que es necesario utilizar la descomposición en factores primos para llegar a la solución de diversos problemas, por ejemplo que el estudiante identifique en qué casos es necesario hallar el máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (MCM) para dar solución a problemas.

Una característica importante que tienen los números primos es que (Zazkis & Liljedahl, 2004, pág. 165) "como bloques de construcción, los números primos son cruciales en la comprensión de los números y las relaciones multiplicativas entre los números. Además, la comprensión de los primos se basa principalmente en la representación de los números". De este modo para lograr que los estudiantes tengan una mayor compresión del concepto de número natural, se debe enfatizar en la idea de que cualquier número compuesto se puede representar como producto de números primos, y la relevancia de esto, es decir, no solo mostrar la factorización sino enfatizar en que no hay otra forma, la factorización es única.

De igual manera, los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (1998, pág. 27) afirman que "el conocimiento de que los números se pueden representar de diferentes maneras, junto con el reconocimiento de que algunas representaciones son más útiles que otras en ciertas situaciones de resolución de problemas, es valioso y esencial para desarrollar pensamiento numérico" por lo tanto, el TFA contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, aunque cuando los estudiantes aprenden a obtener el MCM y MCD, prefieren encontrarlo a través de métodos alternos como la intercesión de los múltiplos, utilizando conjuntos o diagramas, lo mismo para el caso de resolver operaciones como la suma y resta de fracciones heterogéneas, no utilizan la descomposición factorial.

El trabajo con los números primos presenta una oportunidad para mostrar a los estudiantes diversos resultados que se han conocido sobre números primos, por ejemplo la infinitud de los números primos, los tipos de números primos: los de Mersenne, los de Fermat, primos reversibles o primo-omirp que son aquellos que se forman invirtiendo las cifras del otro y que ambos son primos, como el número $991 - 199$; los primos gemelos: si dados dos números uno es igual al otro más dos unidades, entre los primos gemelos se encuentran $3$ y $5$, $11$ y $13$, además de la conjetura de los primos gemelos, la conjetura de Goldbach; esto permite despertar el interés de los estudiantes por conocer nuevos temas sobre la matemática. Además en el desarrollo de las matemáticas los números primos han sido un punto clave; modernamente, con los avances en la informática los números primos se han convertido en la base de las claves y los sistemas de seguridad que están inmersos en el diario vivir.

Se va a mirar el TFA que es básico para la comprensión del edificio matemático y es un soporte fundamental, porque cuando se construyen los números naturales ya sea axiomática, conjuntivista o intuitivamente como Euclides, se necesita conocer las propiedades de los números y dado que los números primos son un subconjunto de los números naturales, que además son los elementos básicos generadores de todos los demás números compuestos, surge la idea elemental que para poder entender los números naturales se deben conocer los números primos.

Se espera que un profesor de Educación Básica tenga un conocimiento amplio de las matemáticas escolares, en este caso particular de los números primos, para cuando enseñe este tema, si no va a presentar el TFA explícitamente, por lo menos pueda guiar su conceptualización adecuadamente. Para ello los profesores deben reconocer y vincular todo lo que está inmerso en el TFA como la factorización única, debido a que esto le permite hacer una reflexión profunda y realizar una organización, de modo tal, que pueda relacionar los conceptos matemáticos del TFA con otros temas para así lograr una comprensión amplia por parte de los estudiantes e identifiquen como utilizarlos en diferentes contextos.

De acuerdo a lo anterior, se hace necesario analizar las concepciones de los profesores debido al papel que desempeñan en los procesos de enseñanza y aprendizaje, de un tema fundamental como lo es el TFA. Además, si se tiene en cuenta que la responsabilidad de los resultados de las pruebas nacionales como internacionales recae sobre los profesores, aunque éste no es el único implicado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es importante observar el uso y la forma en que se apropian del conocimiento matemático, ya que esto influye directamente en su forma de enseñar. En esta dirección, el presente trabajo estuvo direccionado por los siguientes objetivos:

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo General

Determinar las concepciones que tienen los profesores de matemáticas de Educación Básica acerca del Teorema Fundamental de la Aritmética, su importancia y su enseñanza, teniendo como directriz una perspectiva Histórico-Epistemológica.

### 1.3.2. Objetivos específicos

1. Realizar una historiografía del desarrollo Histórico-Epistemológico del Teorema Fundamental de la Aritmética.
2. Identificar algunos obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico de los números primos.
3. Caracterizar las concepciones de los profesores respecto al Teorema Fundamental de la Aritmética.

## 1.4 Marco teórico y de antecedentes

### 1.4.1 Marco de antecedentes

La teoría de números es una de las ramas de las matemáticas que ha sido estudiada por muchos matemáticos a lo largo de la historia, con un fuerte enfoque en los números primos, que han sido los que propician el interés de muchos, dado que son un enigma para todo aquel que se fija en sus particularidades, como es el caso de su distribución en el conjunto de los números naturales además que diversos teoremas y conjeturas se basan en los números primos. Actualmente se sigue la búsqueda por encontrar un orden en estos números, es decir, saber cada cuánto se va a encontrar el siguiente número primo, dado que no es predecible la sucesión; por otro lado se ha empezado a realizar trabajos didácticos e históricos en torno a este tema. En este apartado se describen algunos trabajos relacionados con los números primos y su enseñanza en el aula de clase.

Un documento de Cairns (2005) sobre los números primos sustenta la importancia de éstos en las matemáticas modernas y que a pesar de su importancia, los números primos están en gran parte ausentes de los programas escolares, en su enseñanza que se hace típicamente en el grado 7. Plantea que, hay una gran cantidad de literatura sobre los números primos y la teoría de números, en general, que se centra en el nivel universitario introductorio y otros de las ediciones de Dover, sin embargo muy pocos de ellos son adecuados para su uso en las escuelas secundarias.

Cairns en este trabajo se cuestiona acerca del por qué no existe material sobre los números primos que pueda ser utilizado en los planes de estudio del nivel de secundaria. El argumento para esta cuestión, es que el problema clave con el material disponible en la teoría de números utiliza la aritmética modular, a menudo llamada aritmética del reloj. Esta 'aritmética modular' es un punto de partida común para muchos libros de introducción a la teoría de números, y si bien no está fuera del alcance de muchos estudiantes de secundaria, requiere madurez matemática; si se utiliza en las escuelas secundarias para probar hechos sobre los números, presentaría sin duda todo un reto.

El objetivo del autor es presentar algunas de las cuestiones claves y las ideas elementales relativas a la teoría de los números primos que se pueden explorar sin aritmética modular. En particular tiene como objetivo proporcionar una selección de ideas, algunas antiguas y otras modernas. Estos temas según Cairns podrían, proveer un posible material para la introducción de la teoría de números en la escuela, así como una mayor participación de los números primos en las matemáticas escolares. Este documento aporta a la investigación en cuanto a la importancia de los números primos en la escuela.

Granados (2011), presenta una propuesta para la enseñanza de los números primos. Se encauza en el trabajo de los números primos, debido a la importancia que han tenido a lo largo de la historia y que se mantiene en la actualidad; describe el recorrido histórico que han tenido los números primos, con los relatos que los historiadores han logrado hacer sobre lo ocurrido desde el siglo V antes de nuestra era y termina en los avances de la tecnología y técnicas para hallar números primos hasta con 13 millones de cifras. En esta tesis se exponen algunos conceptos y definiciones necesarias para el trabajo que va a realizar más adelante, con estas definiciones pasa a presentar los teoremas que según el autor son necesarios para tener un entendimiento y dominio de los números primos en un nivel básico, contextualiza al lector sobre lo que son los números primos y lo que se necesita para entender y demostrar los teoremas relacionados con los números primos. El autor dedica un capítulo a los algoritmos de obtener primos, detallando el procedimiento de algunos de ellos.

En este trabajo, se hace referencia a la enseñanza de los primos en relación con el currículo. En este sentido se realiza una descripción de la política escolar actual en lo que tiene que ver con lineamientos curriculares y estándares de competencias básicos, continúa con una descripción del contexto escolar, en la cual se muestra un análisis de textos escolares que evidencia los cambios substanciales o transformaciones en la enseñanza de números primos desde los inicios de la década de los años noventa, pasando por los primeros años del nuevo milenio y los años próximos al presente 2011. A partir del contexto escolar actual y su desarrollo durante las últimas décadas, se inicia la construcción de una propuesta que justifique el nivel de importancia que debería darse al estudio de los números primos y de qué manera se podría abordar para que no solamente se obtengan los niveles deseados de aprendizaje sobre el tema en consideración, sino que además se logre una iniciativa en los estudiantes que les permita valorar el contexto científico y cultural del estudio de la primalidad y la descomposición factorial, basándose en las aplicaciones actuales en seguridad informática. Este trabajo aporta a la investigación la parte del currículo de los números primos.

Los trabajos mencionados anteriormente se han enfocado en los estudiantes, a continuación se muestran dos trabajos que hacen énfasis en profesores en formación; el primero de Zazkis y Cammpbell (1996), en el cual investigan los aspectos procedimentales y conceptuales en la comprensión del TFA de futuros profesores de educación primaria. Este teorema es parte del currículo de matemática básica para futuros profesores de primaria en muchas instituciones, de ahí que muchos maestros de escuelas primarias están familiarizados con el teorema, por lo tanto pueden articular y explicar su significado, sin embargo, no saben aplicarlo en varias situaciones de resolución de problemas. El objetivo del estudio fue investigar este fenómeno específico con el fin de contribuir a la comprensión pedagógica mejorada de la construcción de conocimiento de los números naturales y su estructura multiplicativa.

Zazkis y Cammpbell para investigar la comprensión de los docentes en conceptos asociados a la divisibilidad, recolectaron datos por medio de un cuestionario escrito y entrevistas individuales. En las preguntas que diseñaron tuvieron en cuenta que los estudiantes dominaban temas elementales de la teoría de números como números primos y compuestos, los árboles de los factores, descomposición en primos, TFA, divisibilidad y reglas de la divisibilidad, el máximo común divisor, y el mínimo común múltiplo, entre otros.

Ellos desarrollaron la actividad en tres ocasiones diferentes dentro de un período de 2 semanas de tiempo y los participantes no estaban limitados temporalmente para dar respuesta. En estas preguntas, los estudiantes fueron invitados a:

- Considerar el número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ y decidir si es divisible por cada uno de los números 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9, y 63.
- Considere el número $K = 16.199 = 97 \times 67$ (donde $97$ y $167$ son números primos), decidir si $K$ puede ser divisible por $3, 5, 11, 13,$ y $17$.
- Mira la lista de 15 números, tales como $8^2, 17^2, 17^3, 243^3, 234^3, 234^6, 5^2 \times 17^2, 5^3 \times 7^2, 5^6 \times 17^2, p^3$ donde p es primo, $C^3$, donde $C$ es compuesto, y decidir qué números de la lista son, o podrían ser, cuadrados perfectos.

Luego de la recolección y la interpretación de los resultados, los investigadores Zazkis y Cammpbell consideran que una adecuada comprensión del concepto de descomposición es central para el conocimiento de la estructura de números enteros. Sin embargo, los datos demuestran que el TFA no ha sido entendido de forma adecuada por un gran número de maestros de escuelas de primaria, los resultados sugieren que las técnicas específicas de enseñanza basadas en los tipos de preguntas de evaluación exploradas en esta investigación ofrecen un medio para futuros profesores para comprender las dimensiones conceptuales y procedimentales de descomposición y el TFA. El trabajo descrito anteriormente da pautas para reflexionar acerca de la comprensión de los futuros maestros y los posibles resultados que se podrán obtener en un futuro con este trabajo.

El segundo trabajo, tomado como referencia, fue el de López y Cañadas (2013), en el cual exponen que una de las razones por las que realizaron esta investigación es que el TFA es útil para la realización de algunas tareas de divisibilidad que se plantean en Educación Primaria. Por lo tanto, es posible que los futuros maestros tengan que enseñarlo en sus aulas. Además, se considera que no es suficiente que dicha enseñanza se limite al enunciado del teorema, y que su uso no debería restringirse a la descomposición de un número en factores primos.

Para llevar a cabo la investigación López y Cañadas realizaron $3$ sesiones de trabajo sobre divisibilidad con $37$ maestros en formación que cursaban la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada en $2012$. En estas secciones debían resolver problemas sobre divisibilidad; algunos de estos relacionados con el TFA, como las cuestiones $4$ y $5$:

4. Escribe todos los factores del número $459$ distintos de $3$ y $17$. Explica tu respuesta.
5. Escribe un número, diferente de $45$, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

Las respuestas dadas por los $37$ futuros maestros a estas dos cuestiones sobre divisibilidad y el TFA, le revelaron a López y Cañadas que estos futuros maestros utilizan de manera limitada el teorema y manifiestan dificultades para determinar todos los factores-divisores de un número a partir de su descomposición canónica. Por lo cual se propone que para mejora de la docencia de los futuros maestros es necesario profundizar sobre la unicidad del teorema, debido a que allí está la implicación que todos los factores-divisores de un número $n$ se generan a partir de esa descomposición en primos necesariamente.

Este trabajo sirve como una guía para plantear las preguntas y los ejercicios que se van a realizar. Los trabajos anteriores, aunque no explícitamente, dejan abierta la pregunta si ¿esos resultados podrán ser los mismos con profesores en ejercicio o estos problemas se solucionan cuando se está en la práctica?, ya que se observó que se han realizado varios estudios sobre las concepciones en diferentes temas como geometría, resolución de problemas, entre otros, dirigidos hacia los profesores en formación.

### 1.4.2 Marco curricular

Con la promulgación de la Constitución Política de Colombia de 1991, se desprende la ley General de Educación 115 de 1994, y de acuerdo a lo estipulado en ella, se elaboran los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional, desde 1998 para las diferentes áreas del conocimiento, incluyendo matemáticas.

Los lineamientos son una orientación para los docentes, en ningún caso reemplazan al profesor en las decisiones que les corresponden tomar en asuntos como contenidos, metodologías y estrategias parar la participación, (Ministerio de Educación Nacional, 1998) con ello se da una autonomía escolar. En la estructura curricular que proponen los lineamientos están los conocimientos básicos dentro de los cuales se encuentran:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos
- Pensamiento métrico y sistemas de medidas
- El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Y los procesos generales que están presentes en toda la actividad matemática que tienen que ver con:

- El planteamiento y la resolución de problemas
- El razonamiento
- La comunicación
- La modelación
- La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Se da una explicación de cada uno de los conocimientos básicos y de los procesos generales, se presentan situaciones en las cuales el profesor puede trabajar los conceptos relacionados en cada ítem.

Como consecuencia de los lineamientos se desarrolla la serie de *Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas*, los cuales son un apoyo para la estructuración de las clases, debido a que presenta de manera específica los temas o competencias, habilidades que, al aprobar un grado determinado, se espera los estudiantes hayan adquirido, de este modo aparecen cinco columnas que corresponden a los cinco tipos de pensamiento y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él, en forma semejante, cada estándar de cada columna pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos, además están distribuidos en cinco conjunto de grados. Con relación a la teoría de números, la columna a tener en cuenta es la de Pensamiento numérico y sistemas numéricos, en el cual se encontraron los siguientes estándares:

- De primero a tercero:
  - Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
  - Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.)
- Cuarto a quinto:
  - Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
  - Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.
  - Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.
- Sexto a séptimo
  - Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de igualdad, las de las distintas formas de desigualdad y las de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.

- Décimo a undécimo:
    - Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales

En la revisión de los estándares se observa que ninguno de ellos menciona explícitamente los números primos o el TFA, sin embargo, al mencionar la teoría de números, relaciones entre los números naturales, se reconoce que allí se encuentran los números primos, y a partir de ello es fundamental el trabajo que el profesor realiza y los conocimientos que posee de las matemáticas para que relacione los conceptos y nociones de esta ciencia, es decir, para que realice una planeación adecuada para desarrollar el tema.

De esta forma, el tema de investigación está enmarcado dentro de la política pública del currículo del país, así que es un tema pertinente de investigación.

### 1.4.3 El análisis de concepciones

Como ya se ha mencionado este trabajo se centró en las concepciones del profesor de matemáticas de Educación Básica, desde una directriz Histórico-Epistemológica, a través de los obstáculos epistemológicos del TFA. Por ello se estudió la noción de concepción y de obstáculo epistemológico que han desarrollado los investigadores, para delimitar las que estuvieran más acordes para el análisis del trabajo y a los objetivos.

El estudio de concepciones ha tenido auge en los últimos tiempos y en la literatura existen diversas acepciones sobre lo que es una concepción, especialmente a partir de las propuestas novedosas de algunos teóricos de la educación matemática, como Guy Brousseau, investigador francés, especialista en Didáctica de la Matemática, que desarrolló la Teoría de Situaciones Didácticas. En esta teoría se llama *concepción* (Brousseau, 2007, pág. 43) a “cada manera organizada pero particular de tratar una noción matemática”, es decir, en matemáticas se pueden tener diferentes formas de definir una noción, sí estas forma de definirla son bien organizadas pero particulares, se consideran concepciones de esa noción.

Dentro de esta teoría (Brousseau, 2007, pág. 44) “las concepciones pueden determinarse teóricamente como conjuntos de conocimientos y de saberes, frecuentemente requeridos en simultáneo para resolver situaciones, y pueden determinarse empíricamente como patrones de respuestas coherentes dadas por gran parte de los sujetos a un tipo de situación”. De aquí que para determinar las concepciones de los docentes sobre el TFA, se deban plantear situaciones en las cuales, los docentes requieran usar el teorema, de tal forma que las respuestas proporcionadas reflejen su apreciación acerca de ésta noción matemática.

Por otro lado, Brousseau (2007, pág. 44) considera que el término *concepción* se relaciona con la idea de obstáculo, debido a que algunas de las concepciones que el sujeto ha interiorizado permanecen y no permiten la adquisición de una mejor concepción, lo que produce errores en el aprendizaje, los cuales se convierten en obstáculos. De este modo, se tiene la posibilidad de que entre las concepciones de los docentes sobre el TFA, existan algunas que se constituyan en obstáculos, en este caso es importante que sean determinadas.

Azcárate y Moreno (2003, pág. 267) plantean la noción de concepción como una síntesis de lo estipulado por Ponte (1994), Thompson (1992) y Llinares (1991):

> Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menor en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos.

Las concepciones juegan así un papel importante en el modo en que se da respuesta a las tareas o problemas, en este caso matemáticos, son éstas las que definen el cómo y por qué se argumenta de cierta forma en particular ante una situación.

De la misma forma la acepción de Gil y Rico (2003, pág. 28), también toma en cuenta los aportes de Ponte (1994b) y Thompson (1992):

> *Concepciones*: los marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma en que afrontamos las tareas (Ponte, 1994b). Tanto las

> concepciones como las creencias tienen un componente cognitivo, la distinción entre ambas reside en que las primeras son mantenidas con plena convicción, son consensuadas y tienen procedimientos para valorar su validez, y las segundas, no (Thompson, 1992).

Las dos acepciones anteriores son similares, ya que tienen los mismos referentes, sin embargo, en la de Gil y Rico, se menciona que las concepciones condicionan la forma en que se afrontan las tareas, que es básicamente lo que se analizará en este trabajo. Para tal efecto, es necesario seleccionar preguntas que permitan evidenciar la forma en que son abordados los conceptos matemáticos relacionados con el TFA, en la resolución de un problema así como el concepto en sí mismo.

Por otra parte, Azcárate, García y Moreno (2006, pág. 88) señalan algunas características de las *concepciones del profesor de matemáticas*, a partir de la definición de concepción como "la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes". Resaltan que las concepciones forman parte del conocimiento del profesor, son producto del entendimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento. Desde esta perspectiva las concepciones son esenciales en la enseñanza, debido a que, los conocimientos del profesor de matemáticas están basados en sus concepciones y estas determinan la forma en la que enseña a sus estudiantes.

En el trabajo de Mora y Torres (2007, pág. 48) se puede encontrar un amplio panorama sobre las concepciones, dentro del cual es importante resaltar:

> […] una tipología de las concepciones diferenciando las cognitivas (individuales o subjetivas) de las epistemológicas (también conocidas como colectivas). Las cognitivas tienen que ver con el conocimiento interno del sujeto; […], las epistemológicas o colectivas se relacionan con el tipo de conocimiento de una "comunidad", que existen en determinado período histórico, o en los textos, programas, currículos escolares para algún nivel. Estas concepciones se refieren a problemas dentro de la propia disciplina, relacionados con otras disciplinas y a la manera en que se accede al saber.

Las concepciones pueden ser analizadas según la tipología mencionada anteriormente, para esta investigación se van a utilizar tanto las concepciones subjetivas, como las concepciones epistemológicas, ya que se analizarán las concepciones de los profesores de forma individual, pero teniendo en cuenta las concepciones que se han dado a través de la historia del TFA, a partir de la identificación de obstáculos epistemológicos. Según Flores (1998, pág. 30), “las concepciones epistemológicas se sostienen por la comunidad matemática a lo largo de la historia, y se refieren a los problemas que se plantea la propia comunidad dentro del ámbito de la disciplina”, es decir, que persisten a través del tiempo y siempre aparecen al tratar cierta noción.

Por otra parte el término de obstáculo epistemológico fue introducido por Bachelard en su libro *La Formación del Espíritu Científico*, en el cual afirmó que este tipo de obstáculo no se presentaba en matemáticas. En 1976, Brousseau retoma esta noción a partir del estudio de situaciones didácticas, debido a que encontró que en matemáticas sí se presentan este tipo de obstáculos, definiéndolos de la siguiente forma (Brousseau, 2007, pág. 45):

> -un obstáculo es un “conocimiento” en el sentido de “manera regular de tratar un conjunto de situaciones”.
> -este conocimiento da resultados correctos o ventajosos apreciables en determinado ámbito, pero se revela falso o completamente inadaptado en un ámbito nuevo o más amplio.
> -el conocimiento nuevo, verdadero o válido sobre un ámbito más amplio no se establece “a partir” del conocimiento anterior sino contra él: utiliza otros puntos de vista, otros métodos, etc. Entre ellos no existen relaciones “lógicas” evidentes que permitirían desacreditar fácilmente el error antiguo a través del conocimiento nuevo. Por el contrario, compiten en el antiguo ámbito.
> -estos conocimientos no son construcciones personales variables. Son respuestas “universales” en ámbitos precisos. Aparecen entonces casi necesariamente en la génesis de un saber, ya sea una génesis histórica o didáctica.

Un obstáculo es así un conocimiento ya establecido en un dominio particular de las matemáticas, pero, que al pasar a otro dominio ya no es válido y necesita ser modificado dentro del nuevo dominio, es de esta forma como los obstáculos se dan naturalmente en el proceso de aprendizaje, es decir, que surgen porque ya se ha visto de manera similar y se considera que aplicarlo de la misma forma va a ser correcto. Estos obstáculos frenan el aprendizaje debido a que se han establecido en los conocimientos previos. Los obstáculos no son conocimientos falsos o erróneos, son conocimientos válidos pero, que en el nuevo dominio no tienen la misma aceptación.

Los obstáculos de origen propiamente epistemológico son aquellos a los cuales no puede, ni debe escapar, por el hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Se pueden encontrar en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deba reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido vencidos. De aquí, que la determinación de obstáculos epistemológicos sea trascendental en la enseñanza de las matemáticas, ya que, si un obstáculo persiste en la enseñanza por parte de los docentes, se continua presentando en los estudiantes, por ellos es necesario que los docentes tengan conocimiento de la presencia de un obstáculo epistemológico, y traten de indagar su aparición en la historia de las matemáticas, reconociendo en qué momento la comunidad matemática ha tenido conocimiento de él y de cómo superarlo.

El concepto de obstáculo epistemológico, presenta una particularidad, y es que se encuentra paralelo al término concepción (Cid, 2000, pág. 3):

> En la teoría de situaciones la noción de obstáculo epistemológico queda englobada en una categoría más amplia, la de obstáculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. Además, la definición de obstáculo epistemológico conlleva, implícitamente, el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber trasmitido.

De lo anterior se desprende, la noción de

> ‘concepción histórica’ para referirse a la concepción que determinado matemático de otra época ha podido tener de una cierta noción matemática, siempre que esa concepción sea relevante, es decir, que represente la forma de pensar de una parte significativa de la comunidad de matemáticos de su tiempo.

Para determinar este tipo de obstáculos se consultan las obras escritas por los matemáticos, para indagar a través del tiempo que conocimientos limitaron la evolución de las matemáticas siempre que esos conocimientos hayan sido adaptados por la mayoría de los matemáticos en esa época. Según lo anterior, tener en cuenta la aparición de concepciones históricas en el TFA y los números primos, permitirá determinar cuáles de estas se constituyen en obstáculos epistemológicos, indicando cuales de estas concepciones históricas reinciden en la forma de pensar de los profesores.

## 1.5 Teorema Fundamental de la Aritmética

La teoría de números que estudia las propiedades de los números enteros, era en la antigüedad una rama de las matemáticas considerada solo desde la parte teórica, debido a que, no tenía una utilidad práctica. Su estudio tenía el interés por encontrar relaciones entre los números y caracterizarlos, sin embargo, el avance en las tecnologías, ha cambiado esta perspectiva, en particular los números primos actualmente juegan un papel importante en la seguridad informática. Este apartado tratara sobre el rol que desempeñan los números primos en las matemáticas y en la práctica.

En matemáticas, la descomposición de un número como producto de factores primos es uno de los puntos clave en la divisibilidad, su importancia es tal que este proceso se conoce como: Teorema Fundamental de la Aritmética, el cual afirma que todo número compuesto se puede representar de manera única como el producto de factores primos. Como ya se ha mencionado la base del TFA son los números primos. Un número entero cualquiera es primo, si y sólo, tiene exactamente cuatro divisores distintos: el mismo, el uno y los opuestos aditivos de estos dos números.

Siguiendo la definición anterior el número 1 no es primo, otra definición que deja este número por fuera es la siguiente: un número es primo si no es divisible por ningún otro número primo que sea menor a él en caso de haberlos, de acuerdo a lo anterior si 1 es primo, sería el único número primo, además, este número divide a cualquier otro de manera que no existirían mas números primos a parte de $1$, en particular el hecho de que 1 no sea primo es una convención de la comunidad matemática.

Por el TFA, $15 = 3 \times 5$ pero si 1 fuera primo $15 = 3 \times 5 \times 1$ o $15 = 3 \times 5 \times 1 \times 1$, dadas las anteriores factorizaciones que el 1 sea parte de ellas no aporta ninguna información acerca de la constitución de $15$, además invalidaría la unicidad del TFA. Esta representación de cualquier número, en la enseñanza se convierte en un pilar valioso, debido a que, moviliza un gran número de conocimientos entre ellos la multiplicación que implica la idea de múltiplo, divisor, potenciación, otra forma de representar los números, por ejemplo si se toma el número $32$ éste puede ser visto como $32 = 4 \times 8$ que es igual a $32 = 2^5$ o $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, que corresponde a su descomposición en factores primos.

Los números primos son considerados los bloques de construcción de los números naturales, debido a que, a partir de ellos se puede expresar cualquier número y esta forma es única, no importa el orden de los factores, siempre van a ser los mismos. Los 25 primeros números primos son: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$. Un número $n$ que no es 1 ni es primo se conoce como un número compuesto, se puede representar como el producto de dos números $a$ $y$ $b$, con $1 < a, b < n$ así $n = ab$.

La proposición del TFA como lo menciona Davenport (2008, p. 9) debe dar la posibilidad de que se cumpla para cualquier número natural y no solo para los compuestos, para ello establece las siguientes condiciones:

> 1. Si un número es primo, se hace el convenio que ha de ser considerado como un "producto" de números primos donde el "producto" tiene solo un factor a saber, el número mismo.
> 2. Considerar el 1 como producto "vacío" de números primos, por lo que la convención es que el valor de un producto vacío es el 1.

De forma que la proposición general se puede establecer de la siguiente forma: *cualquier número natural se puede representar como producto de números primos en una única forma, salvo el orden de los factores.*

**Demostración**:

***Existencia***: todo entero positivo mayor que 1 es producto de factores primos.

Por inducción la hipótesis es cierta para el caso de $n = 2$. Dado $n$, se supone que el teorema es cierto para los números menores que $n$. Ahora si $n$ el enunciado se cumple trivialmente. En caso contrario, $n$ es compuesto: $n = ab$, tal que $1 < a, b < n$.

Ahora sí $a, b$ son números primos se cumple el enunciado. En otro caso, se tiene que:

1. $n = ab$, con $a$ primo y $1 < b < n$. Ahora por el principio de buen orden se puede suponer que $b$ es el menor. Entonces $b$ tiene que ser primo de lo contrario éste tendría un divisor positivo mayor que 1 y menor que $b$ y que también divide a $n$, contradiciendo la minimalidad de $b$. Se puede escribir que $b = p_1 b_1$ y $n = a p_1 b_1$ con $1 < b_1 < b < n$, si $b_1$ es primo, se ha terminado, de lo contrario se continúa con el proceso o se obtiene una sucesión descendiente $n > b > b_1 > \cdots > 1$, que no puede

continuar indefinidamente. Entonces después de un número finito de pasos se tiene que $n = ab_1 b_2 \cdots b_r$.

2. Si $a$ como $b$ son compuestos se pueden escribir como producto de primos: $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ y $b = q_1 q_2 \cdots q_s$, así que $n = ab = p_1 p_2 \cdots p_r \cdot q_1 q_2 \cdots q_s$ por lo que se puede expresar a $n$ como producto de números primos.

Por el principio de inducción se puede concluir que el teorema es verdadero para todo entero positivo mayor que 1.

***Unicidad:*** ya se ha demostrado que $n$ se puede factorizar como producto de primos, para dmostrar la unicidad es necesario primero demostrar el siguiente teorema (1): si $p$ es un número primo y $p \mid ab$ entonces $p \mid a$ o $p \mid b$:

Prueba: si $p \nmid a$ entonces $(p, a) = 1$, entonces existen $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $pu + av = 1$; multiplicando por $b$ a ambos lados de la igualdad y aplicando la ley conmutativa se obtiene $pbu + abv = b$. Como, por hipótesis $p \mid ab$, entonces $p \mid b$.

En general, este teorema establece que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números naturales, tales que $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, entonces existe $i = 1, 2, \ldots, n$, tal que $p \mid a_i$.

Para demostrar la unicidad del TFA se supone que $n$ tiene dos factorizaciones:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s \quad r \leq s,$$

con los $p_i$, $q_i$ primos. Como $p_1 \mid q_1 \cdots q_s$, por el anterior teorema, $p_1$ divide a algún $q_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Se reordenan los primos $q_1 q_2 \cdots q_s$ $p_1 = q_1$, de tal forma que $p_1 = q_1$. Dividiendo $p_1 = q_1$se obtiene que:

$$p_2 p_3 \cdots p_r = q_2 q_3 \cdots q_s \quad r \leq s$$

Se repite el argumento $r$ veces. Si $r < s$, entonces $q_{r+1} \cdots q_s = 1$, lo cual no es posible. Por lo tanto $r = s$.

La descomposición sirve para facilitar los cálculos, como es el caso del MCM y el MCD, el primero para problemas que están relacionados con encontrar la mínima longitud, medida o para las operaciones con fracciones, cuando el denominador es diferente y son más de dos términos para operar y el segundo para hallar la máxima cantidad o medida de dos o más números.

En cuanto a las aplicaciones que los números primos tienen en la vida practica esta la criptografía. Criptografía es una palabra del español que se deduce del griego Krypto: oculto, unido con graphos: escribir. Es decir escritura oculta. La criptografía estudia los métodos para cifrar mensajes secretos de manera que únicamente puedan ser descifrados por el receptor; si no conocen la clave nadie más que los pueda interceptar, podrá descifrar el mensaje.

La clave de uno de los modelos de criptografía (Criptosistema RSA) se basa en la descomposición de un número entero grande, que por lo general tiene varias centenas de cifras. Lo esencial de las técnicas usadas para las claves secretas, se basa en el pequeño teorema de Fermat para generar grandes números primos o para comprobar la primalidad de un número. Para tener una clave propia se toman dos números primos muy grandes, con cerca de 100 dígitos cada uno, se multiplican para encontrar un número más grande, producto de los dos primos. Para cifrar el mensaje solo haría falta conocer el número grande no primo, que es el que se publica; para descifrarlo haría falta conocer los dos números primos originarios, que son los que se reservan para la clave privada. Lo que cuenta es que aunque todo el mundo pueda conocer el número grande no primo, la dificultad de obtener los números primos es inmensa.

Por ejemplo 13987 puede hacerse público como la parte de la clave, solo que en este caso un computador personal encontraría su factorización en un par de segundos o menos: $13987 = 197 \times 71$. Al tener números de más de 100 cifras, computadores con programas potentes tardan varios años en hacer los cálculos necesarios para la factorización.

En 1977 (Granados, 2011, pág. 64) “Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman (RSA), un equipo de matemáticos y científicos informáticos del Massachusetts Institute of Technology, se dieron cuenta que los números primos eran la base ideal para un proceso de cifraje fácil y descifraje difícil” este procedimiento de cifrado es conocido hoy como sistema criptográfico RSA.

El RSA es (Granados, 2011, pág. 64) “computacionalmente seguro, debido a que realizar la exponenciación modular es fácil, respecto al procedimiento inverso de extracción de raíces módulo $n$, ya que no es factible sin que se conozca la factorización de $n$”.

En el Criptosistema RSA se expresan las operaciones de cifrado y descifrado respectivamente como se muestra a continuación:

$$C = M^e \ (mod\ n)$$

$$D = C^d \ (mod\ n)$$

En las expresiones anteriores se tiene que:

1. $n$ es el número compuesto que se obtiene por el producto de los dos primos grandes.
2. $C$ es el mensaje cifrado.
3. $M$ es el mensaje sin cifrar.
4. $e$ es la clave pública.
5. $d$ es la clave privada.
6. $D$ es el resultado del desciframiento del mensaje.

De manera general para el uso del sistema RSA, cualquier persona que desee recibir mensajes secretos da a conocer $n$ y $e$ para que sus corresponsales cifren el mensaje con la primera ecuación; así, recibe $C$ y lo transforma o descifra con conocimiento de su clave privada $d$, haciendo uso de la segunda ecuación.

Como ya se menciono es fácil multiplicar dos números primos, pero difícil descomponer el resultado de estos dos números, si no se conocen de antemano, y más si son números grandes, es por ello que los números primos ocupan un lugar privilegiado en la seguridad informática.

En cuanto al papel de los números primos en la enseñanza estos se utilizan en diversos temas, en primer lugar, el concepto de número primo va ligado al cálculo de los divisores de un número dado, en segundo lugar son la base de la descomposición de un número en sus factores primos.

Para saber si un número es primo o no se ponen en juego los conceptos básicos de múltiplo y divisor, por lo que surgen diferentes formas para saber si un número es primo o no lo es; uno de los procesos que se utilizan en la escuela para ello es la Criba de Eratóstenes, que es un método eficiente para un $n$ pequeño, dado que, para uno grande el proceso se vuelve más complejo. Otro método es el de la raíz, que no es utilizado con frecuencia. El método consiste en dividir $n$ en los factores entre 2 y $\sqrt{n}$; si $\sqrt{n}$ no es un número entero se redondea hasta el numero entero más cercano, dado que todo número compuesto es dividido por algún número primo es suficiente con mirar si es divisible por algún numero primo menor que $\sqrt{n}$. Por ejemplo el número $147$ ¿es primo? Para ello miramos cual es su raíz cuadrada $\sqrt{147} = 12.12$ por lo que se divide $147$ entre los números primos hasta $12$, los cuales son $2, 3, 5, 7$ y $11$. Ahora:

$147: 2 \; = 73.5$ no es divisible por $2$

$147: 3 \; = 49$ es divisible por $3$

$147$ no es un número primo

Actualmente existen programas para saber si un número es primo o no como Prime95, primeCalculator, Prime Number Finder, entre otros.

## 1.6 Metodología

La historia de las matemáticas se puede mirar desde varias perspectivas, buscar en las fuentes primarias solamente o a partir de las fuentes secundarias se realizan análisis acerca de lo acontecido sobre el tema de interés, en este caso se optó por realizar una historiografía, debido a que no se trabajó sobre fuentes primarias sino sobre lo que han trabajado otros investigadores, en otras palabras se utilizó la historia, no se hizo historia, se recopiló el desarrollo conceptual del TFA en la historia.

Como el trabajo de grado está centrado en el Teorema Fundamental de la Aritmética, el cual se basa en los números primos, la historia del TFA va ligada a la de número primo. Se realizó una historiografía de este concepto, a partir del libro *la historia de las matemáticas* (1987) se rastrearon los principales matemáticos que se interesaron en los números primos y realizaron aportes a la teoría de números. Posteriormente se buscaron fuentes primarias como los *Elementos* (Euclides), *Disquisitiones arithmeticae* (1801), la traducción al inglés de *Elements of Algebra* (Euler, 1828) fuentes secundarias como *A Historical Survey of the Fundamental Theorem of Arithmetic* (2001), entre otros, la finalidad de la historiografía es dar cuenta de cómo se desarrolló este concepto e identificar algunos obstáculos epistemológicos, que se dieron durante el desarrollo mismo.

Los estudios históricos permiten cambiar la perspectiva acerca de cómo se conciben las matemáticas, como afirma Anacona (2003, pág. 37) “el estudio de los procesos de construcción, generalmente ocultos en una presentación exclusivamente formal o en la presentación escolar, aporta elementos conceptuales, metodológicos y epistemológicos”. Realizar este tipo de estudios le proporciona al profesor y a los estudiantes otra visión de lo que es esta ciencia.

Se identificaron las nociones históricas que se caracterizan como obstáculos epistemológicos, dado que, son nociones aceptadas en cierto periodo de tiempo, pero que no permitieron el avance de las matemáticas. A partir de los obstáculos epistemológicos identificados en el recorrido histórico, se diseñó el instrumento que se aplicó a los profesores de Educación Básica de Matemáticas.

Con el instrumento se determinan las concepciones subjetivas de los profesores en relación al conocimiento matemático del TFA, a la utilidad del teorema en la matemática y las concepciones en cuanto a la enseñanza del teorema en la escuela. Para ello, se trató de ver la conexión que hay entre las concepciones de los profesores y las concepciones epistemológicas en relación con el TFA, identificadas en el desarrollo histórico de los números primos.

# 2 DESCRIPCIÓN DEL DESARROLLO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Este estudio tuvo en cuenta los aportes más significativos en la historia de los números primos y en particular del TFA. Dentro de los matemáticos que dieron valiosos aportes a este tema se encuentran Euclides, Fermat, Euler, Legendre, Gauss, entre otros, los cuales trataron de descubrir los misterios que hay detrás de los números primos.

## 2.1 Los números primos para los pitagóricos

Los primeros indicios de las propiedades de los números primos se remontan a la escuela pitagórica. Los pitagóricos establecen un corpus teórico en torno al concepto de número, concepto que ocupa el lugar central de su cosmología, tal como se evidencia en su concepción filosófica de que todo es número. Para los pitagóricos sin el conocimiento del número nada se podía concebir, era fundamental, la base sobre lo que todo adquiere sentido.

Además de los números poligonales y de la clasificación de los números en pares e impares, los pitagóricos introdujeron en algún momento los conceptos de número impar-impar y par-impar, según que el número en cuestión fuera el producto de dos impares o de un par y un impar, y así se reservó a veces el nombre de número par para las potencias enteras de dos; hacia la época de Filolao o incluso antes, parece haber adquirido su importancia la distinción entre números primos y compuestos.

Los pitagóricos representaban los números utilizando puntos, pero, los números primos no permitían un arreglo rectangular, simétrico y bien ordenado, es decir, que la cantidad de puntos de las columnas sea igual en todas las filas, ya que los números primos solo permiten la representación en una sola dimensión, estos eran llamados lineales; como los números impares y pares se pueden obtener a partir del 1 y el 2 respectivamente, eran excluidos por los neopitagóricos de la lista de los números primos, dado que se basaban en la idea de que solo eran generadores y no números.

Sin embargo, fue Euclides matemático griego quien hacia el año 300 a. C, en los *Elementos*, el que se encarga de sistematizar y detallar la importancia de los números primos.

## 2.2 La teoría de números y Euclides

Los datos biográficos que se conocen acerca de Euclides (330 a.C. - 275 a.C.), son pocos, a pesar de ser el matemático más nombrado de la antigüedad. Es posible que Euclides recibiera su educación en Atenas, lo que explicaría su amplio conocimiento sobre la geometría desarrollada en la escuela de Platón. Enseñó en Alejandría, donde alcanzó un gran prestigio en el ejercicio de su magisterio. Euclides fue autor de diversos tratados, pero sin duda, su nombre se asocia principalmente a los *Elementos*, la obra más famosa desde la antigüedad que rivaliza por su difusión con las obras más célebres de la literatura universal, como la *Biblia* o el *Quijote*. Se trata, en esencia, de una compilación de obras de autores anteriores y que superó de inmediato cualquier tratado, debido a su plan general y la magnitud de su propósito.

Aunque los *Elementos* son considerados comúnmente como libros de geometría, los libros VII, VIII y IX están dedicados a la teoría de números. La palabra “número” para los griegos se refería siempre a lo que se conoce hoy como números naturales o enteros positivos. En estos tres libros los números son representados por un segmento denotado como *AB*, (con el descubrimiento de los números inconmensurables era evidente que no todos los segmentos podían asociarse con números enteros, pero el recíproco, que todos los números pueden representarse por segmentos, seguía siendo válido). Euclides no utiliza las expresiones “es múltiplo de” o “es divisor de” sino “esta medido por” o “mide a” respectivamente; por ejemplo un número $n$ esta medido por un número $m$ si existe un tercer número $k$ talque $n = km$.

El libro VII, empieza con 23 definiciones dentro de las cuales se destacan las siguientes:

Def. 1. Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosa que hay es llamada una.
Def. 2. Un número es una pluralidad de unidades.
Def. 3. Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.
Def. 4. Pero partes cuando no lo mide.
Def. 6. Un número par es el que se divide en dos partes iguales.

Def. 7. Un número impar es el que ni se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad.
Def. 12. Un número primo es el medido por la sola unidad.
Def. 13. Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común.
Def. 14. Número compuesto es el medido por algún número.
Def.15. Números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común.
Def. 23. Número perfecto es el que es igual a sus propias partes

Para Euclides partes hace referencia a lo que actualmente se conoce como los divisores de un número y un número no se dividía a sí mismo, entonces la definición de numero perfecto queda como aquel que es igual a la suma de sus divisores.

La *proposición* VII. 1 es lo que se conoce hoy como el “algoritmo de Euclides”, para hallar el máximo común divisor (o medida) de dos números dados. Consiste en un esquema que sugiere una aplicación inversa y repetida del axioma de Eudoxo. Dados dos números distintos se resta el menor $a$ del menor $b$ repetidamente hasta que se obtenga el resto $r_1$ más pequeño que el menor; a continuación se resta repetidamente a este resto $r_1$ de $a$ hasta obtener un resto $r_2 < r_1$; después se resta repetidamente $r_2$ de $r_1$ y así sucesivamente. Al final de este proceso conducirá a un resto $r_n$ que medirá a $r_{n-1}$, luego a todos los restos anteriores, así como a $a$ y a $b$; este número $r_n$ será el máximo común divisor (MCD) de $a$ y de $b$ respectivamente. La proposición 2 y 3 son ejercicios para hallar el MCD de 2 y 3 números dados respectivamente.

Entre las proposiciones siguientes se encuentran equivalentes de teoremas conocidos de la aritmética; así, la *proposición* VII. 8 expone que sí $an = bm$ y $cn = dm$ entonces $(a - c)n = (b - d)m$, las proposiciones $23 - 32$ tratan sobre las relaciones entre números primos, la *proposición* VII. 24 afirma que si $a$ y $b$ son primos entre sí con respecto a otro número $c$, es decir, $(a, c) = 1$[1] y $(b, c) = 1$, entonces $ab$ es primo con el número $c$. La *proposición* VII. 34 da una forma para hallar el menor número al que miden dos números, es decir el mínimo común múltiplo (MCM), la *proposición* VII. 35 afirma que el MCM de dos números debe medir cualquier otro múltiplo común, la *proposición* VII. 36 es la regla para hallar el MCM de tres números, la *proposición* VII. 39 es otra forma de resolver el problema del MCM.

El libro VIII contiene proposiciones acerca de los números en proporción continua,

[1] $(a, p) = 1$ notación para indicar que dos números $a, b$ son primos relativos.

propiedades sencillas de los cuadrados y de los cubos, finaliza con la *proposición* VIII. $27$: “Números sólidos semejantes tienen uno a otro la razón de un número cúbico a otro número cúbico”; esta proposición expresa simplemente que si se tiene un “número sólido” $ma \cdot mb \cdot mc$ y otro “número solido semejante” $na \cdot nb \cdot nc$ entonces su razón será la de $m^3 = n^3$, es decir, de un cubo a otro cubo.

El libro IX aborda el problema de la cantidad de números primos. Le interesa demostrar q Euclides que el conjunto de los números primos es infinito. Para ello utiliza el método indirecto, mostrando que no son finitos. Esto lo realiza en la **Proposición IX. $\mathbf{20}$**: “Los números primos son más que cualquier cantidad fijada de antemano de números primos”.

La demostración, supone que el conjunto de los números primos es finito. Utilizando notación moderna significa que el conjunto de los primos se puede representar por el conjunto:

$$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}.$$

Entonces se considera el producto de los números primos y se le adiciona 1, obtiendo el número

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1, \quad N > 1,$$

$$N > p_i \text{ donde } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Entonces se presentan dos casos: $N$ primo o compuesto. Si $N$ es primo, la demostración cumina, pues se ha encontrado un primo que no está en a lista inicial de primos. Si $N$ no es primo, existe un $p_i$ primo tal que $p_i/N$; de esta forma se tiene que:

$$p_i / p_1 p_2 \cdots p_n .$$[2]

Puesto que se tiene que $p_i/N$, entonces

$$p_i/(N - p_1 p_2 \cdots p_n) \text{ propiedad de divisibilidad;}$$

lo cual significa que:

$$p_i/1 \text{ contradicción.}$$

Ningún número primo divide al número $1$, hay una contradicción en la demostración, entonces la hipótesis es falsa, por lo tanto existen infinitos números primos.

La última proposición del libro IX, establece la conocida fórmula para hallar números

[2] La notación $a/b$, indica que $a$ divide a $b$.

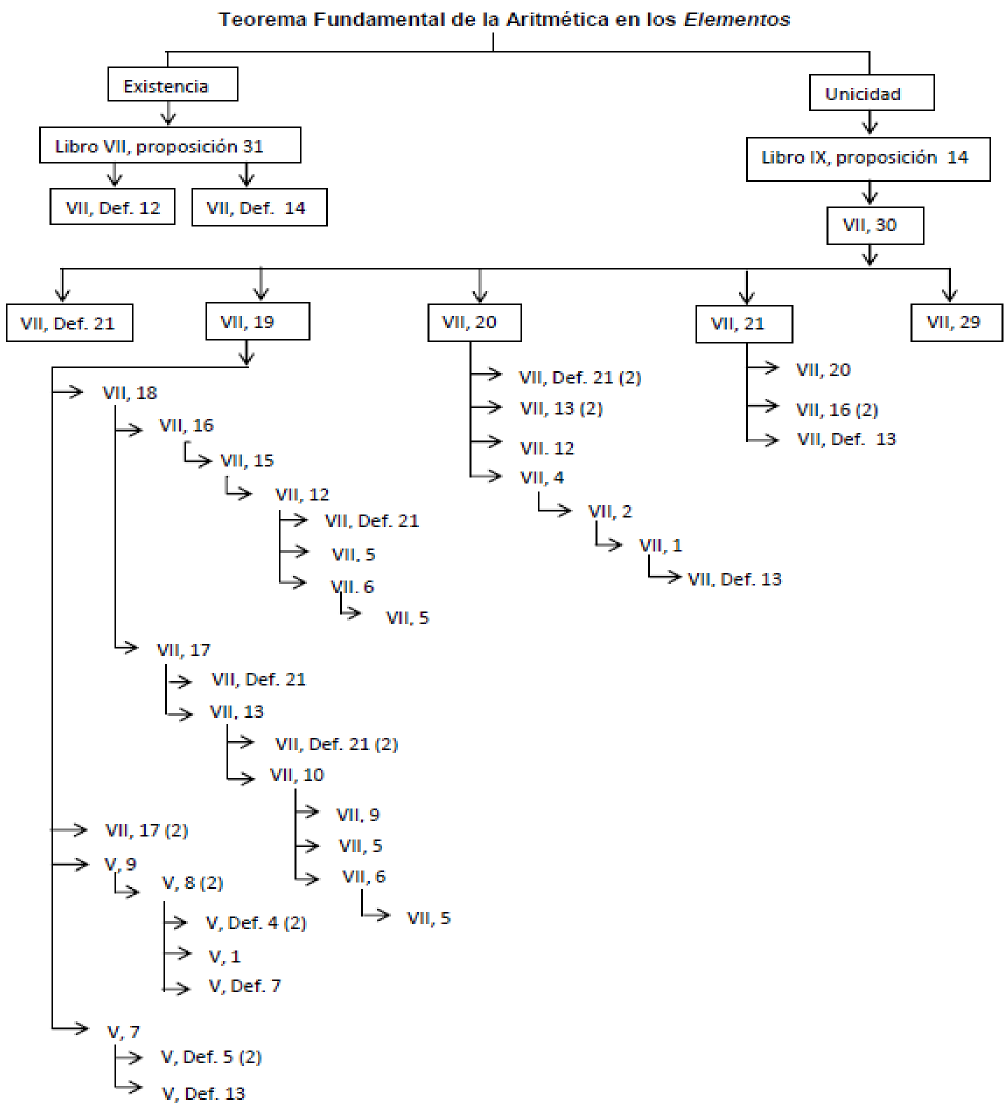
perfectos: “Si tenemos tantos números como queramos comenzando por la unidad y dispuestos en proporciones doble continua, hasta que su suma sea primo, y si se multiplica esta suma por el último, entonces el producto obtenido será un número perfecto”; es decir, en notación moderna, si $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}\ (2^n - 1)$ es perfecto. La demostración es sencilla haciendo uso de la definición de número perfecto dada en el libro VII.

En los libros VII y IX, aparecen las proposiciones relacionadas con el TFA. Las proposiciones 30 y 31 del libro VII, corresponden a la existencia de la descomposición en factores primos, y en la proposición 14 del libro IX, se hace referencia a la unicidad de la descomposición. Euclides tenía las dos partes del teorema en libros distintos, sin embargo, no poseía la notación y otros conocimientos para generalizar el TFA. Las tres proposiciones son enunciadas a continuación respectivamente como aparecen en los *Elementos* de Euclides.

> Proposición VII. 30: Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número) y algún número primo mide su producto, también medirá a uno de los iniciales.
> Proposición VII. 31: todo número compuesto es medido por algún número primo.
> Proposición IX. 14: si un número es el menor medido por números primos, no será medido por ningún otro número primo fuera de los que le medían desde un principio.

Para la demostración de estas dos proposiciones utiliza al menos 24 proposiciones y 9 definiciones de los libros V y VII. En la figura 2.1 se presenta un diagrama en el cual están las proposiciones que se utilizan para demostrar las proposiciones mencionadas anteriormente, en orden descendente.

*Figura 2.1 Teorema Fundamental de la Aritmética en los Elementos*




Según esta revisión de los *Elementos*, en la demostración de la *proposición* VII.31, Euclides no menciona ninguna de las proposiciones anteriores como argumento para establecer la validez de esta proposición. Sin embargo, se puede observar que hace uso de ciertas definiciones del libro VII, como son la de número primo y número compuesto, incluyendo a las definiciones 4 y 5, junto con la *proposición* VII.4, debido a que si se consideraba que un número compuesto es el medido por algún número, es posible que este número fuera un número primo. Además de esto, si todos los números son parte (divisor) o partes de todo número, el menor del mayor, de aquí que los números primos pueden considerarse como divisores de otros números, aunque a ellos solo los medirá la unidad.

Hay que tener en cuenta la manera como Euclides entiende o establece la relación de "ser medido por", es decir, ser divisor de, lo cual permite considerar la idea de medida entre números o de divisores, que es primordial para concebir lo que se conoce en la actualidad como el TFA.

**La proposición VII. 30:** Si el producto de dos números es medido por algún número primo, este número también medirá a alguno de los números iniciales.

La demostración, siguiendo a Euclides, pero utilizando notación moderna queda así:

Dados dos números $a$ y $b$ , al multiplicar $a$ por $b$ se obtiene $c$, es decir, $a \times b = c$ y sea $p$ primo tal que $p/c$, entonces $p/a$ o $p/b$.

Se supone que $p \nmid a$.

Pero $p$ es primo, entonces $(a, p) = 1$. **(VII, 29).**

Ahora como $p/c$ existe un $t$ tal que $p \times t = c$, **(VII, Def. 16),** pero $a \times b = c$, entonces $p \times t = a \times b$, luego $\frac{p}{a} = \frac{b}{t}$ **(VII, 19)**, pero $(a, p) = 1$ y los primos son también los menores, además son los menores que guardan la misma razón, entonces $p/b$ **(VII, 20)**. De manera semejante se demuestra que si no divide a $b$, divide a $a$. Por lo tanto $p/a$ o $p/b$.

Por otro lado, hay que identificar que en el libro VII, en las proposiciones anteriores a la *proposición* VII. 31 se demuestran propiedades relacionadas con la multiplicación de números primos, la cual es parte esencial en el TFA.

**La proposición VII. 31** puede ser escrita de la siguiente forma:

Para todo número $n$, tal que $n > 1$ existe $p$, tal que $p/n$, con $p$ primo.

Sea $n$ un número compuesto, entonces existe $p$ tal que $p/n$, entonces $n = pt$, donde $t$, $p$ son números naturales. Se presentan dos casos:

1. Si $n$ es primo, entonces $n = p$, se dará lo exigido.

2. Si $p$ no es primo, entonces existe un número $p_1$ talque $p = p_1 t_1$, ya que $n = pt$ entonces $n = p_1 t_1 t$. Si $p_1$ es primo se habrá dado lo propuesto, pero si es compuesto, existe $p_2$ tal que $p_1 = p_2 t_2$ entonces $n = p_2 t_2 t_1 t$. Si $p_2$ es primo se termina el proceso, pero si no lo es, se repite el procedimiento, hasta hallar un número $p_k$, que lo divida, pero si no se halla, una serie infinita de números que dividen al número $n$, cada uno de los cuales es menor que los anteriores, lo cual

es imposible en el caso de los números naturales. Luego existe $p_k$ primo, tal que $p_k$ divide a $p_{k-1}$ y también a $n$. Por lo tanto para todo $n$, existe un $p$ tal que $p/n$.

La contradicción de la demostración en esta proposición, es dada por el hecho que los números para Euclides son una colección de unidades, es decir, el origen de los números es una unidad. A partir de ella se crean los números, así que si se divide sucesivamente, llegara un momento en el cual se obtendrá la unidad, y no existen números menores a la unidad, por ello no se puede dividir más que un número finito de veces.

Esta proposición solo hace referencia a que un número compuesto puede ser dividido por un número primo. Se observa que en la demostración resulta otro factor, a parte del número primo que se busca, si el procedimiento exigiera que se debe hacer el mismo argumento hasta que no queden números compuestos después de hallar el número primo que divida al inicial, Euclides hubiera sido el primero en enunciar la descomposición en factores primos, que corresponde a la primera parte del TFA.

Mientras que en la demostración de la *proposición* 14 del libro IX, relacionada con la unicidad de la descomposición en factores primos, evidencia que si un número es el menor medido por números primos, es decir, es el mínimo común múltiplo, entonces, no hay otros números primos distintos a los que se han utilizado en la multiplicación con los cuales se obtenga como resultado este número. La demostración de Euclides hace referencia a la proposición 31, debido a que esta le asegura que un número compuesto es dividido por algún número primo.

**La proposición IX. 14**: según Euclides si un número es el MCM de números primos entonces no existen otros números primos que lo divida que es equivalente a: un número se puede descomponer en factores primos de una sola manera.

La demostración como la realiza Euclides en los *Elementos*:

Sea $a = MCM(p, q, r)$ tal que $(p, q) = (q, r) = (p, r) = 1$, entonces no existen otros números primos diferentes a $p, q, r$ que dividan a $a$.

Se Supone que $a$ tiene un factor $k \neq p, q, r$ talque $k$ es primo y $k/a$, entonces $a = kz$ y $pqr/a$. Como $a = kz$ y $a = pqr$, donde $p, q, r$ son primos, entonces $pqr/k$ o $pqr/z$. **(VII. 30).** Se tiene que $pqr$ no divide a $k$ porque es primo, entonces $pqr/z$, que es menor que $a$. Pero se ha dicho que $a$ es el $MCM\ (p, q, r)$, entonces $pqr$ no divide a $z$. Por lo tanto ningún número diferente de $p, q, r$ divide a $a$.

La *proposición* IX. 14 según Agargün y Özkan (2001, pág. 208) “es una buena demostración parcial de la condición de unicidad para el TFA, pero está claro que IX. 14 no cubre el caso de los números que poseen un factor cuadrado”, es decir, los números que tienen un factor primo repetido, no se estarían tomando en cuenta en esta demostración, debido a que Euclides enuncia que es el menor medido por números primos, así $6 = 3 \times 2$ y $18 = 3 \times 3 \times 2$, los 2 números son medidos por los números primos 2 y 3, sin embargo 6 es el menor medido por estos números primos. Por otro lado IX. 14 inicia con una colección de primos mientras que el TFA comienza con un número entero, de esta forma difieren también en el punto de partida.

### 2.3 Eratóstenes y su método para hallar primos

También en la antigua Grecia hacia el año $200$ a. C. el matemático Eratóstenes (Cirene, 276 a. C. – Alejandría, 194 a. C.), ideó un método que permite hallar números primos menores que un número natural dado, el cual se conoce como la “criba de Eratóstenes”, un método que va aislando progresivamente los números primos. Partiendo de la sucesión de todos los números naturales ordenados de manera creciente, se van suprimiendo o marcando los múltiplos del 2, luego los múltiplo de 3 (en la sucesión inicial), como los múltiplos de 4 están incluidos en los de dos, se continua con los múltiplos de 5, se continúa de la misma manera suprimiendo cada $n$-ésimo número a partir del número $n$, entonces los números que queden en la tabla a partir del dos serán los números primos.

Aunque es un método sencillo no permite ver la extensión de los números primos y con un $n$ grande los cálculos se convierten en una tarea ardua; de allí que muchos matemáticos se hayan interesado en descubrir un patrón que les permita saber cada cuanto se encontrará un número primo en el conjunto de los números naturales.

## 2.4 El libro de texto de Nicómaco

Un escrito de Nicómaco de Gerasa (ca. 100 d. C. Gerasa) que fue un filósofo y matemático, titulado *Introducción a la aritmética* fue considerado el primer trabajo en el que se separa la aritmética de la geometría. Fue el libro de texto durante toda la edad media y allí estudia los números y sus propiedades, también revela buena parte del trabajo de Euclides con relación a los números primos, amigos y perfectos. Aunque no ofrece demostraciones abstractas de los teoremas, solo los enuncia y proporciona ejemplos numéricos. Es un libro con una intensión didáctica, cuyo propósito es que los estudiantes puedan comprender de una forma efectiva la aritmética.

## 2.5 Al-Farisi un paso importante en el TFA

Kamal al-Din Al-Farisi, (1260-1320), fue un gran matemático persa, físico, y astrónomo. Su obra representa quizás el paso más importante hacia el TFA, realizado por los matemáticos antes de Gauss. Fue el autor del tratado *Tadhkira al-ahbab fi bayan al-tahabb (*memorándum para la prueba de amigabilidad). Su principal preocupación eran los números amigos y su objetivo era demostrar mediante un método diferente del teorema de Thābit ibn Qurra (836-901) que afirma "si tres números $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \times 2^{n} - 1$, y $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ son primos, y si $p, q, r > 2$, entonces la pareja $2^n pq$ y $2^n r$ son amigables", cuando Ibn Qurra menciona amigables se refiere a los números amigos que son dos enteros positivos $a$ y $b$ tales que $a$ es la suma de los divisores propios de $b$ y $b$ es la suma de los divisores de $a$ donde 1 se considera divisor propio, pero no lo es el mismo número.

Ibn Qurra había trabajado brevemente en la descomposición de números enteros y los métodos combinatorios. Al-Farisi desarrolló nuevas ideas en la teoría de los números, investigó la descomposición de números enteros más a fondo que Ibn Qurra. Debido a que para poder introducir métodos combinatorios es necesario tener en cuenta la existencia de la factorización de un entero en números primos y utilizar propiedades de la unicidad para determinar los divisores, es aquí donde encuentra la relación con el TFA.

En su obra se encuentran seis definiciones y nueve proposiciones relacionadas con el TFA. Agargün y Fletcher (1994), realizaron la traducción del documento de Al-Farisi a inglés. A continuación se revisan algunos de sus aportes:

El trabajo de Al-Farisi se basa en los *Elementos*, por ello se considera que algunas de las definiciones que no proporciona, como la de número compuesto, número primo, son las mismas que utilizaba Euclides, al igual que cuando se refiere a número es lo que hoy se conoce como números naturales. Sin embargo Al-Farisi define los números y los factores de un número en relación a la multiplicación. Los números compuestos en relación con sus factores y las potencias de un número, como se presentan a continuación de acuerdo a Agargün y Fletcher (1994, pág. 164) en las definiciones $1-6$:

**Definiciones:**

**1.** Cada número hecho por la multiplicación de un número con otro número, yo lo llamo un número doble. Y si éste es hecho multiplicando un número con otro número y con un tercero, yo lo llamo un triple. Y si éste es hecho al multiplicar un triple con un cuarto, yo lo llamo cuádruple, etcétera.
**2.** Y los factores de cada [número] compuesto o son iguales o no. Yo llamo a los del primer tipo de factores iguales; el segundo tipo de factores diferentes, ya sea que la totalidad de sus factores sean diferentes, como en el [número] compuesto de $a, b, c$ o algunos de sus factores son diferentes como en el número compuesto de $a, b, b$.
**3.** Y si el número de factores de dos números compuestos son los mismos, y llamo a estos dos [números compuestos] correspondientes en factores, o si no [yo los llamo] diferentes en ellos.
**4.** Dos números compuestos los cuales tienen la misma descomposición en factores son aquellos que tienen igual correspondencia en factores, donde cada factor repetido en uno de ellos es repetido el mismo número [de veces] en el otro.
**5.** Las potencias (*the genera*) de un número es su cuadrado y su cubo y así indefinidamente.
**6.** La cadena de números es la serie de números que inicia con el mismo número, y el segundo su cuadrado, entonces su cubo, y así para el resto de las potencias (*genera*). El número y sus potencias (*genera*) son los términos de esta cadena.

En las definiciones de Al-Farisi se pueden observar diferencias en el lenguaje y por la notación de Euclides.

**Proposiciones** (Agargün & Fletcher, 1994, pág. 194):

**Proposición 1**. Cada número compuesto puede necesariamente ser descompuesto en un número finito de factores primos de los cuales éste es el producto.
Demostración:
Sea $a$ un número compuesto; entonces (por VII.31 de los Elementos) este posee un divisor primo $b$. Luego $a = bc$. Si $c$ es primo entonces esto muestra que $a$ es el resultado de multiplicar el número primo $b$ y el número primo $c$. Si $c$ es compuesto entonces éste es medido por un primo $d$,

esto es $c = de$. Si $e$ es primo entonces $a = bde$. De lo contrario se repite el proceso de forma tal que el factor compuesto esté finalmente descompuesto en dos factores primos. Entonces $a$ está hecho de todos los primos anteriores. Si éstos nunca pueden ser descompuestos en dos factores primos, entonces esto podría, necesariamente, sugerir que un producto finito puede ser de un producto infinito de números, lo cual es absurdo. Entonces para $k$ primo se tiene $a = bd \cdots k$. Y esto es lo que se buscaba.

Al-Farisi complementa la proposición VII. 31 de Euclides, al exigir en esta proposición que todos los factores de la descomposición sean números primos, la demostración comienza con el hecho de que todo compuesto tiene un divisor primo, es decir, uno de los factores es primo y debe encontrar la factorización para el otro factor, al final se obtendrán todos los factores primos, convirtiéndose así en la primera afirmación y prueba de la existencia de la factorización prima para cualquier número compuesto.

**Proposiciones 3-9** (Agargün & Özkan, 2001, pág. 210):

**Proposición 3**. La relación de 1 a cualquier número compuesto se compone de su relación a cada uno de los factores primos.
**Proposición 4**. Cualquiera de los dos números compuestos que tienen la misma descomposición en factores son idénticos.
**Proposición 5**. Cualquiera de los dos números compuestos distintos no tienen la misma descomposición en factores.

Después de la proposición 5 Al-Farisi dio el primer paso para hallar todos los divisores de un entero, y para ello utiliza la descomposición en primos.

**Proposición 6**. Si un número compuesto $a$ se descompone en números primos $b, c, d, e, \cdots, k$, entonces de dos en dos, $ab, bd, be, \cdots$, etc. de tres en tres $bcd, bce, \cdots$ etc., todos ellos son divisores de $a$.
**Proposición 7**. Sí $a \nmid b$, entonces para $n = 3,4, \cdots, a^2 \nmid ba$; y $a^n \nmid ba$; $a^3 \nmid ba^2$ y $a^{n+1} \nmid ba^2$; y $a^4 \nmid ba^3$ y $n^{n+2} \nmid ba^3$ y así sucesivamente.
**Proposición 8**. Aquí, sí un número compuesto $a$ es descompuesto en sus factores primos como $a = bcd \cdots k$, entonces si uno de ellos, digamos $b$, no se repite entonces $b^2 \nmid a$ y para $n = 3,4, \dots, b^n \nmid a$. Y sí $b$ se repite una sola vez entonces $b^2/a$ pero $b^n \nmid a$. Y si $b$ se repite únicamente dos veces entonces $b^2|a$, $b^3|a$, pero $b^{n+1} \nmid a$.
**Proposición 9**. Sí un número compuesto $a$ es descompuesto en sus factores primos como $\mathrm{a} = \mathrm{bcdh} \cdots \mathrm{kl}$, entonces a no tiene divisores excepto 1 y $b, c, d, h, \dots, k, l$ y de dos en dos $bc, bd, \dots,$ etc., y de tres en tres $bcd, bch, \dots,$ etc., ..., y los productos de todos los factores excepto uno: $cdh \cdots kl, bdh \cdots kl, \dots, bcdh \cdots k$.

El trabajo de Al-Farisi es un gran paso hacia el TFA, con la proposición 1 y las relaciones que presenta entre el número y sus factores, hace referencia sobre la unicidad de la factorización en primos en la proposición 4 y 5, pero no hace una relación entre la existencia y la unicidad debido a que su principal interés estaba en encontrar todos los divisores de un número.

### 2.6 El cálculo de los divisores de un número de Jean Prestet

Jean Prestet (1468-1690) perteneció al círculo Nicolás Malebranche, primero como su siervo, después como su alumno, desde 1670 hasta la publicación de la primera edición de la obra *Elemens de Mathématiques* en 1675. Desde 1675 a 1680, Prestet fue preparado para el sacerdocio en el Oratorio y enviado a diferentes pueblos para enseñar matemáticas. Al igual que Al-Farisi, se interesó por los divisores de un número (Agargün & Özkan, 2001, pág. 212), “su objetivo era hacer explícito la relación entre cualquier factorización de un número dado y todos los posibles divisores”, en su trabajo de 1689 *Noveaux Elemens de Mathématiques,* da algunos resultados relacionados con los números primos y el TFA, aunque no afirma la existencia ni la unicidad de éste.

En el Capítulo 6 de su primer volumen (Agargün & Özkan, 2001, pág. 211), se encuentra el siguiente teorema y los corolarios III, IV y VII, relacionados con el TFA:

> **Teorema:** Si dos números $b$ y $c$ son primos relativos, su producto $bc$ es el menor número que cada uno de ellos puede dividir exactamente y sin residuo.

Como corolario de este teorema, se encuentra:

> **Corolario III:** Si $d$ mide exactamente un producto $bc$ de dos números $b$ y $c$ y si $c$ y $d$ son primos relativos; el número $d$ es un divisor de $b$.

Una demostración moderna del corolario anterior es el siguiente:

Si $d \mid bc$ y $(c, d) = 1$ entonces $d \mid b$.

Como $d \mid bc$ se tiene que $bc = dt$ (1) y $(c, d) = 1$, existen $x$ y $y$ tales que $cx + dy = 1$ (2). Por propiedad de la multiplicación en (2) se obtiene $bcx + bdy = b$ y (1) se reemplaza en $bcx + bdy = b$ entonces $dtx + bdy = b$, extrayendo factor común $d$ se tiene $d(cx + by) = b$, por lo tanto $d \mid b$, que era lo que se quería demostrar.

El siguiente corolario era para determinar todos los divisores de un número expresado como producto de factores primos.

> **Corolario IV**: Si dos números diferentes $a$ y $b$ son simples, cada divisor de su plano, o producto $ab$ es $1$, o $a$, o $b$, o $ab$.

Los números simples hace referencia a los números primos, y el producto de dos números primos solo puede tener 4 divisores, el $1$, uno de los dos primos o el producto en sí mismo. Los corolarios V y VI corresponden a los divisores del producto de tres números (sólido) primos diferentes y de cuatro números (supersólido) primos respectivamente, luego para cinco y así sucesivamente. Los siguientes corolarios tratan sobre los divisores de las potencias de los números primos.

> **Corolario VIII**. Si el número $a$ es simple, cada divisor de su cuadrado $aa$ es uno de los tres $1, a, aa$. Y cada divisor de su cubo $a^3$ uno de los cuatro $1, a, a^2, a^3$ $(\cdots)$. Y también con los otros hacia el infinito.

En el trabajo de Prestet no se observa un énfasis en el TFA, debido a que, su interés está en explicitar las relaciones entre los números y sus divisores, aunque para ello utiliza el TFA implícitamente.

## 2.7 Los números de Mersenne

Marin Mersenne (1588-1648) fue un filósofo francés del siglo XVII que estudió diversos campos de la teología, matemáticas y la teoría musical. Mersenne jugó un rol importante en la ciencia del siglo XVII, no sólo por sus contribuciones a la teoría de números sino también a su valioso servicio como el centro de intercambio de información entre matemáticos.

Mersenne fue intrigado por los números de la forma $2^n - 1$, llamados “números de Mersenne” en su honor. Por supuesto, todos estos números son impares. Mersenne reconoció que si $n$ es compuesto, entonces $2^n - 1$ debe ser compuesto también; por ejemplo, si $n = 12$, el número de

Mersenne $2^{12} - 1 = 4095 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ es compuesto; para el compuesto $n = 33$, $2^{33} - 1 = 8589934591 = 7 \times 1227133513$.

Cuando el exponente es primo, sin embargo, la situación es menos clara. Sea $p = 2, 3, 5$ y $7$ se tiene los “primos de Mersenne” $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$, pero si se usa el primo $p = 11$ como exponente, se obtienen $2^{11} - 1 = 2047$, este número es el producto de $23$ y $89$ y es, por lo tanto, compuesto. Mersenne estaba consciente de que si $p$ es primo no es garantía de que $2^p - 1$ sea primo también.

Con cada número de Mersenne primo hay asociado un número perfecto, allí radica su importancia en la teoría de números, si hay infinitos primos de Mersenne habrá infinitos números perfectos pares. Euclides muchos siglos antes, ya conocía este tipo de números y encontró una relación con los números perfectos pares. Si $M$ es un primo de Mersenne, entonces $M(M + 1)/2$ es un número perfecto.

## 2.8 El pequeño teorema de Fermat y los números primos

Pierre de Fermat $(1601 - 1665)$ nació en Beaumont-de-Lomagne (Francia) el $17$ de agosto de $1601$ y murió en Castres (Francia) el $12$ de enero de $1665$. Abogado de profesión, formado en la ciudad de Toulouse, y matemático vocacional contribuyó al desarrollo del algebra, geometría, cálculo diferencial e integral, teoría de números y cálculo de probabilidades.

Las contribuciones realizadas por Fermat a la teoría de números fueron las que lo llevaron a ser un reconocido matemático de su época. En el año $1621$ estudia la *Arithmetica* de Diofanto gracias a la edición greco-latina de Claude Gaspard de Bachet $(1591 - 1639)$, que era uno de los miembros de un grupo informal de científicos constituido en París. La *Arithmetica* de Diofanto no era en absoluto una obra desconocida, pero lo cierto es que capturo la atención de Fermat, y en particular, según los historiadores es posible que gracias a ello haya sido el fundador de la teoría de números moderna.

Según Boyer (1987) a Fermat le llamaron la atención varios aspectos de la obra, entre ellos

los números amigos y perfectos, los números figurados, los cuadrados mágicos, las ternas pitagóricas, la teoría de la divisibilidad y sobre todo los números primos. Fermat demostró sus teoremas utilizando un procedimiento que él mismo denominó "descenso infinito", una forma de inducción matemática a la inversa, procedimiento que Fermat fue de los primeros en usar.

Utilizando el método de descenso infinito consiguió demostrar la conjetura de Girad de que todo número primo de la forma $2^n + 1$ puede expresarse de una y sólo una manera como la suma de dos cuadrados. Fermat demostró que si $2^n + 1$ no es la suma de sus cuadrados, entonces existe otro número menor del mismo tipo que tampoco es suma de dos cuadrados. Utilizando esta relación recursiva hacia atrás, lleva a la falsa conclusión de que el mínimo número entero de esta forma, el 5, no se puede expresar como suma de dos cuadrados, mientras que $5 = 1^2 + 2^2$; por lo tanto, queda demostrado el teorema general. Dado que como se puede demostrar fácilmente, ningún entero de la forma $4n - 1$ puede ser suma de dos cuadrados, y que todos los primos excepto 2 son de la forma $4n + 1$ o $4n - 1$, se clasifican de esta manera por el teorema de Fermat, los números primos que se pueden y los que no se pueden expresar como suma de dos cuadrados. El número $23$, por ejemplo, no se puede expresar de dicha forma, mientras que el $29$ si puede expresarse como $2^2 + 5^2$. Fermat sabía también que un número primo de cualquiera de los dos tipos se puede expresar siempre como diferencia de dos cuadrados de una y sólo una manera.

De su trabajo con los números primos Fermat enunció algunos teoremas, como es el caso del pequeño teorema de Fermat; éste establece que si $p$ es un número primo entonces para cualquier entero $a$ se obtiene que $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$, dicho de otra forma si se eleva un número $a$ a la p-ésima potencia y al resultado se le resta $a$, lo que queda es divisible por $p$, siendo $p$ un número primo.

Fermat formuló que los números de la forma $N_n = 2^{2^n} + 1$, eran todos primos, esto lo dedujo a partir de una base finita correspondiente a los únicos casos $n = 0, 1, 2, 3, 4$, pero Euler descubrió un siglo más tarde que esta conjetura es falsa, dado que para el caso $n = 5$, $2^{2^5} + 1$ es un número compuesto, de hecho, $2^{2^n} + 1$ no es primo para $n$ entre 5 y $16$, a partir de esto surge en la comunidad matemática la cuestión de si habrá algún otro "primo de Fermat" aparte de los que encontró él mismo. Los números que en efecto eran primos a partir de esta fórmula se convirtieron en un tipo especial de primos los llamados “primos de Fermat”.

Dos milenios antes de la época de Fermat se había formulado la “hipótesis china” que establece que $n$ es primo si y sólo si $2^n - 2$ es divisible por $n$, donde $n$ es entero mayor que 1. La mitad de esta conjetura es falsa, ya que, por ejemplo, $2^{341} - 2$ es divisible por $341$, pero, $341 = 11 \cdot 31$ es un número compuesto, sin embargo, la otra mitad de la conjetura es correcta, si $n$ es primo implica que $2^n - 2$ divisible por $n$ se cumple, el “pequeño teorema” de Fermat consiste en una generalización de este caso.

Fermat fue realmente el “príncipe de los aficionados” en matemáticas. Sin embargo, Fermat no publicó prácticamente nada a lo largo de su vida, sus obras se publicaron después de su muerte, por lo cual perdió el reconocimiento de prioridad que le habría correspondido para la mayor parte de su obra, dado que otros matemáticos redescubrieron sus aportes a la matemática, él sólo comunicaba sus ideas por carta a Mersenne.

### 2.9 Euler: el octavo número perfecto

Leonhard Paúl Euler $(1707 - 1783)$, fue un matemático y físico suizo; está considerado como el principal matemático del siglo XVIII, uno de los más prolíficos y grandes de todos los tiempos. Nació en Basilea y estudió en la Universidad de Basilea con el matemático suizo Johann Bernoulli, licenciándose a los 16 años. En $1727$, por invitación de la emperatriz de Rusia Catalina I, fue miembro del profesorado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Fue nombrado catedrático de física en $1730$ y de matemáticas en $1733$.

Su ilimitada producción científica la empezó en San Petersburgo y a los pocos años comenzó a destacarse como uno de los matemáticos más brillantes de su época; entabló amistad (Castro, 1988, pág. 4) “con los más destacados científicos de la Academia, encabezados por Christian Goldbach $(1690 - 1764)$, con quien mantendría posteriormente un importante intercambio de correspondencia, el cual sería definitivo para el desarrollo de varias áreas de la matemática en el siglo XVIII”. Interesado en la teoría de números y en los números primos, retoma la demostración de la infinitud de los primos dada por Euclides, y la presenta utilizando herramientas del cálculo y el análisis.

En 1729 Christian Goldbach le envió una carta para interesarlo en una afirmación de Fermat, sobre números primos, que establece que $F_n = 2^{2^n} + 1$ son primos, para todo $n$ natural. A partir de ello, Euler demostró para el caso $n = 5$ se obtenía $F_5 = (641)(6700417)$, de forma que $F_5$ es compuesto. Cabe resaltar (Castro, 1988, pág. 5) "que quince años después probó que si $a$ y $b$ son primos relativos, cualquier factor de $a^{2^n} + b$ es 2 o de la forma $k2^{n+1} + 1$. En particular para $F_5$ se tiene que $641 = 2^6(10) + 1$ y $6700417 = 2^6(104694) + 1$"

Otra de sus demostraciones es la que publicó en 1732 (Castro, 1988, pág. 5) "en donde demostró que si $P$ es un número positivo de la forma $4K + 3$, entonces $2P + 1$ divide a $2^P - 1$, sii, $2P + 1$ es primo. Este resultado le permitió concluir que 23 divide a $2^{11} - 1$, y $503$ a $2^{51} - 1$". Euler realizó varias pruebas del pequeño teorema de Fermat, y una demostración acerca de las representaciones de los números primos (Castro, 1988, pág. 27):

> En 1744 demostró que existen infinitas representaciones de los primos del tipo $8n \pm 1$ en la forma $x^2 - 2y^2$; también que cualquier primo del tipo $12n \pm 1$ puede expresarse de las formas $x^2 - 3y^2$ y $3x^2 - y^2$ de infinitas maneras y que el doble de cualquier primo de la forma $20n \pm 3$ o $20n \pm 7$ es del tipo $x^2 + 5y^2$.

Los números primos y los números perfectos guardan una relación como se mencionó antes, aunque hasta la fecha no se ha encontrado ningún número perfecto impar (Castro, 1988, pág. 47) "Euler demostró que cualquier número perfecto impar, es de la forma $r^{4m+1}P^2$ en donde $r$ es un primo de la forma $4n + 1$, $m$ y $P$ son enteros y $(P, r) = 1$", de esta forma, se conocen resultados acerca de este tipo de números perfectos impares en el caso de existir.

Los números perfectos que Euler conocía eran de la forma $2^{P-1}(2^P - 1)$ en donde $P = 2,3,5,7,13,17,19$, pero en 1772 demostró que $2^{31} - 1 = 2147483647$ es un primo y por lo tanto encontró el octavo número perfecto de 19 dígitos. En la actualidad, según la lista de números perfectos (www.vaxasoftware.com, 2015), sólo se conocen con seguridad 42 números perfectos, sin embargo, otros seis números podrían ser perfectos (ver anexo 1), el último se obtuvo en 2005 y corresponde al primo $P = 25964951$ de $15632458$ dígitos.|

Uno de los problemas abiertos, más conocido de la teoría de números, es la *conjetura de Goldbach*. En una carta que envió Goldbach a Euler, el 7 de junio de 1742, le declaraba que todo número par mayor o igual a cuatro, es la suma de dos números primos. Así, por ejemplo: $4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 5 + 3,\ 10 = 5 + 5, 12 = 5 + 7, 14 = 7 + 7.$ Esta conjetura no ha podido ser resuelta, pero la conjetura débil de Goldbach fue demostrada hace poco por el matemático peruano Harald Helfgott, la cual afirma que "todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos".

En su obra *Elements of Algebra*, se encuentra su trabajo relacionado con el TFA, en el artículo 41 del Capítulo IV de la Sección I, Parte I, (Euler, 1828, pág. 10) enuncia la existencia de la factorización prima y proporciona una prueba parcial de la misma. También da algunas definiciones en el capítulo IV, en el artículo 37 define que es un factor; en el 38 los números compuestos; en el 39 los números simples o primos, en la cual expresa que la unidad no se reconoce como un factor, debido a que los números que se multiplican por 1; en el artículo 40 al orden de los números primos, que estos no siguen una secuencia, aclara que nadie ha establecido o descubierto la ley que siguen estos números.

En el artículo 41 (Euler, 1828, pág. 11) establece que todos los factores de un número compuesto son números primos:

> **Artículo 41.** Todos los números compuestos, los cuales pueden ser representados como factores, resultan de los números primos antes mencionados; es decir, todos sus factores son números primos, estos siempre pueden ser descompuestos y representados por dos o más números primos. Cuando tenemos representado, por ejemplo, el número 30 como $5 \times 6$, es evidente que 6 no es un número primo, pero usando el producto de $2 \times 3$, podemos tener la representación de 30 como $5 \times 2 \times 3$ o como $2 \times 3 \times 5$; es decir, como factores, de los cuales todos son números primos.

El artículo anterior está relacionado con la existencia de la descomposición en factores primos, hace énfasis en que todos los factores son primos, además que la descomposición es la misma, no importa el orden de los factores primos.

En el artículo 43 Euler (1828, pág. 11) proporciona un método para la descomposición de cualquier número en sus factores primos:

> **Artículo 43**. Por lo tanto, es fácil de encontrar un método para el análisis de cualquier número, o su solución en sus factores simples. Que se propone, por ejemplo, el número $360$; que lo representara primero por $2 \times 180$. Ahora $180$ es igual a $2 \times 90$, y $90$ es igual a $2 \times 45$; $45$ es igual a $3 \times 15$; y por último $15$ es igual a $3 \times 5$.
> De modo que el número $360$ puede ser representado por los factores simples $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, ya que todos estos números multiplicados juntos producen $360$.

Este método es eficiente para números pequeños. De hecho, como se afirmó antes, la factorización es un problema muy difícil sobre el cual se soporta el Criptosistema RSA. Más aun, este problema de factorizar está estrechamente relacionado con la primalidad de un número.

Este método es el que se utiliza en la actualidad a nivel escolar, se empieza a examinar si el número $n$ es divisible por $2, 3, 5, \ldots$, dependiendo cuál de estos primos dividen a $n$ se dice que tiene mitad, tercera, quinta, etc. Y se encuentran los factores primos de dicho número.

Euler también se interesa por los divisores de un número y en el Capítulo VI, sección I, parte I, establece la forma de hallarlos, la cual es similar a la expuesta por Al-Farisi, a partir de la descomposición en factores primos (Euler, 1828, pág. 18):

> **Articulo $65$**. Cuando, por lo tanto, hemos representado a cualquier número asumidos por placer, por sus factores simples repetidos, será muy fácil para exhibir todos los números por los que es divisible. Sólo tenemos, en primer lugar, tomar los factores simples uno por uno, para luego multiplicarlos juntos de dos en dos, de tres en tres, cuatro en cuatro, y así hasta que llegamos al número propuesto.

A partir de la descomposición en factores primos, para obtener sus divisores, se toman los números primos y luego se agrupan de dos, tres y así dependiendo de los factores.

## 2.10 Legendre y la distribución de los números primos

Adrien Marie Legendre (1752-1833), nació en París en una familia rica. Recibió su educación en el Collège Mazarin en París, y defendió su tesis en física y matemáticas en 1770. De 1775 a 1780, Legendre fue profesor de matemáticas de la Escuela Militar de París, y profesor de la la École Normale desde 1795.

Fue uno de los grandes matemáticos de la Revolución Francesa, sin llegar a la altura de Euler o Lagrange, que consideraba sus maestros, aportó resultados valiosos en muchos campos de las matemáticas. Sin embargo, su carrera ante la mirada de los estudiosos de la historia, es como la de un personaje particularmente infortunado. Pese a trabajar algunos de los problemas más importantes de su época, se dejó sobrepasar por otros matemáticos: por Laplace, en Teoría del Potencial; por Gauss con la Ley de Reciprocidad Cuadrática en Teoría de Números; por Abel y Jacobi con la inversión de las Funciones Elípticas y por Lobachevski y Bolyaí al no atreverse a plantear una geometría no-euclideana.

Sobre su trabajo en teoría de números publicó una obra en dos volúmenes, su *Essai sur Théorie des nombres* (1797-1798), que es a la vez el primer tratado que se dedicaba exclusivamente a la teoría de números. Desde la época de Euclides era de conocimiento general que la cantidad de números primos es infinita; sin embargo, la densidad de primos va decreciendo según se va avanzando a números cada vez mayores. Los aspectos relacionados con este tema llevaron a Legendre a intentar describir exactamente la distribución de los números primos entre los números naturales. Los matemáticos se propusieron buscar una regla, que después se conoció como el "teorema del número primo", que expresara el número de primos menores que un número natural $n$ (que hoy se suele representar por $\pi(n)$). Legendre conjeturó que $\pi(n)$ se va aproximando a

$$\frac{n}{\ln n - A}, \text{con } A = 1{,}08366$$

según va creciendo $n$ indefinidamente, con base a un recuento de grandes cantidades de números primos. Esta conjetura se acerca a la distribución real de los números primos, sin embargo una formulación precisa del teorema que afirma que

$$\pi(n) \to \frac{n}{\ln n}.$$

en 1896 dos matemáticos, independientemente uno del otro, demostraron el teorema, basados en las ideas desarrolladas por Riemman acerca de la función $\boldsymbol{\zeta}$(s) y su relación con $\pi(n)$. La prueba dada por el francés Jacques Hadamard (1865-1963) es más simple, pero la del belga Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866-1962) estudia con más detalle el margen de error; también demostró que la formula dada por Gauss es una mejor aproximación que la de Legendre sin importar el valor que se le asigne a la constante $A$.

Legendre demostró que no existe ninguna función algebraica racional que tome siempre como valores a los números primos, pero, observó que el polinomio $n^2 + n + 17$ toma valores primos para todo valor de $n$ desde $n = 1$ a $n = 16$, y que $2n^2 + 29$ es primo para valores de $n$ desde $1$ a $28$. Euler había demostrado ya que $n^2 - n + 41$ es primo para valores de $n$ desde $1$ a $40$.

Con relación al TFA, en (Agargün & Özkan, 2001, pág. 213) se presenta el enunciado y la demostración de Legendre relacionada a la existencia de la siguiente forma:

> Cualquier número no primo $N$ puede ser representado por un producto de varios números primos $\alpha, \beta, \gamma$, etc., cada uno elevado a alguna potencia, por lo que uno supone que $N = \propto^m \beta^n \gamma^p$, etc.

Su demostración es la siguiente:

> El método a seguir para realizar esta descomposición, consiste en tratar de dividir N por cada uno de los números primos $2, 3, 5, 7, 11$, etc., a partir del más pequeño. Cuando la división tiene éxito con uno de estos números $\propto$, se repite tantas veces como es posible, por ejemplo, $m$ veces, y llama P al último cociente, así tenemos
>
> $$\mathrm{N} = \alpha^m P$$
>
> El número P no puede ser dividido por α, y es inútil tratar de dividir P por un número primo menor que α, pero si P fuera divisible por θ, donde θ es menor que α, está claro que N también sería divisible por θ, en contra de la hipótesis. Por tanto, debemos tratar de dividir P por números primos mayores que α, por lo que vamos a obtener en la sucesión
>
> $$\mathrm{P} = \beta^n Q, Q\gamma^p R, \text{etc.}$$
>
> Por lo que se tiene que $\mathrm{N} = \alpha^m \beta^n \gamma^p$, etc.

Este método es similar al presentado por Euler en la sección anterior, sin embargo, Legendre usa expresiones generales y la notación de potencias para representarlo, es decir, Legendre es más riguroso en su escritura. Como antes, la dificultad para determinar números primos es un obstáculo en la factorización de números de muchas cifras.

## 2.11 Gauss: el último eslabón

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un matemático, astrónomo, geodesta y físico alemán.

Contribuyó a diferentes ramas de la matemática entre las que se encuentra la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado “el príncipe de las matemáticas” y, para algunos, “el matemático más grande desde la antigüedad”.

Su libro de mayor difusión, es un tratado de teoría de números en latín, titulado *Disquisitiones arithmeticae* publicado en 1801, dedicado a su protector el duque Brunswick. Esta obra es el punto principal del desarrollo del lenguaje y las notaciones de la rama de la teoría de números, conocida como: el álgebra de las congruencias. Las *Disquisitiones arithmeticae* están estructuradas en artículos y estos están contenidos en siete secciones:

*Sección primera*: de los números en general.
*Sección segunda*: sobre las congruencias del primer grado.
*Sección tercera*: sobre residuos de las potencias.
*Sección cuarta*: sobre congruencias de segundo grado.
*Sección quinta*: sobre las formas y las ecuaciones indeterminadas de segundo grado.
*Sección sexta*: aplicaciones varias de las investigaciones precedentes.
*Sección séptima*: ecuaciones que definen secciones de un círculo.
El primer artículo de la obra es el siguiente (Gauss, 1801, pág. 6):

> Si un número $a$ divide la diferencia de dos números *b* y *c,* se dice que *b* y *c son congruentes según el módulo* $a$; si no lo son, se dice que son *incongruentes*; el número $a$ se llama *módulo*. Ambos números *b* y *c*, en el primer caso, son llamados uno *residuo* del otro y, en el segundo caso *no residuos.*

Gauss empieza por dar la notación de congruencias que es la misma que se usa actualmente, $b \equiv \mathrm{c}\ (mod\ a)$; introdujo la aritmética modular con la relación $\equiv$, análoga al álgebra usual en los números enteros expresada en el lenguaje de la igualdad. Algunas, pero no todas las reglas del álgebra usual se pueden aplicar a la nueva situación. Por ejemplo en el álgebra usual, en el anillo de los números enteros, si $ax = ay$, con $a \neq 0$, entonces, se deduce que $x = y$, pero esta ley de cancelación no se cumple para las congruencias, como se puede verificar: si $a = 3$, $x = 4$ e $y = 7$, se tiene que $3 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 7 (mod. 9)$, pero no es cierto, dado que $4 \equiv 7 (mod. 9)$.

En $ax \equiv ay\ (mod\ m)$ el divisor $a$, se puede cancelar en una congruencia siempre que sea primo relativo con el módulo. Por otra parte, si se tiene $x \cdot y = 0$ se puede deducir en álgebra ordinaria que: $x$ o $y$ (o ambos) son cero. Lo anterior no es el caso para las congruencias por ejemplo, $6 \cdot 5 \equiv 0(mod. 15)$, pero ni 6 ni 5 es congruente con cero módulo 15. Para que sea válida esta regla para congruencias, el módulo y los factores $x$ e $y$ deben ser primos entre sí.

Otro caso es la ecuación general de primer grado $ax = b$, con $a, b, x$, enteros y $a \neq 0$, tiene una solución como máximo. Al contrario, en una congruencia lineal se pueden dar varias soluciones distintas, la congruencia $6x \equiv 15(mod. 9)$, tiene las soluciones $x = 1, x = 4, x = 7$; Sólo si $a$ y $m$ son primos entre sí se puede asegurar que $ax \equiv b(mod. m)$ tendrá una y sólo una solución menor que $m$.

En la segunda sección, la cual trata sobre las congruencias de primer grado, proporciona los teoremas preparatorios sobre los números primos, factores, etc., contiene teoremas como los de los siguientes artículos $13, 14$ (Gauss, 1801, pág. 13):

> **Teorema**: el producto de dos números positivos, más pequeños que un número primo dado, no puede dividirse por este número primo.
> **Teorema**: si ni $a$ ni $b$ pueden dividirse por un número primo $p$, tampoco el producto ab puede dividirse por $p$.

Y el artículo $15$:

> Si ninguno de los números $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}$, etc., puede dividirse por un número primo p, tampoco puede dividirse por p el producto abcd etc.
> Según el artículo anterior, $ab$ no puede dividirse por $p$; tampoco $abc$, ni $abcd$, etc.

En el artículo 16 se indica de forma clara el Teorema Fundamental de la Aritmética y su demostración, la cual se considera es la primera prueba completa de este teorema (Gauss, 1801, pág. 14):

> **Teorema**. Cualquier número compuesto puede resolverse en factores primos de una manera única.

> **Demostración**: Que cualquier número compuesto pueda resolverse en factores primos, resulta de consideraciones elementales, pero esta supuesto tácitamente, y en general sin demostración, que no puede hacerse de muchas maneras diferentes.

> Supongamos que algún número compuesto $A$, que es igual a $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ etc., donde $a, b, c,$ etc. denotan números primos diferentes, es resoluble en factores primos de otra manera.
> Primero, es claro que no puede aparecer en este segundo sistema de factores ningún otro primo más que $a, b, c,$ etc. puesto que ningún otro primo puede dividir a $A$, el cual está compuesto de estos primos. De forma semejante, ninguno de los primos $a, b, c,$ etc. puede estar ausente del segundo sistema de primos, puesto que si no, no podría dividir a $A$ (artículo anterior). Así, estas dos resoluciones en factores pueden ser diferentes solamente si un primo aparece más veces en una resolución que en la otra. Sea $p$ un tal primo que aparece $m$ veces en una resolución, y $n$ veces en la otra, y tal que $m > n$. Al disminuir en $n$ el número de factores $p$ en cada sistema, quedarán $m - n$ factores $p$ en un sistema mientras que no quedara ninguno en el otro. Esto es, tenemos dos resoluciones en factores del número $\frac{A}{p^n}$. El que una de ellas no contenga al factor $p$ mientras que la otra lo contenga $m - n$ veces contradice lo que acabamos de demostrar.

Los autores anteriores ya habían demostrado la existencia del TFA, pero, ninguno había hecho referencia a la unicidad, Gauss en su demostración se enfoca en demostrar que la factorización es única y hace énfasis en que esto se considera cierto, empero, que no existe una demostración sobre ello.

Hacia el final de las *Disquisitiones* Gauss incluye el primer descubrimiento matemático importante que había hecho, es decir, la construcción del polígono regular de 17 lados, lo que lo lleva a demostrar cuales de los infinitos polígonos regulares posibles se pueden construir con regla y compás y cuáles no. Gauss afirma en las *Disquisitiones,* la cuestión acerca de si es posible construir un polígono regular de $257$ o de $65.537$ con métodos euclideos, al demostrar que un polígono regular de $N$ lados puede construirse con regla y compás, si y sólo si el número $N$ es de la forma $\mathrm{N} = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_r$, con $m > 0$ y $p_1, p_2, \dots, p_r,$ primos de Fermat distintos. Sin embargo, Gauss no dio respuesta al problema de sí ¿es finito o infinito el número de primos de Fermat? De modo que, es posible que solo haya cinco y sólo cinco polígonos regulares construibles de un número primo de lados, dos de ellos conocidos ya en la antigüedad y los tres que descubrió Gauss.

Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852), profesor de matemáticas en Berlín, añadió una nueva conjetura sobre números primos a la teoría de números, al exponer la hipótesis, no comprobada hasta hoy, de que todos los números de la forma $2^2 + 1$, $2^{2^2} + 1$, $2^{2^{2^2}} + 1$, $2^{2^{2^{2^2}}} + 1$, etc., son primos. La distribución de los primos ha ejercido una verdadera atracción sobre muchos matemáticos. En $1845$, cuando Gauss ya se encontraba en una edad avanzada, el profesor de París, Joseph L. F. Bertrand (1822-1900), conjeturó que si $n > 3$ entonces existe al menos un número primo entre $n$ y $2n$ (o, más exactamente, $2n - 2$ inclusive). Esta conjetura, conocida como el *postulado de Bertrand*, fue demostrada en $1850$ por Pafnuti Tchebycheff (1821-1894) de la Universidad de San Petersburgo.

# 3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS IDENTIFICADOS EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Al realizar el recorrido histórico del TFA desde Euclides hasta Gauss, es notorio que el tema de los números primos, ha sido de interés para varios matemáticos, debido al misterio que estos números presentan dentro de la teoría de números.

En la descripción Histórica Epistemológica del Teorema Fundamental de la Aritmética se evidencia la presencia de ciertos obstáculos epistemológicos, como ya se mencionó en el marco teórico, son conocimientos que han obstaculizado el desarrollo de las matemáticas o simplemente conocimientos inadecuados y nociones que han sido aceptadas por la mayoría de matemáticos de la época, los cuales se han generado a razón de especular sobre los números primos y sus particularidades; reconocer el origen de dichos obstáculos epistemológicos, revela donde y en qué momentos es probable que se presenten los errores cuando se enseñan los temas relevantes del Teorema.

A continuación se describirán dichos obstáculos. Entre los obstáculos que surgieron a raíz de formular el TFA y su demostración, se encuentran: la primalidad de 1, la unicidad del TFA, el orden o la distribución de los números primos.

## 3.1 La primalidad de 1

El papel que jugó el número 1 en el desarrollo del TFA: en Euclides el número 1 era denominado como la unidad, a partir de la cual se originaban los demás números; la exclusión del 1 como número se debe a que desde los antiguos griegos y por un largo tiempo el 1 no era considerado un número, por ello, no se hacía referencia a la primalidad de 1. Asunto que tuvo lugar a partir de la redefinición de la unidad como un número, se considera que Simón Stevin fue quien entendió el papel del concepto de número y la necesidad de tratar la unidad como número. A partir de ese instante se hacía razonable preguntarse si el 1 era un primo o no; aunque es claro que por convención matemática se estableció el 1 como un número, que no es primo, ni compuesto. Sin embargo, este tema deja la duda y causa confusión, debido a que si por definición se considerara el uno primo, no se cumpliría la condición de unicidad de la factorización en primos, que es parte fundamental del teorema.

En la enseñanza puede presentarse este obstáculo a la hora de enseñar la factorización en factores primos, debido a que se realiza a partir de varios métodos: arboles de factores, divisiones sucesivas en donde al final el estudiante se le dice que obtendrá los números primos y en algún momento aparecerá el 1, se dice que los demás son primos salvo el 1, sin dar una razón. Es usual que para dar una explicación acertada de un objeto matemático referirse a la definición, aunque esto puede dejar abierta la posibilidad de que el estudiante con la definición de número primo considere el 1 uno de estos números.

### 3.2 La unicidad del TFA

Otra de las cuestiones problemáticas al abordar el TFA, fue la falta de atención proporcionada a la cuestión de la unicidad de la factorización en números primos, esto debido a que no era el tema de interés, sino el de encontrar todos los divisores de un número, y la manera de realizarlo es a través del TFA, por lo que se utilizaron factorizaciones sin preguntarse si estas eran únicas, o por otro lado no veían la necesidad de demostrar la unicidad por ser evidente.

Euclides no contaba con la notación y el vocabulario adecuado para indicar el teorema completo, no obstante considero una parte de la propiedad de unicidad, mientras que otros matemáticos, entre ellos Euler y Legendre que poseían la notación, admitieron la parte de la unicidad del teorema sin cuestionar, ni demostrar, probablemente, porque para ellos esta condición de unicidad era evidente. Por lo tanto la propiedad de unicidad tiende a ser considerada obvia, lo que hace que pierda importancia. Llama la atención que como se mencionó anteriormente, si el 1 fuese primo la condición de unicidad se perdería totalmente, debido a que la descomposición ya no sería única y el teorema quedaría invalidado.

### 3.3 El orden o la distribución de los números primos

Otro aspecto que puede ser considerado es el orden o la distribución de los números primos en el conjunto de los números naturales. Todo matemático que se interese por los números primos se encuentra con la dificultad de no saber cuál va a ser el próximo número primo, como si puede saber cuál va a ser el $n-\acute{e}simo$ número par o impar, por ejemplo.

Varias conjeturas y teoremas de la teoría de números dependen de la cantidad de números primos, el hecho de no poseer una fórmula que proporcione a todos los números primos ha retrasado el avance de las matemáticas, hasta el momento no se ha encontrado una fórmula que genere los números primos, como ya se menciono hay una fórmula para saber cuántos números primos se encuentran hasta un número dado $n$.

Estos resultados revelan que en el desarrollo histórico del TFA, el cual se basa en los números primos, surgieron limitaciones; que tuvieron lugar durante un prolongado periodo de tiempo, estas dificultades pueden seguir siendo replicadas por parte de los docentes y estudiantes a la hora de enseñar y aprender el concepto. Si bien es cierto, que las nociones modernas de números enteros, números primos y factorización única son presentadas como acabadas, no hay que dejar de lado la historia que hay detrás de una noción matemática, historia que ayuda a entender los procesos.

# 4 CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES

Con base en los obstáculos identificados se diseñó un seguimiento (cuestionario) para identificar las concepciones de los profesores de Educación Básica, que comprende los grados de primero a noveno, respecto al TFA, además se tuvieron en cuenta las preguntas presentadas en el trabajo de López y Cañadas (2013), del tipo: ¿Qué conocimientos previos deben tener los estudiantes para comprender el TFA?, ¿el 1 es primo? También, las consideraciones de Zazkis y Liljedahl (2004, pág. 169), sobre la comprensión del concepto de un número primo que debe poseer un profesor lo cual incluye al menos lo siguiente:

> a) La conciencia de que cualquier número natural mayor que 1 es o primo o compuesto y la capacidad de citar y explicar la definición de un número primo;
> b) Entender que si un número es representado como un producto este es compuesto a menos que los factores sean el 1 y un primo; y
> c) La conciencia de que los números compuestos tienen una descomposición prima única y que el número de primos es infinito (aunque no necesariamente la capacidad de proporcionar una demostración matemática formal para estas afirmaciones).

## 4.1 Población objeto de estudio

La población objeto de este estudio está constituida por una muestra representativa de 21 docentes de la ciudad de Santiago de Cali, de los cuales 7 enseñan en la Universidad del Valle en el proyecto de Semilleros de Ciencias y los otros 14, de diferentes colegios privados y públicos. Aunque, el trabajo se enfoca en los profesores de Educación Básica, esta muestra proporciona un análisis acerca de las diferencias que se pueden encontrar entre los dos contextos en los que laboran los docentes.

En total fueron entrevistados 13 profesores y 8 profesoras, la mayoría de ellos, culminó su Educación Superior en una universidad pública (Universidad del Valle y uno en la Universidad del Cauca), y los demás en universidades privadas (Universidad San buenaventura, Santiago de Cali, Universidad Libre) y una profesora en la Normal Superior Santiago de Cali-Formación Complementaria. En esta muestra se encuentran profesores que enseñan desde el grado primero de primaria hasta el grado once, y en la universidad. Con relación al tiempo de experiencia laboral en el ámbito educativo, se separó en dos grupos, dado que, los valores estaban demasiado separados los unos de los otros, en el primer grupo de 6 profesores el promedio fue de 21 años de experiencia y en el grupo de 15 el promedio fue de 3 años de experiencia.

## 4.2 Instrumento

Para recolectar la información se diseñó un cuestionario (ver anexo 2) que según Hernández, Fernández y Baptista (1998) "consiste en un conjunto de preguntas respecto a una o más variables", con un total de 14 preguntas, de tipo abiertas, dado que no contenían categorías o alternativas de respuesta delimitadas, no se presentó a los sujetos las posibilidades de respuesta, sin embargo, ya se conocían las posibles respuestas a las preguntas. Se optó por preguntas abiertas, ya que, estas proporcionan información adicional acerca de las concepciones sobre algunos aspectos de la teoría de números, como el TFA y los números primos, cuál es el dominio de estos conocimientos por parte de los docentes de Educación Básica, si es claro en qué temas de matemáticas se utiliza y cómo utilizarlos.

La construcción del cuestionario se basó en los obstáculos epistemológicos, identificados en la historiografía del TFA, en el cual se definieron cuatro etapas para la construcción de las preguntas: Contextualización, valoración del conocimiento de los números primos, Teorema Fundamental de la Aritmética, implicaciones del TFA en la enseñanza.

## 4.3 Objetivo de las preguntas en cada etapa

### 4.3.1 Contextualización

Estas preguntas permiten ubicar en contexto al docente, determinar si éstos se han cuestionado sobre el concepto de número, por otro lado revisar si tienen en cuenta el desarrollo histórico del concepto de número y la importancia que tiene su conocimiento. A partir de allí establecer las nociones sobre número que los docentes han adoptado.

### 4.3.2 Valoración del conocimiento de los números primos

Estas preguntas permiten conocer la definición de número primo adoptada por el docente, y valorar el conocimiento del docente acerca de las propiedades de los números primos, así como también el conocimiento sobre su desarrollo histórico. Si reconocen el hecho de que los números primos son infinitos, los campos numéricos donde se aplica el concepto de número primo e históricamente cómo surge la noción de número primo.

### 4.3.3 Conocimiento del Teorema Fundamental de la Aritmética

Determinar el conocimiento de los docentes acerca del TFA, en este sentido puede explicitar lo que enuncia el TFA, y exponer algún tipo de prueba sobre ello.

### 4.3.4 Implicaciones del Teorema Fundamental de la Aritmética en la enseñanza

Estas preguntas están relacionadas con la enseñanza del TFA en la escuela, indagar cuál es el nivel de apropiación que tienen los docentes sobre el concepto de número primo, si manifiestan un reconocimiento acerca de la importancia del concepto de número primo, las aplicaciones del TFA, cuándo y por qué debe enseñarse. El objetivo es que el docente reflexione sobre la importancia de este teorema en las matemáticas escolares, y reconozca las muchas situaciones en las que se necesita conocer el TFA.

## 4.4 Categorías de análisis

Para el análisis de las respuestas proporcionadas por los profesores se utilizan cuatro categorías, que están acordes con las etapas antes mencionadas, las preguntas se agruparon según algunos criterios en cada categoría. Las preguntas y criterios (**C**) que corresponden a cada categoría son las siguientes:

### 4.4.1 Categoría 1: Desarrollo histórico del concepto de número

En esta categoría, en la redacción de las preguntas se intentó dar una parte como información y al final hacer las preguntas con respecto a esa información.

**Pregunta 1**: En el libro VII de los *Elementos*, Euclides define número como “una pluralidad compuesta de unidades”. ¿Considera que esta noción de número aún tiene vigencia? ¿Se adapta al concepto de número real?
Se presentó como información la definición de número de los *Elementos* de Euclides y se pidió a los docentes encuestados decidir si esta definición aún tiene vigencia y se adapta al concepto de número real. En la redacción de la pregunta no se menciona una definición formal de número real. La definición de número del libro VII de los Elementos Euclides **no** se adapta al concepto de número en general, debido a que, en esa época los números hacían referencia a los naturales.
**C:** Esta pregunta fue elegida para revelar si los docentes poseen algún conocimiento acerca del desarrollo histórico del concepto de número. Por otro lado, la respuesta proporcionada a esta pregunta, permite determinar si las concepciones de los docentes se asemejan más a concepciones epistemológicas, que como se menciono en el análisis de concepciones son aquellas que se han mantenido durante determinado periodo histórico, en este caso la concepción de número de los matemáticos griegos, o a concepciones subjetivas que han creado a lo largo de su formación académica.

**Pregunta 2**: Para los antiguos griegos, el cero no era considerado un número, lo cual les impidió desarrollar pensamiento algebraico. La incorporación del cero en el corpus teórico de las matemáticas se dio en el ambiente de los árabes.
**2a**. ¿Por qué el cero es un concepto fundamental para la matemática moderna?
**2b**. ¿Considera que actualmente el cero es un número natural?

**C:** Se busca conocer con más detalle si el docente tiene conocimiento de la historia de la matemática, haciendo referencia a la incorporación del cero, que tiene un lugar importante en la historia. En la respuesta a esta pregunta pueden verse las razones por las que los docentes consideran que actualmente el cero debería ser considerado un número natural. Presenta un argumento válido acerca del por qué el cero es un concepto fundamental en la matemática moderna.

**Pregunta 3**: En el libro VII de los *Elementos*, Euclides divide los números entre números primos y números compuestos. Euclides define número primo como "aquel número que sólo es dividido por la unidad¨. Considera que es una definición que puede ser adoptada en la actualidad.

**C:** La definición de número primo que aparece en el libro VII de los *Elementos* de Euclides **no** tiene vigencia en la actualidad, ya que falta considerar que el número debe tener exactamente dos divisores. Para Euclides, la idea de dividir tiene la connotación de restas sucesivas. Así, por ejemplo, la división entre el ocho y cuatro da dos, porque el proceso de restar a ocho cuatro se agot en dos pasos. Esta idea no se puede adoptar al mismo número porque no tendría sentido la resta del número por sí mismo, dado que no se da cabida al número cero.

### 4.4.2 Categoría 2: Conocimiento sobre el Teorema Fundamental de la Aritmética y los números primos

**Pregunta 4**: ¿Es el 1 un número primo? ¿Por qué?

**C:** En esta pregunta, se solicitó a los docentes decidir sobre la primalidad del número 1; ésta es una de las preguntas centrales, debido a que se ha determinado como una dificultad incluso para los matemáticos a lo largo de la historia. El número 1 por definición no es primo además de que si fuera primo invalidaría el TFA.

**Pregunta 5:** ¿Es el conjunto de los números primos, un conjunto infinito? ¿Por qué?

**C:** En esta pregunta, se pidió a los docentes responder al asunto de la infinitud de los números primos, para valorar que tanto conocen acerca de las propiedades de los números primos. Si reconoce que se requiere de una demostración y que no es suficiente asociar la infinitud de los números primos con la infinitud de los números naturales.

**Pregunta 6**: Enuncie, en sus propias palabras, el Teorema Fundamental de la Aritmética.

**C:** Se indaga si los docentes pueden enunciar el TFA, con énfasis en la unicidad de la factorización, dado que como se percibió en la historiografía muchos matemáticos pasaron por alto este detalle y como este tema es utilizado en la enseñanza de las matemáticas, no de forma explícita, se espera que los profesores lo conozcan o tengan alguna idea clara sobre ello.

**Pregunta 7**: ¿Cuál es la importancia del concepto de número primo en las matemáticas?

**C:** Reconocer los números primos como generadores de los números naturales, es decir, los números se pueden ver en términos de los números primos con respecto a la multiplicación; además de su importancia dentro de las matemáticas, en temas como la divisibilidad, la factorización, entre otros.

**Pregunta 8**: ¿Qué es lo más relevante del Teorema Fundamental de la Aritmética?

**C:** La descomposición única de un número dado en factores primos. Importancia del TFA en las matemáticas escolares, en procesos como la divisibilidad, para conocer todos los divisores de un número, MCM, MCD, mencionar algunas de sus aplicaciones externas como el uso en la criptografía.

### 4.4.3 Categoría 3: Enseñanza del Teorema fundamental de la Aritmética y los números primos en la escuela

**Pregunta 9**: ¿Por qué hay que enseñar la noción de número primo y en qué grado de escolaridad?

**C:** Para tener una mejor comprensión de los números, se deben conocer los números primos y sus propiedades, haciendo énfasis en el TFA, descomposición en primos y la unicidad de la descomposición. El grado de escolaridad en el que se debe enseñar el concepto de número primo, según el criterio de los docentes.

**Pregunta 10**: ¿Qué problemas hay con respecto a la enseñanza de los números primos?

**C:** Menciona algunos problemas que se le han presentado a la hora de enseñar la noción de números primos, para examinar qué problemas tienen relación con el desarrollo histórico.

### 4.4.4 Categoría 4: Aplicaciones y usos de los números primos

**Pregunta 11**: Considere el número $L = 13987 = 197 \times 71$ (donde 197 y 71 son números primos) y decida si $L$ puede ser divisible por $11, 13, 17, 31, y\ 53$.

**C:** Con esta pregunta se indaga acerca si los profesores tienen conocimiento del TFA, dado que, al proporcionar la descomposición del número 13987 en sus factores primos pueden decidir que no es divisible por ninguno de los números dados, sin necesidad de realizar cálculos.

**Pregunta 12**: Considere el número $M = 3^2 \times 5^5 \times 7$, decidir si es divisible por cada uno de los números $7, 5, 3, 2, 15, 11, 9$ y $63$.

**C:** Para esta pregunta examina si los profesores reconocen los factores implícitos y explícitos de la descomposición y decidir la divisibilidad del número $M$ sin conocer su valor.

**Pregunta 13**: Escribe todos los divisores posibles del número 121. Explique el procedimiento.

**C:** en general, según la experiencia, cuando pregunta acerca de si un número $n$ es primo, lo usual es probar con los números hasta el 10, por ello se decidió poner un numero que es divisible por 11, para saber si los profesores también tienen dicha tendencia.

**Pregunta 14**: ¿Para qué sirve conocer la descomposición de un número en sus factores primos?

**C:** esta pregunta esta direccionada hacia el conocimiento de encontrar todos los divisores de un número a partir de su descomposición.

Las preguntas anteriores están relacionadas con las aplicaciones del TFA, si dada la descomposición los docentes la utilizan para resolver estas cuestiones, si el docente tiene en cuenta que el conocer la descomposición en factores primos de un número le reduce cálculos, también permite reconocer si conocen el TFA.

## 4.5 Descripción de las respuestas obtenidas por los docentes

Se presentan las respuestas de los docentes respecto a las preguntas que aparecen en el cuestionario, se dan a conocer las tendencias, cantidad de docentes que responde a la pregunta, se exponen los argumentos de mayor frecuencia y la gráfica de cada respuesta. En la categoría 3, debido a que las respuestas a estas preguntas expresan la opinión de los docentes, solo se mencionan algunas de las afirmaciones de los docentes. Dado el contexto de los profesores se decidió ejemplificar algunas de las respuestas que tenían mayor tendencia, con extractos de los cuestionarios.

Para el caso de la categoría 1, se rastrearon las palabras o frases más repetitivas, de modo tal que, se observó cuál es la predominancia de ciertos conceptos en las respuestas del grupo de profesores encuestados.

### 4.5.1 Aspectos cualitativos de las respuestas de los docentes

**Categoría 1**

Para analizar las respuestas a las preguntas de la categoría 1, se tratará de tematizar las formas en que cada uno de los profesores respondió, luego se rastrearán las palabras o frases que son más repetitivas, a partir de este proceso se observará cuál es la predominancia de ciertos conceptos en las respuestas del grupo de profesores encuestados.

***Tabla 1 Respuestas textuales a las preguntas de la categoría 1***

| | **Preguntas Categoría 1** | | |
|---|---|---|---|
| **Profesores** | **¿Considera que esta noción de número de Euclides aún tiene vigencia? ¿Se adapta al concepto de número real?** | **¿Por qué el cero es un concepto fundamental para la matemática moderna? ¿Considera que actualmente el cero es un número natural?** | **¿Considera que la definición de numero primo de Euclides puede ser adoptada en la actualidad?** |
| 1 | Si, considero que el número es el símbolo utilizado para representar. | Si | Si teniendo en cuenta en cuenta que el numero primo también es dividido |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | por si mismo |
| 2 | Creo que sí, aunque el número generalmente se ve como una representación de la cantidad, es cierto que se puede observar como una composición de unidades. | Creo que el cero es fundamental porque es la representación del vacío, de la falta de elementos. Creo que es un numero **N,** porque ayuda a entender y a empezar un conteo desde el inicio de “algo”(conteo cantidades) | Si, desde siempre se ha trabajado este concepto y se puede seguir viendo como aquel número que solo se divide por la unidad y por él mismo. |
| 3 | Si, aún tiene vigencia | Porque el cero en algún momento puede representar alguna información en la que no hay cantidad. Como tal considero que no es natural porque no está dentro de los números positivos. | Si |
| 4 | Sí tiene vigencia porque un “número” es, una expresión de una cantidad con relación a su unidad; o un conjunto de signos. La teoría de los números agrupa estos signos en distintos grupos. | Si, el conjunto de los **N** incluye al 0. | No, en la actualidad un número primo tiene dos divisores la unidad y el mismo número. |
| 5 | Si | No, el cero es un número cardinal, que divide la recta numérica, por lo tanto el cero no es positivo ni negativo. | Si, anexándole que también el numero es divisible por si mismo. |
| 6 | Los elementos de Euclides son nuestro primer referente acerca de los números primos. | Sí, desde el punto de vista de los fundamentos lógicos de la matemática, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos el 0 se relaciona con el conjunto vacío y en la electrónica digital se encuentra el 0 como off en informática en todo de memoria qué de memoria que toca los bits están en off. | No responde. |
| 7 | Si | Hoy se puede considerar como número natural, pues conlleva a explicar la resta de cantidades iguales. | No, pues no explicaría que el número primo tienen dos divisores. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | Si, todavía tiene vigencia ya que considero que se debe tener un concepto previo para adaptarse a nuestro momento. | 0 si es número natural, ya que como otros números es indispensable para la formación de diferentes cifras. | No es considerado porque un número primo es aquel que se divide por el mismo y por el número, contrario a lo que dice Euclides. |
| 9 | No responde | No responde | No responde |
| 10 | No, faltan los números irracionales que son cantidades inconmensurables. | Permite incorporar las cantidades negativas. Además la importancia de la cantidad 0 en la teoría de módulos. Si consideramos operaciones como la suma de un elemento con su inverso es importante, podremos definir teoría de cuerpos como anillos y grupos. | Falta definir la división por el mismo. |
| 11 | No, porque el número está relacionado a una magnitud. | Para definir algunas de las operaciones básicas, por ejemplo la resta de unidades iguales. | En la actualidad se define como divisible por el mismo y la unidad. |
| 12 | Consideró que no, puesto que no se involucraría algunas características como lo es la densidad. | | Consideró que esta definición ya no se tendría, puesto que sabemos bien que un número natural n mayor que 2 es primos y sus únicos divisores son la unidad y el número y el mismo número en nuestra actualidad. |
| 13 | No, debido a la existencia de números irracionales. | Sí, porque representa la nación de “vacío”. | Si, esta definición puede ser útil. |
| 14 | La definición propuesta por los elementos no se adapta al conjunto de números reales actualmente, además dicha definición se sustentaba en el | A partir del cero se establecen propiedades fundamentales en el campo del álgebra moderna en espacios vectoriales entre otros campos de la | No, falta la condición de que el propio número también lo divide. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | conjunto de números que en ese momento se consideraban, dejando de lado por ejemplo el conjunto de los irracionales. | matemática. En la actualidad el 0 es un número natural. | |
| 15 | Es útil en vista que representa un acercamiento intuitivo a la idea de números naturales. Tiene vigencia desde el punto de vista de mostrar la evolución del concepto como tal. No creo que se adapte a la idea de número real debido a que los reales no se generan de forma recursiva como sí lo son los números naturales o los enteros. | Primero porque permite desarrollar el álgebra, área importantísima de las matemáticas, segundo, la inclusión del cero permite representar la no existencia de los elementos en un conjunto, así como cada número tiene una representación para la cantidad de elementos de un conjunto es "natural" representar una cantidad cuando no hay ninguno. Teóricamente hablando el cero es importante porque permite esquematizar las propiedades de los números además que sirve como puente para desarrollar los conjuntos numéricos.<br>Es necesario darle una mayor importancia a la idea de cero, primero desde el punto de vista de la realidad para luego tratarlo de forma abstracta. | Sí, es divisible por la unidad y por el mismo cumple con la idea de ser número primo, si sólo es divisible por uno no cumple ya que todos los números son divisibles por uno. |
| 16 | Esta noción no tiene vigencia si consideramos el conjunto de los números Reales. Esta noción es válida en el contexto de los números naturales, sólo para iniciar el proceso constructivo de los números reales. | El cero presenta connotaciones filosóficas y religiosas para los árabes. Para las matemáticas el concepto del número cero nos permite vislumbrar el elemento neutro para la operación suma en los reales visto como un cuerpo. Respecto a si el cero es un número natural Consideró que **<u>no</u>** es un número natural debido a que en la concepción operativa no se empieza a contar 0, 1, 2. | No, debido a que conceptualmente se pretende ver a un número primo como un número que sólo es divisible por la unidad y por el mismo. En este sentido operativo la definición de Euclides se queda corta. |
| 17 | Si, para los números naturales, con excepción del 1. | Sí, creo que el cero es necesario en la matemática moderna porque si se acepta | No, es verdadera, pero está incompleta, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | No, para números reales perdería la definición. | la unidad, por lógica matemática debe aceptarse la no existencia, es decir el cero (la negación). Los autores toman a un ambas posturas, el incluirlo o no. Yo considero por la misma razón anterior que sería lo mejor incluirlo en los naturales. | ya que le falta que sea mayor o igual a 2 y que sea divisible también por sí mismo, es decir, un número a que pertenece a N es primo si y sólo si es mayor a 1 y es sólo divisible por 1 y por el mismo. |
| 18 | No comprendo la pregunta en la totalidad, pero de acuerdo a la experiencia, consideró que no tiene vigencia puesto que si vemos los números reales desde una axiomática. | El 0 permite definir las operaciones de multiplicación y división. Si la necesidad de caer en un error en la teoría. Depende de la teoría el 0 es considerado como un número natural. | No, puesto que la definición de número primo es aquel que se divide entre uno y el mismo. |
| 19 | No Considero que aún tenga vigencia. En la época de Euclides la noción de número era aún muy limitada. En nuestros días en los números reales (e incluso los complejos) no tiene mucho sentido pensar que estos números están compuestos a partir de unidades, pues tenemos cantidades inconmensurables. | No responde | No, actualmente la definición de número primo es distinta. Para Euclides, según esta definición un número primo son nuestros números enteros. |
| 20 | No, pues no aplicaría para el uno o el cero si se llega a considerar como número. | Yo considero al cero como número natural, y es fundamental porque con base en esta noción se plantea muchas soluciones a teoremas y problemas cotidianos. | Sí, considero que aún se puede abordar así. |
| 21 | No se adapta ya que no todo número real se puede construir a partir de unidades. | Es fundamental ya que es necesaria una representación de la “nada” y en teorías matemáticas y operaciones como la suma es necesario un elemento invariante. | Creo que sigue siendo una definición valida, pero no la más precisa. |

**Pregunta 1: ¿Considera que esta noción de número de Euclides aún tiene vigencia? ¿Se adapta al concepto de número real?**

Teniendo en cuenta las expresiones utilizadas por los profesores para dar respuesta a la pregunta 1, se observa que existen diversas acepciones de los docentes acerca de si la noción de numero de Euclides tiene o no vigencia en la actualidad, por lo que se examinan las más repetitivas.

Las respuestas más comunes de los docentes que opinan que la definición de Euclides aún tiene vigencia son:

- El número es utilizado para representar.
- El número generalmente se ve como una como representación de la cantidad.
- No todos los números reales se pueden construir a partir de unidades.

Según las expresiones anteriores, los docentes entienden que el número es utilizado para indicar una cantidad, es decir, que representa cierto número de unidades, lo cual es una señal de que consideran que la definición de número dada por Euclides, sigue vigente y se ajusta a la de número natural. Otros profesores consideran igualmente que la definición de Euclides sigue vigente y se ajusta a la de número natural, lo indican con expresiones como:

- Esta noción es válida en el contexto de los números naturales.
- Los números naturales, con excepción del 1.
- Dicha definición se sustentaba en el conjunto de números que en ese momento se consideraban.
- En la época de Euclides la noción de número era aún muy limitada.

Para responder se apoyan en la definición de Euclides; cabe resaltar que algunos profesores consideran que la noción de número dada por Euclides es útil y que puede servir como referente para introducir el concepto de número, algunas de sus opiniones se muestran a continuación:

- Es útil en vista que representa un acercamiento intuitivo a la idea de números naturales.

- Para iniciar el proceso constructivo de los números reales.
- Tiene vigencia desde el punto de vista de mostrar la evolución del concepto como tal. No se adapta a la idea de número real.

Las frases de los profesores que respondieron que la noción de número de Euclides no se adapta al concepto de número real, se caracterizan por el uso de las siguientes expresiones:

- Faltan las cantidades inconmensurables.
- No se adapta ya que no todo número real se puede construir a partir de unidades.
- No, debido a la existencia de números irracionales.
- No, para números reales perdería la definición.

Usando estos términos, los docentes hacen referencia a que la definición de Euclides no puede adaptarse al concepto de número real, debido a que no se incluiría a otro tipo de números, como los racionales, irracionales que pertenecen al conjunto de los números reales.

Las razones que aparecen aisladas son:

- No tiene vigencia si vemos los números reales desde una axiomática.
- No se involucraría algunas características como lo es la densidad.
- Los Reales no se generan de forma recursiva como sí lo son los números naturales o los enteros.

Las afirmaciones anteriores se asocian con la comprensión de los docentes sobre el concepto de número y las propiedades de los números reales.

**Pregunta 2a ¿Por qué el cero es un concepto fundamental para la matemática moderna?**

Las expresiones y términos más regulares entre las respuestas de los profesores acerca de la contribución del cero a la matemática moderna, son las siguientes:

- Representa la noción de “vacío”
- Representar alguna información en la que no hay cantidad.
- Se relacionan con el conjunto vacío.
- El elemento neutro para la operación suma.
- La inclusión del 0 permite representar la no existencia de los elementos en un conjunto.
- Representar una cantidad cuando no hay ninguno.
- La no existencia.
- Es necesaria una representación de la “nada”

Se evidencia que la mayoría de docentes están convencidos de que el cero es un elemento fundamental para la matemática, debido a las funciones que desempeña al establecer propiedades y definir operaciones, así como también en la formación de cifras, en la resta de unidades iguales, y como representación del vacío.

Otras respuestas escritas por parte de los profesores, que se consideran más precisas, dado que no dan lugar a ambigüedades son las siguientes:

- Si consideramos operaciones como la suma de un elemento con su inverso es importante.
- Permite esquematizar las propiedades de los números.
- Conlleva a explicar la resta de cantidades iguales.
- Aunque existan distintas posturas acerca del cero como un número natural.

**Pregunta 2b ¿Considera que actualmente el cero es un número natural?**

Con respecto a la pregunta de la inclusión o no del cero al conjunto de los números naturales, se reúnen las respuestas más usuales entre los docentes que ciertamente consideran que es un número natural o consideran que es ideal tratarlo como tal.

- Sí el conjunto de los números naturales incluye al cero.
- Creo que es un número natural, porque ayuda a entender y a empezar un conteo desde el inicio de “algo”.
- Sería lo mejor incluirlo en los naturales.

- El 0 es considerado como un número natural.
- El cero es un número natural y es fundamental porque con base en esta noción se plantean muchas soluciones a teoremas y problemas cotidianos.
- Hoy se puede considerar como un número natural.
- En la actualidad el 0 es un número natural.

**Pregunta 3 ¿Considera que la definición de número primo de Euclides puede ser adoptada en la actualidad?**

La información que proporcionan los maestros para esta pregunta es la siguiente:

- Sí, teniendo en cuenta en cuenta que el número primo también es dividido por sí mismo.
- Solo se divide por la unidad y por él mismo.
- Sí, considero que aún se puede abordar así.
- Creo que sigue siendo una definición valida, pero no la más precisa.
- Si, esta definición puede ser útil.
- En la actualidad se define como divisible por el mismo y la unidad.
- Sus únicos divisores son la unidad y el número y el mismo número.

Se extrae de estas expresiones utilizadas por los docentes de la definición de Euclides y la definición actual de número primo han sido utilizadas juntas, para tratar de dar mayor precisión a la definición, de ahí que se opte por decidir que la definición de número primo de Euclides puede ser adoptada en la actualidad. Estas repuestas nos indican que los docentes consideran la definición de Euclides como punto de partida, que se ha complementado con la definición actual de número primo.

**Categoría 3** *Enseñanza del Teorema fundamental de la Aritmética y los números primos en la escuela*

*Tabla 2 Respuestas textuales a las preguntas de la categoría 3*

| **Profesores** | **¿Por qué hay que enseñar la noción de número primo y en qué grado de escolaridad?** | **¿Qué problemas hay con respecto a la enseñanza de los números primos?** |
|---|---|---|
| 1 | Para conocimiento de que no todos los números tienen otros divisores. Se debe enseñar en tercero. | No responde. |
| 2 | Es importante enseñar la noción de número primo, debido a la necesidad encontrar los divisores de un número y sus criterios. Creo que cuarto sería el grado apropiado. | Aprendizaje de los criterios de divisibilidad. |
| 3 | Para entender que hay relaciones numéricas, creo que a partir del grado tercero. | No responde. |
| 4 | Se enseña desde tercer grado cuando ven los divisores; el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor. | No se le da importancia porque no se le halla sentido, es un concepto más. |
| 5 | Se debe enseñar el concepto de número primo en el grado quinto, ya que nos permite introducir el concepto de divisor y factor. | Se presentan problemas con respecto a la enseñanza de los números primos, por los criterios de divisibilidad y más aún si hay carencia de las tablas de multiplicar. |
| 6 | Los números primos se ven en la economía, se usan en computación factorización de expresiones algebraicas. Se enseña en el grado cuarto y quinto se refuerzan en el grado sexto. | Dificulta al descomponer un número se olvidan las tablas de multiplicar. |
| 7 | Porque es fundamental para la división exacta y se debe enseñar desde sexto grado. | Que el estudiante sepa dividir de manera exacta. |
| 8 | Tercero de primaria. | No responde. |
| 9 | Se enseña para el momento de realizar una división sea más fácil resolverla. Se enseña en cuarto y quinto. | No responde. |
| 10 | Es para que el estudiante conozca las diferentes propiedades que hacen algunos números diferentes e importantes. | No responde. |
| 11 | Porque hace parte de la noción de divisibilidad, se enseña en cuarto de primaria. | El lograr determinar cuándo un número es divisible por otro. |
| 12 | La noción de número primo se enseña en el primer año de bachillerato. La noción de primo se debe enseñar porque a partir de ella se define otros conceptos. | El mayor problema dificultad es que alrededor de ellas están otros conceptos como potenciación, división, etc. |
| 13 | Es importante porque el buen uso de las Matemáticas parte | Se presentan de una manera muy abstracta. |

| | | |
|---|---|---|
| | de conocer muy bien las características y propiedades de los números. | |
| 14 | En cuarto y quinto de primaria se debería enseñar para que los chicos exploren las diferentes propiedades de este conjunto y puedan aplicarlo a situaciones con ellos. | Generalmente los niños no diferencian fácilmente los números primos y más aún cuando este número es grande. |
| 15 | La idea es mostrar que hay números compuestos y no compuestos. La verdad no tengo idea sobre cuál debe ser el punto de partida para los números primos. | La idea de división vista como simplificación.<br>El conocimiento explícito de que los números son primos cuáles no.<br>La idea de división. |
| 16 | En el mundo moderno la gran mayoría de la teoría de códigos, la criptografía y por el gozo del espíritu humano. Desde el grado quinto y cuarto. | La modalidad, parece que los números primos se presentan aislados. Se deberían de enseñar los criterios de divisibilidad. |
| 17 | Es importante porque si se entiende la noción del número primo se pueden entender cualquier número, ya que todo se puede expresar en términos de ellos. Se deben enseñar de cuarto grado de primaria y se debe reforzar en los años consecutivos. | Los estudiantes vienen con problemas respecto al saber dividir.<br>No se entiende su utilidad sólo se aprende el algoritmo. |
| 18 | Es importante esta noción para realizar por ejemplo suma y resta de fracciones con diferente denominador y se debe enseñar desde quinto de primaria. | Adición y sustracción de fracciones con diferente denominador. |
| 19 | La noción de número primo es importante pues es requisito pues es requisito de nuevos conceptos. Dicho concepto puede ser enseñado en sexto. | No trabajo en colegio, pero supongo, que queda débil el concepto. Toca hacer más énfasis en la idea de la definición, pues cuando llegan a la universidad muchas veces no la recuerdan. |
| 20 | Porque es bueno que los jóvenes sepan sobre los números que pueden expresar cualquier otro número. Debería ser enseñado en primaria | Hay problemas con los profesores, ya que esto sólo se preocupan por cumplir, el decir, por lo general les basta con mencionarlos y no con introducirlos más con su importancia. |
| 21 | Es esencial como un principio a futuras técnicas de factorización y simplificación. El grado puede ser desde un segundo o tercero de primaria después de entender las propiedades de la multiplicación. | El problema de entender el concepto de que son infinitos y que no hay una forma sencilla de determinarlos a todos. |

**Pregunta 9:** ***¿Por qué hay que enseñar la noción de número primo y en qué grado de escolaridad?***

Los profesores conciben la importancia de enseñar el concepto de número en la escuela, debido a que, permite entender las relaciones de divisibilidad. Y a partir de ella se definen nuevos conceptos. De acuerdo con expresiones como las siguientes:

- Conocimiento de que no todos los números tienen otros divisores.
- La necesidad de encontrar los divisores de un número y sus criterios.
- Los divisores; el mínimo común  múltiplo y el máximo común divisor.
- Introducir el concepto de divisor y factor.
- Fundamental para comprender la división exacta.
- Hace parte de la noción de divisibilidad.
- Se debe enseñar porque a partir de ella se define otros conceptos.

Los profesores señalan que se debe prestar una atención especial a los números primos, debido a que el estudio de estos números permite que los estudiantes conozcan algunas de las propiedades que caracterizan a los números naturales.  A continuación se mencionan algunas de las razones de los profesores acerca del por qué hay que enseñar la noción de número primo:

- Para que el estudiante conozca las diferentes propiedades que hacen algunos números diferentes e importantes.
- Es importante porque si se entiende la noción del número primo se pueden entender cualquier número, ya que todo se puede expresar en términos de ellos
- Es bueno que los jóvenes sepan sobre los números que pueden expresar cualquier otro número.
- Exploren las diferentes propiedades de este conjunto y puedan aplicarlo a situaciones.
- Es importante porque el buen uso de las Matemáticas parte de conocer muy bien las características y propiedades de los números.

Otras razones dadas por los profesores que aparecen independientes, es decir que no se encuentran de forma consistente, pero que de igual forma es importante que sean mencionadas son las siguientes:

- Los números primos se ven en la economía, se usan en computación, en factorización de expresiones algebraicas.
- Es importante esta noción para realizar suma y resta de fracciones con diferente denominador.
- Es esencial como un principio de futuras técnicas de factorización y simplificación.
- En el mundo moderno la gran mayoría de la teoría de códigos, la criptografía y por el gozo del espíritu humano.

Las expresiones anteriores, cobran importancia, ya que los docentes identifican que los primos no solo se relacionan con temas que se abordan en la primaria, sino también con temas que se trabajan en secundaria, así mismo con cuestiones de la vida cotidiana y también relaciones las múltiples aplicaciones que tienen.

En la pregunta acerca de los grados de escolaridad, la gran mayoría de los profesores están de acuerdo en que se deben enseñar desde básica primaria, hay diversidad acerca de cuál sería el grados ideal, algunos consideran que se deben abordar desde los grado 3°, se mencionan también que en los grados 4° y 5° con mayor frecuencia, y se propone que deben ser reforzados en los grados siguientes. Con esto se muestra diversidad entre las opiniones de los docentes acerca del grado de escolaridad en el que se abordan los números primos, según la revisión en los estándares básicos de competencia de matemáticas, los estudiantes debe aprender las relaciones de divisibilidad en la primaria grado tercero, de ahí que esta respuesta era de las más esperadas.

**Pregunta 10: ¿Qué problemas hay con respecto a la enseñanza de los números primos?**

Con respecto a los problemas que se presentan en la enseñanza de los números primos, las respuestas más comunes de los profesores fueron:

- Aprendizaje de los criterios de divisibilidad.
- La dificultad al descomponer un número, se olvidan las tablas de multiplicar.

- Problemas respecto al saber dividir.
- Alrededor de ellas están otros conceptos como potenciación, división, etc.
- El problema de entender el concepto de que son infinitos y que no hay una forma sencilla de terminarlos a todos.
- Generalmente los niños no diferencian fácilmente los números primos y más aún cuando este número es grande.

Por otro lado, los profesores reconocen que se debe dar mayor énfasis a los números primos, pues solo se enseña la definición y no se va más allá, textualmente:

- No se le da importancia porque no se le halla sentido, es un concepto más.
- Queda débil el concepto. Toca hacer más énfasis en la idea de la definición.
- Por lo general les basta con mencionarlos y no con introducirlos más con su importancia.
- Se presentan de una manera muy abstracta.

### 4.5.2 Análisis cuantitativo de las respuestas de los docentes

***Pregunta* 1**: El 57% de los profesores responden que aún tiene vigencia la noción de número de Euclides, mientras que el 38% de los profesores contestaron que **no** tiene vigencia, y un 5% no presentan ninguna respuesta.

El argumento común presentado por los profesores es que no tiene vigencia, debido a que la definición no incluye las cantidades inconmensurables, los irracionales.

***Figura 4.1 Vigencia de la noción de número de Euclides***

El significado de número de los griegos se ajusta a los números naturales excluyendo al cero y al uno, sin considerar otro tipo de número, como los números Irracionales, entre otros. Algunos de los docentes encuestados consideran que esa es la razón por la cual la definición de número del libro VII de los *Elementos* Euclides no se adapta al concepto de número real. Doce profesores contestaron que no tiene vigencia la definición, y los docentes que respondieron de acuerdo a lo planteado pertenecen al proyecto Semillero de Ciencias, mientras que los demás profesores de colegios, responden que esta definición aún tiene vigencia aceptando la definición, en algunos casos sin presentar ninguna razón.

***Figura 4.2 Respuesta de un profesor de colegio público (primaria, grado segundo)***

En el libro VII de los *Elementos*, Euclides define número como "una pluralidad compuesta de unidades". ¿Considera que esta noción de número aún tiene vigencia? ¿Se adapta al concepto de número real?

Sí, aún tiene vigencia.

No presenta argumento, parece adoptar esta definición admitiendo una concepción epistemológica.

Una de las respuestas que también fue emitida por varios maestros de colegio es que el número es una representación de la cantidad, y de esta manera puede ser visto como lo define Euclides.

***Figura 4.3 Número como representación de una cantidad***

Creo que sí, aunque el número generalmente se ve como la representación de una cantidad, es cierto que se puede observar como una composición de unidades.

***Figura 4.4 Semillero de Ciencias (Secundaria, grados 6 a 9):***

Es útil en vista que representa un acercamiento intuitivo a la idea de números naturales. Tiene vigencia desde el punto de vista de mostrar la evolución del concepto como tal.

No creo que se adapte a la idea de número real debido a que los reales no se generan de forma recursiva como sí lo son los naturales o los enteros.

La justificación presentada privilegia el uso de la historia de las matemáticas y plantea que esta puede ser usada como un acercamiento para dar a conocer la evolución de los conceptos. Su respuesta es que no se adapta al concepto de número real.

***Figura 4.5 Relación números irracionales***

**En el libro VII de los *Elementos*, Euclides define número como "una pluralidad compuesta de unidades". ¿Considera que esta noción de número aún tiene vigencia? ¿Se adapta al concepto de número real?**

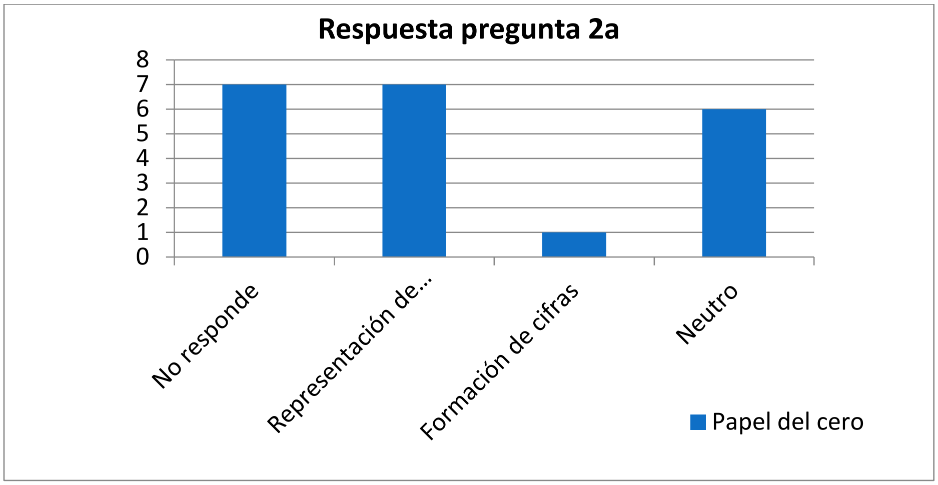
No, debido a la existencia de números irracionales.

La anterior es otra respuesta que fue común entre los profesores de Semilleros argumentan que no se adapta al concepto de número real debido a que, no incluye la presencia de las cantidades inconmensurables, los números irracionales.

En general, los docentes utilizaban la información dada, tratando de complementar con sus conocimientos sobre el tema, proporcionando parte de sus concepciones, independientemente de si la respuesta es correcta o incorrecta. De allí que las descripciones suministradas por los docentes están sujetan a las concepciones que tienen sobre el concepto de número.

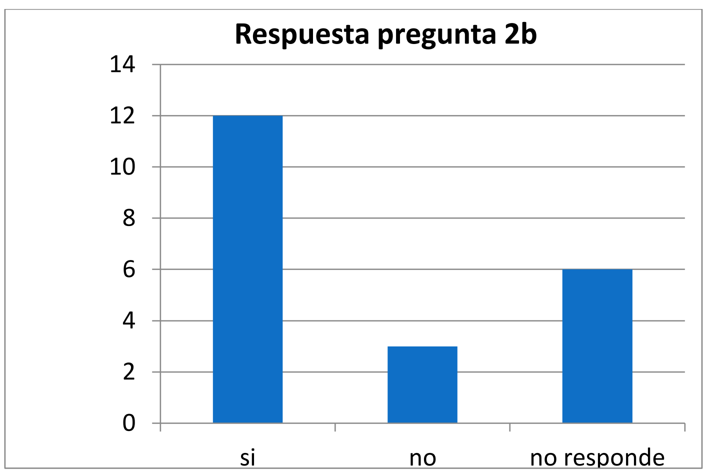
***Pregunta 2***: Respuestas relacionadas con la pregunta **2a** en relación con el papel del cero en la matemáticas, el 33% de los profesores contestaron que el cero es la representación de vacío, de la nada, 29% neutro, dentro de lo cual se enmarca la resta de unidades iguales, establecer propiedades y definir operaciones. El 5% considera que es indispensable para la formación de cifras y el 33% restante no responde. Es un porcentaje significativo que no da respuesta a la pregunta tal vez porque sus conocimientos o reflexiones acerca del número cero no han sido significativas, por ello no saben cómo contestar a la pregunta.

*Figura 4.6 Papel del cero*




Respuestas **2b:** Respecto a si el cero es un número natural, el 57% considera que el cero es un número natural, 14% no y el 29% no responde. La mayoría de los profesores considera que el 0 debe incluirse a los naturales.

*Figura 4.7 ¿el cero es un número natural?*




Como casos típicos en la respuesta de los docentes se han elegido los siguientes:

*Figura 4.8 Colegio público (Secundaria 6° y 7°):*

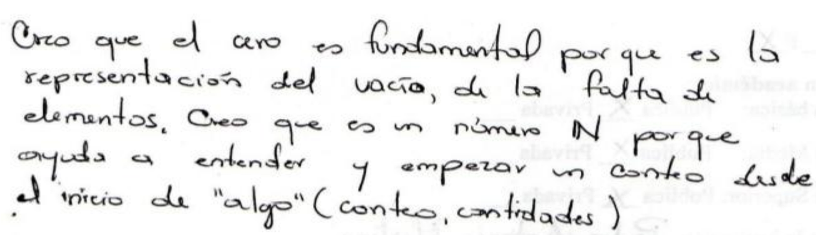
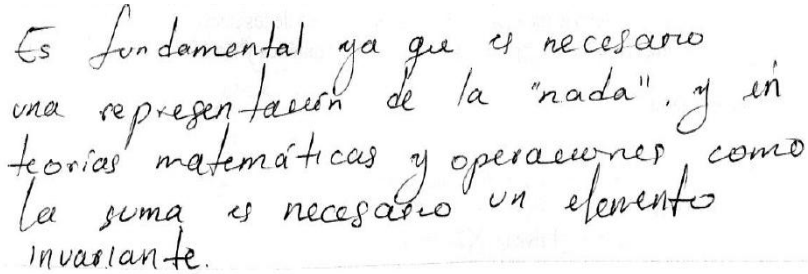

Creo que el cero es fundamental por que es la representación del vacío, de la falta de elementos. Creo que es un número N porque ayuda a entender y empezar un conteo desde el inicio de "algo" (conteo, cantidades)

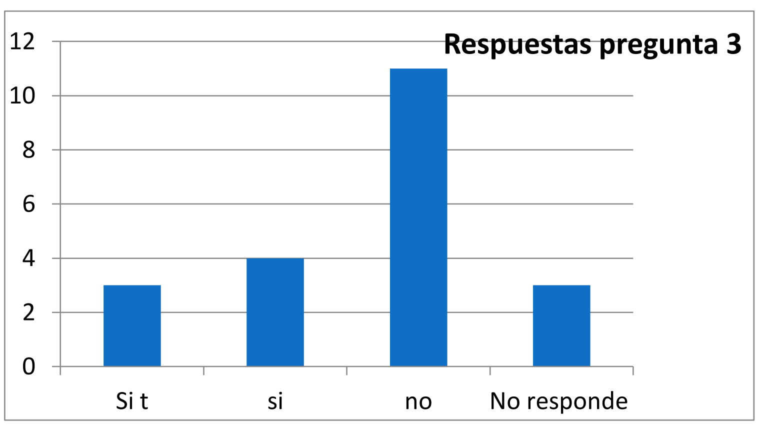
*Figura 4.9 Semillero de Ciencias (Secundaria):*


Es fundamental ya que es necesario una representación de la "nada", y en teorías matemáticas y operaciones como la suma es necesario un elemento invariante.

En ambos casos los docentes presentan argumentos válidos acerca del por qué el cero es un concepto fundamental en la matemática moderna, en general al revisar las respuestas a esta preguntas se observa esta tendencia.

***Pregunta 3**:* 14% de los profesores expresan que la noción de número primo de Euclides tiene vigencia agregando que también es dividido por sí mismo. Un 19% declara que aún tiene vigencia, 52% **no** tiene vigencia, el resto no responde a la pregunta. Entre los que contestaron que no tiene vigencia, argumentan que es debido a la definición actual de número primo, se consideran dos divisores.

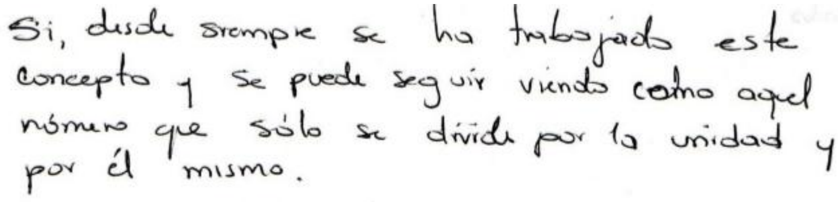
*Figura 4.10 Vigencia noción de número primo de Euclides*




En el gráfico anterior la notación: Si t, corresponde a la respuesta proporcionada de que sí tiene vigencia y que solo es necesario complementar la definición; es decir, que los números primos son aquellos que son divisibles por la unidad y por el mismo número.

Se presentan algunas de las respuestas tendencia entre los que contestaron que no tiene vigencia, y de los que optaron porque aún tiene vigencia.

*Figura 4.11 Colegio público*




A partir de esta pregunta y de las respuestas proporcionadas se puede evidenciar que al considerar el concepto de número primo de Euclides y la definición actual se presentan imprecisiones, dado que no se tiene en cuenta que para Euclides un número no se dividía a sí mismo, es decir, no se toma en cuenta la historia, por lo tanto los docentes deben estar atentos a este tipo de situaciones al abordar este concepto en la escuela.

Se extrae, además, de las expresiones utilizadas por los docentes que la definición de Euclides y la definición actual de número primo han sido utilizadas juntas, para tratar de dar mayor exactitud a la definición, de ahí que se opte por decidir que la definición de número primo de Euclides puede ser adoptada en la actualidad. Estas repuestas nos indican que los docentes consideran la definición de Euclides como punto de partida, que se ha complementado con la definición actual de número primo.

Las tres preguntas anteriores se encuentran dentro de la categoría desarrollo histórico del concepto de número, las cuales permitieron conocer las concepciones de los docentes sobre el concepto de número, de número primo, así como también, reconocer que el conocimiento sobre historia de las matemáticas que poseen los docentes es breve y requiere más atención.

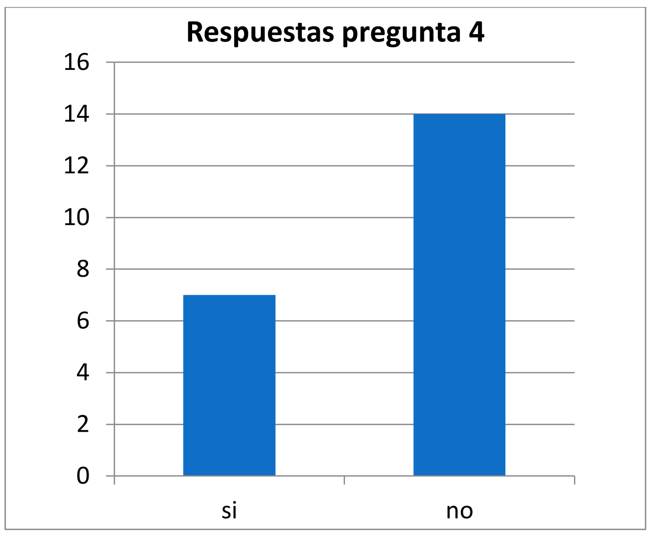
Ahora, se analizarán las repuestas de las preguntas de la **categoría 2**:

***Pregunta 4:*** 67% de los docentes consideran que el 1 **no** es un número primo. 33% lo consideran primo.

Se presenta una ambigüedad, dado que aquellos que consideran que el 1 **no** es primo y los que dicen que lo es, en su argumento hacen referencia a la definición. Los docentes emplean su noción de número primo, para asumir una posición acerca de si 1 es primo o no. De los 21 docentes sólo uno señaló el hecho de que 1 sea o no considerado primo es por convención de la comunidad matemática.

La razón que se presenta con frecuencia es que **no** puede ser primo por la definición. Aunque se presenta una ambigüedad, dado que aquellos que consideran que lo es, también hace referencia a la definición.  Por lo cual, la definición de número primo como divisible por 1 y por sí mismo ha creado ambigüedad, no obstante si se hace referencia a un número primo como aquel que tiene exactamente 2 divisores, el 1 queda por fuera de la definición dado que solo tiene un divisor.

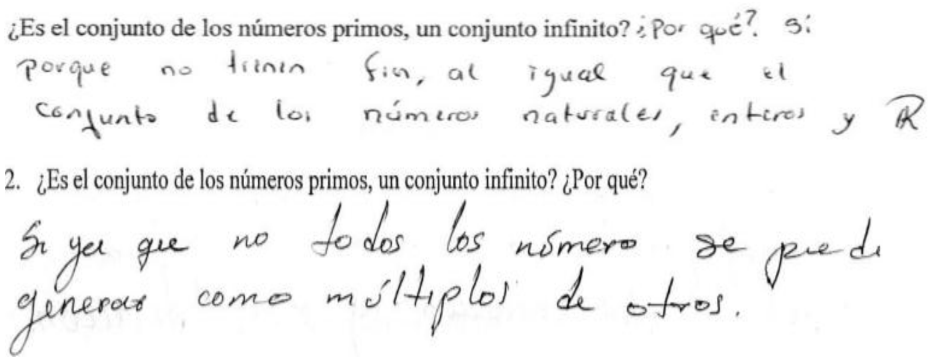
***Figura 4.12 ¿es el 1 un número primo?***




Se comprueba de este modo que esta cuestión siempre ha sido y sigue siendo imprecisa, por lo que se propone que sea identificada adecuadamente por parte de los docentes, para que sea aclarada al enseñar el concepto de número primo.  Como lo confirma las respuestas obtenidas de los docentes acerca de la primalidad del número 1, no tienen claro que 1 no es primo, lo cual indica que no tienen un conocimiento amplio del TFA, dado que si 1 es primo no se puede hablar de este teorema.

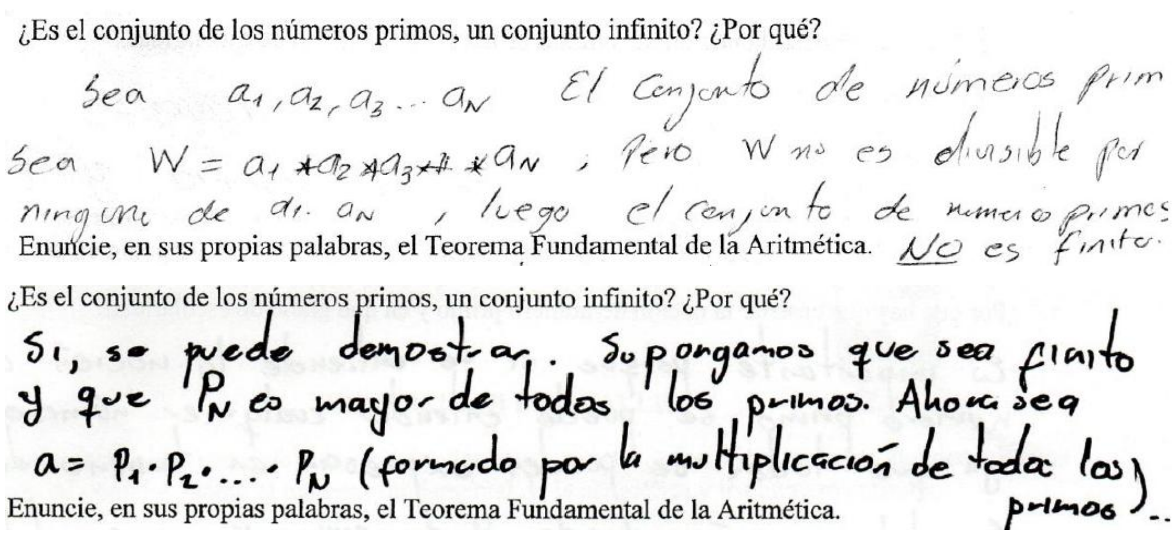
***Pregunta 5***: Todos los profesores afirman la existencia de infinitos primos.  Cuando se pregunta por qué, los docentes consideran que es infinito, ya que, no se pueden contar sus elementos, un profesor  respondió que "así lo dice Euclides", pero una respuesta tendencia e interesante fue asociar la infinitud de los números naturales con la infinitud de los números primos debido a que como los números primos pertenecen a los naturales, son un subconjunto, por lo tanto los números primos son infinitos.

***Figura 4.13 Infinitud de los números primos***


¿Es el conjunto de los números primos, un conjunto infinito? ¿Por qué? Si:
porque no tienen fin, al igual que el conjunto de los números naturales, enteros y R

2. ¿Es el conjunto de los números primos, un conjunto infinito? ¿Por qué?
Si ya que no todos los número se puede generar como múltiplos de otros.

***Figura 4.14 Dos profesores intentaron dar la demostración del teorema***


¿Es el conjunto de los números primos, un conjunto infinito? ¿Por qué?
Sea $a_1, a_2, a_3 \ldots a_N$ El Conjunto de números prim
Sea $W = a_1 * a_2 * a_3 * \ldots * a_N$ ; Pero W no es divisible por ninguno de $a_1 \cdot a_N$ , luego el conjunto de numeros primos
Enuncie, en sus propias palabras, el Teorema Fundamental de la Aritmética. NO es finito.

¿Es el conjunto de los números primos, un conjunto infinito? ¿Por qué?
Si, se puede demostrar. Supongamos que sea finito y que $P_N$ es mayor de todos los primos. Ahora sea $a = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_N$ (formado por la multiplicación de toda los primos)..
Enuncie, en sus propias palabras, el Teorema Fundamental de la Aritmética.

En general, se evidencia que los profesores tienen conocimiento de esta propiedad, sin embargo, se presenta un obstáculo al definir la infinitud de los números primos a partir de la infinitud de los números naturales, es necesario, hacer énfasis en que esto no es suficiente para afirmar la infinitud de los números primos.

***Pregunta 6***: 43% de los profesores enuncian (E) el teorema fundamental de la aritmética. 33% de los docentes lo enuncian pero falta la unicidad (EFU), solo mencionan la existencia. Y 24% no lo enuncian (NE).

*Figura 4.15 Enunciar el Teorema Fundamental de la Aritmética*

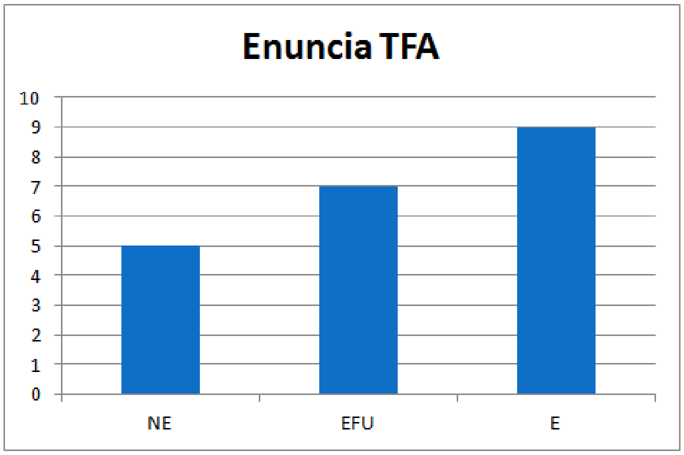
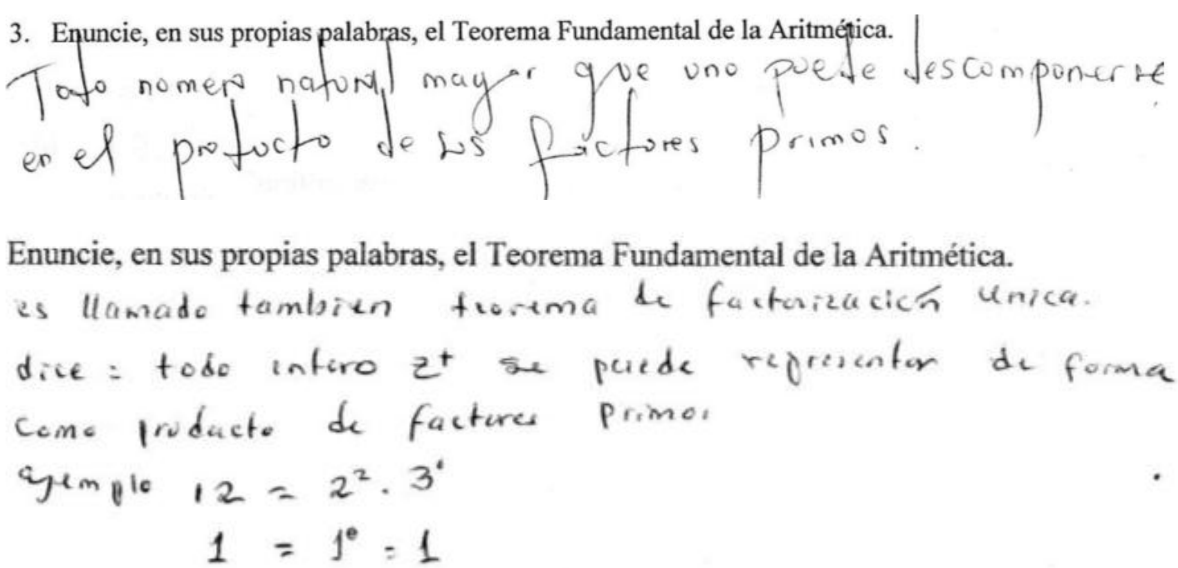



*Figura 4.16 Teorema Fundamental de la Aritmética*



3. Enuncie, en sus propias palabras, el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Todo numero natural mayor que uno puede descomponerse en el producto de los factores primos.

Enuncie, en sus propias palabras, el Teorema Fundamental de la Aritmética.

es llamado tambien teorema de factorización unica.

dice: todo entero $z^+$ se puede representar de forma como producto de factores primos

ejemplo $12 = 2^2 \cdot 3^1$

$1 = 1^0 = 1$

Generalmente, se puede evidenciar la presencia de un obstáculo, que no se presta atención al asunto de la unicidad de la factorización, por lo tanto tiende a pasarse por alto como lo muestran las respuestas de gran parte de los docentes.

***Pregunta* 7**: Los docentes responden que la importancia del número primo en las matemáticas reside en: afianzar el concepto de número natural, divisibilidad, descomponer números (TFA) son la base de las matemáticas o de la construcción numérica.

Se establece de las respuestas, que los profesores reconocen la importancia del concepto de número primo para las matemáticas. Además consideran que los números primos se utilizan en diversos temas de la matemática básica y que pueden ayudar a una mejor comprensión de los números.

***Pregunta* 8**: Lo más relevante del TFA para los profesores es la descomposición en primos, la unicidad de la descomposición en factores primos, reconocer divisores, formas de representar un número natural, para la resolución de problemas aritméticos con el máximo común múltiplo y mínimo común divisor. La pregunta 8, permitió conocer las razones por las que los docentes consideran que es importante conocer el TFA y los números primos en las matemáticas escolares.

A continuación se presenta el análisis de las preguntas de la **categoría 3**:

***Pregunta* 9**: La noción de número primo debe enseñarse en la escuela porque es fundamental para entender la división exacta, si entienden la noción de número primo se puede entender cualquier número, es importante conocer las propiedades de los números, para trabajar los conceptos de factor, divisor, M.C.M, M.C.D, características y propiedades de los números. Los profesores conciben la importancia de enseñar el concepto de número en la escuela, debido a que, permite entender las relaciones de divisibilidad. Y a partir de ella se definen nuevos conceptos.

Los docentes identifican que los primos no solo se relacionan con temas que se abordan en la primaria, sino también con temas que se trabajan en secundaria, así mismo con cuestiones de la vida cotidiana

Con respecto a la pregunta del grado de escolaridad ideal para abordar el concepto de número primo, la mayoría de los profesores coinciden en que se deben enseñar desde la básica primaria, hay diversidad acerca de cuál sería el grado ideal, algunos consideran que se debe abordar desde los grado 3° de básica primaria, se mencionan también que en los grados 4° y 5° con mayor frecuencia, y se propone que deben ser reforzados en los grados siguientes. Con esto se muestra variedad entre las los opiniones de los docentes acerca del grado de escolaridad en el que se abordan los números primos, según la revisión en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas, los estudiantes deben aprender las relaciones de divisibilidad en el grado tercero de primaria, de ahí que esta respuesta era de las más esperadas.

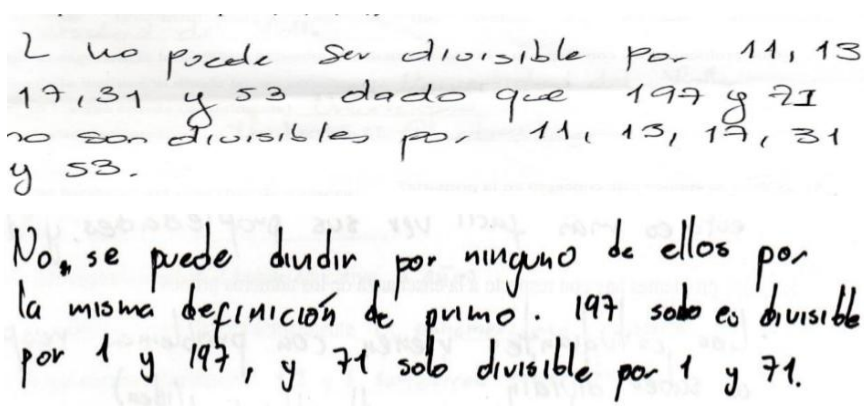
***Pregunta* 10**: Con respecto a los problemas que pueden estar ligados a la enseñanza de los números primos, las respuestas más comunes son las siguientes: aprendizaje de los criterios de divisibilidad, no se le da importancia a este concepto, no se le haya sentido, los conceptos se presentan aislados de manera muy abstracta, no se entiende su utilidad y los estudiantes no reconocen los números primos, ni la idea de divisibilidad, además de que no hay una forma sencilla de hallarlos.

Por otro lado, los profesores reconocen que se debe dar mayor énfasis a los números primos, dado que, solo se enseña la definición y no se va más allá. En la respuesta anterior, se aprecia que, según la experiencia de los profesores se presentan diversos problemas en la enseñanza de los números primos, y por esta razón el profesor tendrá que presentar el concepto adecuadamente, de tal manera que dichos problemas se puedan minimizar.

**Análisis de la categoría 4:**

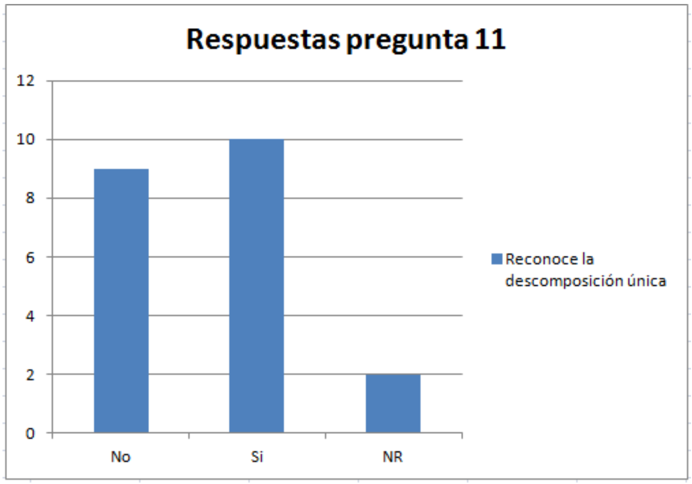
***Pregunta* 11**: 57% responden correctamente a esta pregunta. Sin embargo el 33% no tiene en cuenta que se ha dado la descomposición en primos del número $L$, y un 10% no responde.

***Figura 4.17 Uso del TFA***



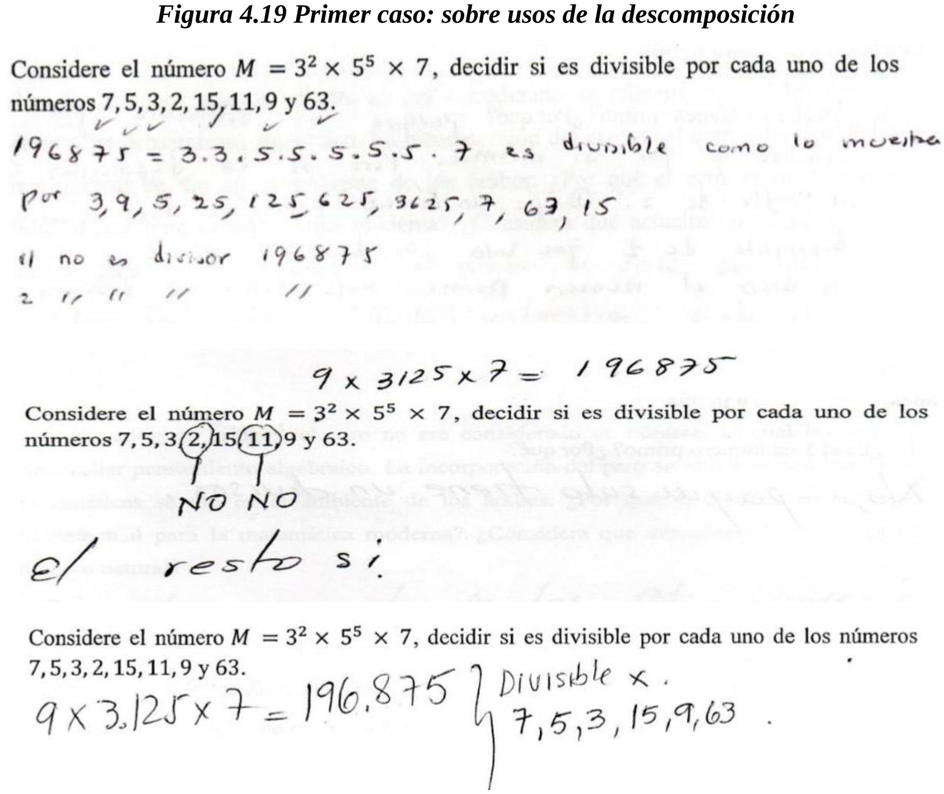

En general, no se presenta como tal una justificación, solo se subraya o se dice cuáles son los que dividen al número dado. De esta forma se evidencia que los docentes no utilizan la unicidad de la descomposición en primos para la resolución de problemas, solo con el hecho de que se daba la descomposición del número $L$, se respondía la pregunta sin necesidad de realizar ningún cálculo.

*Figura 4.18 Reconoce la descomposición*




***Pregunta* 12:** 52% de los profesores responden utilizando la descomposición en factores primos del número $M$. Sin embargo la forma en que el 33% de los profesores afrontó la pregunta pone en evidencia que los marcos organizadores implícitos del TFA no han sido asimilados completamente por ellos dado que no tienen en cuenta la descomposición para dar su respuesta y 10% no respondió.

*Figura 4.19 Primer caso: sobre usos de la descomposición*


Considere el número $M = 3^2 \times 5^5 \times 7$, decidir si es divisible por cada uno de los números 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9 y 63.

196875 = 3.3.5.5.5.5.5.7 es divisible como lo muestra por 3, 9, 5, 25, 125, 625, 3625, 7, 63, 15
11 no es divisor 196875
2 " " " "

9 x 3125 x 7 = 196875

Considere el número $M = 3^2 \times 5^5 \times 7$, decidir si es divisible por cada uno de los números 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9 y 63.

NO NO

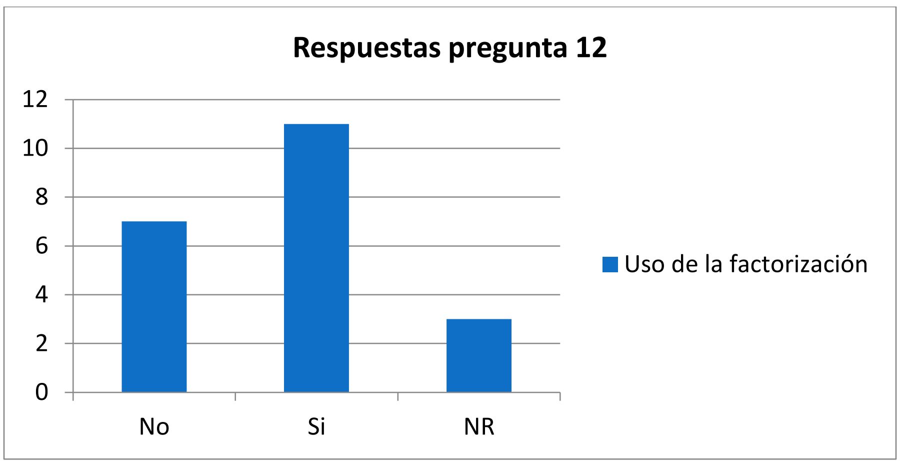
el resto si.

Considere el número $M = 3^2 \times 5^5 \times 7$, decidir si es divisible por cada uno de los números 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9 y 63.

9 x 3.125 x 7 = 196.875 } Divisible x. 7, 5, 3, 15, 9, 63.

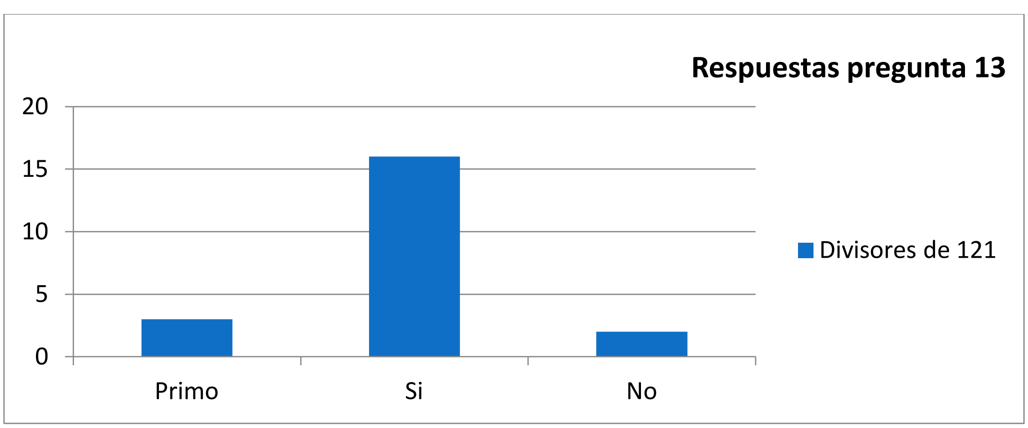
Como se observa algunos de los profesores realizan la operación para hallar el valor del número $M$, para luego decidir si es divisible o no por los números dados, lo que conduce a la conclusión de que no utiliza la descomposición dada para tomar la decisión, esto indica que los profesores no poseen un marcos organizadores implícitos de las consecuencias del TFA, entre ellas, que a partir de la descomposición, es posible conocer todos los divisores del número, multiplicando por todas las combinaciones posibles de los factores primos obtenidos en la descomposición.

***Figura 4.20 Segundo caso: sobre uso de la descomposición***




***Pregunta* 13**: $76\%$ profesores hallan los divisores del número 121. El $14\%$ no encontraron los divisores, debido a que consideraron al número 121 primo. Como se menciono antes la prueba de la divisibilidad se realiza por lo general con los números hasta el 10, como los factores de 121 son 1 y 11, el $14\%$ de los profesores determinaron que era un número primo, lo que confirma la poca reflexión que hay con respecto a las consecuencias del TFA.

***Figura 4.21 Divisores de 121***



***Pregunta* 14**: Las respuestas de los docentes en cuanto para qué sirve la descomposición en factores primos la tendencia de la mayoría fue afianzar la división, factores, calcular mcm, mcd y para trabajar con los fraccionarios.

A través de las preguntas correspondientes a la categoría 4, se concluye que los profesores conocen las aplicaciones y usos de los números primos dentro de la matemática, pero no reconocen la utilidad de la descomposición en factores primos y su aplicación en otras áreas del conocimiento.

# 5 CONCLUSIONES

El interés de este trabajo era identificar las concepciones de los docentes de Educación Básica con respecto al Teorema Fundamental de la Aritmética, usando como directriz el desarrollo Histórico-Epistemológico del tema central. Para ello, se plantearon tres objetivos:

- ✓ Especificar el desarrollo Histórico-Epistemológico del Teorema Fundamental de la Aritmética.
- ✓ Identificar algunos obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico de los números primos.
- ✓ Caracterizar las concepciones de los profesores respecto a la temática central.

Para especificar el desarrollo Histórico-Epistemológico del Teorema Fundamental de la Aritmética, se elaboró una historiografía, la cual permitió conocer los orígenes del concepto de número primo y su desarrollo a lo largo de la historia. Por medio de la historiografía, se identificaron tres obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico del TFA, el primero relacionado con la inclusión o no del número 1 en el conjunto de los números primos. Segundo, la unicidad de la descomposición de números compuestos en primos, y, por último, la distribución de los números primos. Se observó que estos tres aspectos, fueron los que se presentaron en los periodos de la historia de la matemática, en la que el TFA se desarrollo.

Para caracterizar las concepciones de los profesores respecto al TFA, se utilizó como instrumento un cuestionario. Las preguntas se diseñaron tomando como referencia los obstáculos epistemológicos identificados. A través de las respuestas proporcionadas se logró identificar los puntos de vista de los docentes, acerca de estos números y del TFA en particular. Según el marco teórico, las concepciones definen el cómo y el por qué un sujeto argumenta de cierta forma ante una situación. Según el análisis se puede afirmar que el conocimiento de los profesores de Educación Básica, en cuanto al desarrollo histórico del concepto de número, es parcial, y que los docentes no reflexionan sobre la evolución de los conceptos a través de la historia. Estos aspectos se evidenciaron en las preguntas acerca de la noción de número, la idea del cero y el concepto de número primo.

Se identificó además, la presencia de un obstáculo al concebir la infinitud de los primos; este problema se exhibe en la justificación presentada por los docentes sobre la existencia de infinitos números primos, dado que lo relacionan con la infinitud de los números naturales; sin embargo, no es suficiente asociar la infinitud de los números primos, con la infinitud de los números naturales, es indispensable reconocer que se requiere de una demostración. Con lo anterior, no se pretende que el docente deba aprender la demostración, sino, que pueda entender la idea de lo qué trata y pueda conectarla con el saber.

Acerca del conocimiento de los profesores sobre el TFA, se destaca que cuando se hicieron preguntas donde se debía utilizar para la descomposición en primos, operativamente saben hacerlo, utilizan de manera implícita el TFA, pero desconocen su conceptualización; aunque se presentaron unos casos donde el profesor no utiliza la descomposición para la resolución de problemas, revelando la falta de fundamentación teórica con respecto al uso de TFA. Eso nos lleva a reafirmarnos en la importancia de que el profesor de matemáticas, conozca a profundidad todos los temas que va a enseñar, en particular el TFA; reconocer las implicaciones que se derivan del teorema y la forma de simplificar operaciones cuando se conoce la descomposición de un número en sus factores primos. De allí que existan algunas carencias conceptuales que no permiten una mayor comprensión del teorema.

En las preguntas donde se hace referencia a las aplicaciones de los números primos y el TFA, los profesores responden de manera muy general, mencionando la utilidad de los números primos dentro de las matemáticas, en temas como, la divisibilidad, la factorización, entre otros; pero no reconocen la aplicación de los primos y el TFA en otros ámbitos, como es el caso de la utilidad de los números primos en la informática.

De acuerdo con el análisis y lo expresado anteriormente, notamos que los profesores tienen imprecisiones respecto a si el 1 es primo, a la infinitud de los números primos y a la unicidad de la descomposición; esto trae implicaciones en la enseñanza, pues seguramente estas inconsistencias seran replicadas por los estudiantes. De este modo, las concepciones de los profesores influyen en las concepciones que adquieren los estudiantes, en relación con los objetos matemáticos.

Se nota, por parte del docente, la ausencia de una reflexión más profunda acerca de su práctica, es decir, en cuanto a los temas que se trabajan en sus clases. Los docentes no hacen una reflexión de los conceptos con respecto a la historia de las matemáticas, ni en cuanto a las nociones que se trabajan en esta disciplina, lo cual es necesario para conocer mejor los conceptos y para que el profesor pueda trasformar lo que ha aprendido de tal manera que el alumno logre entenderlo.

Los profesores deben enseñar el concepto de número primo, la importancia de éstos en el desarrollo de las matemáticas, en especial, en la teoría de números y tanto la existencia como la unicidad de la descomposición en primos y su utilidad, debido a que es algo que se va a repetir a lo largo de las matemáticas. Si los estudiante logran comprender con el TFA, que la idea de la factorización, es convertir en factores más pequeños, como se hace con los números al descomponerlos en factores primos, no van a tener problemas cuando se encuentren con esta idea en Álgebra, por lo tanto se fundan unas buenas bases.

Por lo anterior, es conveniente que los docentes conozcan las bases conceptuales de los números primos, la importancia de éstos en el desarrollo de las matemáticas, en especial, en la teoría de números y entender, tanto la existencia como la unicidad de la descomposición en primos y su utilidad, debido a que es algo que se va a repetir a lo largo de las matemáticas. Así como también explorar y mostrar las diferentes conexiones involucradas en el TFA, como es el caso de la factorización de números enteros en números primos, lo cual contribuye a que el estudiante pueda comprender muchas propiedades de los números naturales.

Los profesores pueden utilizar distintas estrategias para abordar la enseñanza de los números primos en el aula de clase. Se sugiere utilizar actividades como las propuestas por Granados (2011), entre las que se destacan las siguientes: *Los primos en la historia, actividad valorando el legado, Descomposición factorial de números naturales, y Cálculos Con Primos*. En estas actividades se trabajan los números primos de manera lúdica, con el uso de calculadoras y software que permiten conocer la primalidad de un número.

De acuerdo a las ideas y reflexiones expuestas, se ha confirmado la importancia de conocer el desarrollo histórico de los números primos para una mejor conceptualización. Se propone que el profesor tiene una gran oportunidad, para que los estudiantes puedan conocer algunos elementos históricos que han dado origen al concepto de número primo.

Algunos aspectos de la historia que pueden ser abordados al enseñar el concepto de número primo en la escuela son los siguientes:

- Calcular números primos utilizando el método de Eratóstenes, pero con un $n > 100$.
- Investigar sobre los tipos de números primos que ha surgido a lo largo de la historia, como por ejemplo, primos de Fermat, primo de Mersenne, entre otros.
- Involucrar a los estudiantes en la consideración que existen números primos muy grandes.
- Hacer discusiones en clase acerca de ¿cuál es el menor número primo?, ¿Cuántos número primos existen?, ¿cuál es el número primo más grande conocido?

## REFERENCIAS


Agargün, A., & Fletcher, C. (1994). al-Farisi and the Fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica*, *21*, 162-173.

Agargün, A., & Özkan, E. (2001). A Historical Survey of the Fundamental Theorem of A rithmetic. *Historia Mathematica*, *28*, 207-214.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, *8*(1), 30-46.

Azcárate, C., & Moreno, M. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(2), 265-280.

Azcárate, C., García, L., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 85-116. Recuperado el 06 de 2015, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33590105

Boyer, C. (1987). *Historia de las matemáticas.* (M. Martinez Perez, Trad.) Madrid: Alianza editorial.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Burkhart, J. (2009). Building Numbers from Primes. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 157-167.

Cairns, G. (2005). Is there a greater role for prime numbers in our schools? . *Australian Senior Mathematics Journal*, 24-37.

Castro, E. (2001). Didáctica de las matemáticas en Educación primaria. Madrid: Sintesis.

Castro, I. (1988). *Leonhard Euler: el más prolífico en la historia de la Matemática.* Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana.

Chamorro, M. (2003). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En M. Chamorro, *Didáctica de Matemáticas para Primaria* (págs. 69-94). Madrid: PEARSON EDUCACIÓN.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín del 10° Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*.

Recuperado el 30 de 5 de 2015, de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Davenport, J. (2008). Factorization and the Primes. In J. Davenport, *The higher arithmetic an introduction to the theory of numbers* (pp. 1-30). New York: Cambridge University Press.

Euclides. (s.f.). *Elementos. Libros V-IX.* (M. Puertas, Trad.) Madrid: Editorial Gredos S.A.

Euler, L. (1828). Part I. Containing the Analysis of Determinate Quantities. En L. Euler, *Elements of Algebra* (M. Bernoulli, & M. De La Grange, Trads., Fourth ed., págs. 1-69). London: PaternosterRow. Obtenido de https://archive.org/stream/elementsofalgebr00eule#page/n9/mode/2up

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.* Granada: Comares. Recuperado el 22 de 06 de 2015, de http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Tesis/Tesis.pdf

Gauss, C. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae.* (H. Barrantes, M. Josehy, & Á. Ruiz, Trads.) Recuperado el 25 de 05 de 2015, de http://epsaleph.tripod.com/sitebuildercontent/sitebuilderfiles/disquisitionesarithmeticae.pdf

Gil, F., & Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 27-47.

Granados, J. (2011). Factorización prima de números naturales para estudiantes del tercer ciclo. (Tesis de maestría). Universidad Nacional Bogotá, Colombia.

Hernández , R., Fernández, C., & Baptista, P. (1998). Recolección de datos. En R. Hernandez , C. Fernández, & P. Baptista, *Metodología de la investigación* (págs. 233-339). México: McGraw-Hill book Company.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas.* Sevilla: GID-Universidad de Sevilla.

López, Á., & Cañadas, M. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia, *Investigación en Didáctica de la Matemática Homenaje a Encarnación Castro* (págs. 59-66). Granada, España: Comares.

Martínez, M., & Chavarría, J. (2012). Usos de la historia en la enseñanza de la matemática. *VII Festival Internacional de Matemática*, (págs. 1-5). Guanacaste, Costa Rica. Recuperado el 23 de 02 de 2015, de http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Margot-Martinez3.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santafé de Bogotá Colombia: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). *Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas.* Santafé de Bogotá: MEN.

Mora, L., & Torres, J. (2007). *Concepciones de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre números reales.* Bogotá : Universidad Pedagógica Nacional.

Ponte, J. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini, *Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the Fifth International Conference on Systematic Cooperation between theory and practice in mathematics education.* Grado, Italia.

Ponte, J. (1994b). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. Ponte, & J. Matos, *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Lisboa: International Group for the Psycholgy of Mathematics Education.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. Grows, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 127-146). Nueva York: Macmillan.

Triana, W. (2012). Una Visión Histórica del Teorema Fundamental de la Aritmética. (Trabajo de grado). Bogotá, Colombia.

*www.vaxasoftware.com*. (28 de 11 de 2015). Obtenido de http://www.vaxasoftware.com/doc_eduen/mat/numperfe_eng.pdf

Zazkis , R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 164-186. Recuperado el 06 de 04 de 2015, de http://www.sfu.ca/~zazkis/publications/JRME2004-05-PRIMES.pdf

Zazkis, R., & Cammpbell, S. (1996). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, 207-218.

# ANEXOS

## ANEXO 1

**Lista de números perfectos** www.vaxasoftware.com

Los números perfectos son generados por la formula $2^{p-1}(2^p-1)$, donde $p$ y $2^p-1$ son primos.

| Pos. | p | Número perfecto | Nº dígitos | Año | Descubridor |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 6 | 1 | ? | |
| 2 | 3 | 28 | 2 | ? | |
| 3 | 5 | 496 | 3 | ? | |
| 4 | 7 | 8 128 | 4 | ? | |
| 5 | 13 | 33 550 336 | 8 | 1456 | *anónimo* |
| 6 | 17 | 8 589 869 056 | 10 | 1588 | Cataldi |
| 7 | 19 | 137 438 691 328 | 12 | 1588 | Cataldi |
| 8 | 31 | 2 305 843 008 139 952 128 | 19 | 1772 | Euler |
| 9 | 61 | 265845599...953842176 | 37 | 1883 | Pervushin |
| 10 | 89 | 191561942...548169216 | 54 | 1911 | Powers |
| 11 | 107 | 131640364...783728128 | 65 | 1914 | Powers |
| 12 | 127 | 144740111...199152128 | 77 | 1876 | Lucas |
| 13 | 521 | 235627234...555646976 | 314 | 1952 | Robinson |
| 14 | 607 | 141053783...537328128 | 366 | 1952 | Robinson |
| 15 | 1 279 | 541625262...984291328 | 770 | 1952 | Robinson |
| 16 | 2 203 | 108925835...453782528 | 1327 | 1952 | Robinson |
| 17 | 2 281 | 994970543...139915776 | 1373 | 1952 | Robinson |
| 18 | 3 217 | 335708321...628525056 | 1937 | 1957 | Riesel |
| 19 | 4 253 | 182017490...133377536 | 2561 | 1961 | Hurwitz |
| 20 | 4 423 | 407672717...912534528 | 2663 | 1961 | Hurwitz |
| 21 | 9 689 | 114347317...429577216 | 5834 | 1963 | Gillies |
| 22 | 9 941 | 598885496...073496576 | 5985 | 1963 | Gillies |
| 23 | 11 213 | 395961321...691086336 | 6751 | 1963 | Gillies |
| 24 | 19 937 | 931144559...271942656 | 12003 | 1971 | Tuckerman |
| 25 | 21 701 | 100656497...141605376 | 13066 | 1978 | Noll y Nickel |
| 26 | 23 209 | 811537765...941666816 | 13973 | 1979 | Noll |
| 27 | 44 497 | 365093519...031827456 | 26790 | 1979 | Nelson y Slowinski |
| 28 | 86 243 | 144145836...360406528 | 51924 | 1982 | Slowinski |
| 29 | 110 503 | 136204582...603862528 | 66530 | 1988 | Colquitt y Welsh |
| 30 | 132 049 | 131451295...774550016 | 79502 | 1983 | Slowinski |
| 31 | 216 091 | 278327459...840880128 | 130100 | 1985 | Slowinski |
| 32 | 756 839 | 151616570...565731328 | 455663 | 1992 | Slowinski y Gage |
| 33 | 859 433 | 838488226...416167936 | 517430 | 1994 | Slowinski y Gage |
| 34 | 1257 787 | 849732889...118704128 | 757263 | 1996 | Slowinski y Gage |
| 35 | 1398 269 | 331882354...723375616 | 841842 | 1996 | Armengaud, Woltman, et. al. (GIMPS) |
| 36 | 2976 221 | 194276425...174462976 | 1791864 | 1997 | Spence, Woltman, et. al. (GIMPS) |
| 37 | 3021 377 | 811686848...022457856 | 1819050 | 1998 | Clarkson, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS) |
| 38 | 6972 593 | 955176030...123572736 | 4197919 | 1999 | Hajratwala, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS) |
| 39 | 13 466 917 | 427764159...863021056 | 8107892 | 2001 | Cameron, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS) |
| 40 | 20 996 011 | 793508909...206896128 | 12640858 | 2003 | Shafer, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS) |
| 41 | 24 036 583 | 448233026...572950528 | 14471465 | 2004 | Findley, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS) |
| 42 | 25 964 951 | 746209841...791088128 | 15632458 | 2005 | Nowak, Woltman, Kurowski, et. al. (GIMPS) |
| 43 ? | 30 402 457 | 497437765...164704256 | 18304103 | 2005 | Cooper, Boone, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS) |
| 44 ? | 32 582 657 | 775946855...577120256 | 19616714 | 2006 | Cooper, Boone, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS) |
| 45 ? | 37 156 667 | 204534225...074480128 | 22370543 | 2008 | Elvenich, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS) |
| 46 ? | 42 643 801 | 144285057...377253376 | 25674127 | 2009 | Strindmo, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS) |
| 47 ? | 43 112 609 | 500767156...145378816 | 25956377 | 2008 | Smith, Woltman, Kurowski, et al. (GIMPS) |
| 48 ? | 57 885 161 | 169296395...270130176 | 34850340 | 2013 | Curtis Cooper, Kurowski, et al. (GIMPS) |

www.vaxasoftware.com

## ANEXO 2

## CUESTIONARIO APLICADO

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**

El siguiente cuestionario pretende indagar sobre las concepciones de los docentes sobre algunos aspectos de la teoría de números, como el teorema fundamental de la aritmética y los números primos.

**Datos del encuestado**

Sexo M___ F___

**Formación académica**:

Educación básica: Publica ___ Privada ___

Educación Media: Publica ___ Privada ___

Educación Superior: Publica ___ Privada ___

Nombre de la institución en la que realizó sus estudios universitarios ______________________________________________

Tiempo de experiencia laboral en el ámbito educativo ____

Nombre de la institución donde labora actualmente_______________________________________

Grados en los que enseña (actualmente) ____________________

Correo electrónico (opcional) ___________________________________

**Desarrollo histórico del concepto de número**

1. En el libro VII de los *Elementos*, Euclides define número como "una pluralidad compuesta de unidades". ¿Considera que esta noción de número aún tiene vigencia? ¿Se adapta al concepto de número real?
2. Para los antiguos griegos, el cero no era considerado un número, lo cual les impidió desarrollar pensamiento algebraico. La incorporación del cero en el corpus teórico de las matemáticas se dio en el ambiente de los árabes. ¿Por qué el cero es un concepto fundamental para la matemática moderna? ¿Considera que actualmente el cero es un número natural?
3. En el libro VII de los *Elementos*, Euclides divide los números entre números primos y números compuestos. Euclides define número primo como "aquel número que sólo es dividido por la unidad¨. Considera que es una definición que puede ser adoptada en la actualidad.

**Concepto de número primo**

1 ¿Es el 1 un número primo? ¿Por qué?

2 ¿Es el conjunto de los números primos, un conjunto infinito? ¿Por qué?

3 Enuncie, en sus propias palabras, el Teorema Fundamental de la Aritmética.

4 Considere el número $L = 13987 = 197 \times 71$ (donde 197 y 71 son números primos) y decida si $L$ puede ser divisible por $11, 13, 17, 31, y\ 53$.

5 Considere el número $M = 3^2 \times 5^5 \times 7$, decidir si es divisible por cada uno de los números $7, 5, 3, 2, 15, 11, 9$ y $63$.

6 Escribe todos los divisores posibles del número 121. Explique el procedimiento.

**Teorema Fundamental de la Aritmética y números primos**

1 ¿Por qué hay que enseñar la noción de número primo y en qué grado de escolaridad?

2 ¿Cuál es la importancia del concepto de número primo en las matemáticas?

3 ¿Qué problemas hay con respecto a la enseñanza de los números primos?

4 ¿Qué es lo más relevante del Teorema Fundamental de la Aritmética?

5 ¿Para qué sirve conocer la descomposición de un número en sus factores primos?