

CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE VARIACIONAL A TRAVES DE LOS USOS DEL CONOCIMIENTO DEL SIGLO XVII Y XVIII

Luis Arturo Serna Martínez, Apolo Castañeda Alonso, Gisela Montiel Espinosa

CICATA Legaria IPN

México

luisarturo_sernamartinez@yahoo.com.mx, apcastane@gmail.com, gisela.montiel@gmail.com

Resumen. El presente trabajo es una investigación en curso. Una fuente de dificultades didácticas es la interpretación geométrica de la derivada, en donde la recta tangente no se considera como objeto de estudio. Nuestro planteamiento es que al construir la recta tangente desde una perspectiva variacional puede servir como una introducción a la derivada desde un punto de vista gráfico, lo cual implica también un rediseño del Discurso Matemático Escolar. Utilizamos la teoría de la Socioepistemología, en la cual se plantea que el uso de herramientas matemáticas para resolver actividades organizadas intencionalmente con la intención de resolver un problema, son una práctica, normadas por una práctica social. El escenario histórico nos ha servido para reconocer la práctica de la tangente variacional. Actualmente hemos implementado un método para obtener nuestros datos el cual nos servirá para que un futuro próximo podamos analizarlos y obtener conclusiones.

Palabras clave: recta tangente variacional, usos del conocimiento, variación

Abstract. The present work is an on going research. One source of difficulty teaching is the geometric interpretation of the derivative, where the tangent line is not considered as objects of study. Our approach is to construct the tangent line from a variational perspective can serve as an introduction to the derivative from a view point graphic, which also implies a redesign of School Mathematics Discourse. We use the theory of Socioepistemology, in which it is proposed that the use of mathematical tools to solve intentionally organized activities with the intention of solving a problem is a practice, regulated by a social practice. The historical setting has helped us to recognize the practice of variation along tangent. Currently we have implemented a method to obtain our data which will serve for the near future we can analyze and draw conclusions.

Key words: variational tangent, uses of knowledge, variation

El modelo epistemológico en el Cálculo Diferencial

El modelo epistemológico con el que la sociedad concibe a las matemáticas influye de manera determinante en las aulas escolares. Hay un modelo de acuerdo a Gascón (2001) en el que se considera a las matemáticas como un conjunto organizado de axiomas, teoremas y principios matemáticos estructurados coherente y lógicamente el cual descansa sobre un conjunto de enunciados (axiomas primitivos) perfectamente bien conocidos, bajo este precepto se puede considerar a las matemáticas como verdades universales sin falla alguna y que son importante por sí mismas, es decir sin considerar su relación con otras áreas de conocimiento, ni mucho menos pensar que son productos de los mecanismos sociales que hay en una sociedad y que se presentan como respuestas a las necesidades de la misma. Este modelo le da alta importancia a la teoría y el formalismo matemático, sin casi considerar las aplicaciones prácticas de donde surgieron las matemáticas o donde se puedan aplicar, cuando se llega a emplear a la teoría en

la resolución de problemas es considerado esta actividad como algo secundario o auxiliar en los proceso de enseñanza aprendizaje (Gascón, 2001).

Cuando el formalismo fracasa, por ser demasiado difícil para los estudiantes se recurre a el uso de algoritmos de naturaleza algebraica, los cuales se pueden emplear por ejemplo al saber encontrar los máximos y mínimos de una función o la derivada pero sin comprender los significados que se encuentran presentes atrás de estos conceptos; sin embargo esto de alguna manera salva la situación evitando caer en una crisis y legitimando de nueva cuenta a el profesor (Cantoral, 2000).

Si este modelo epistemológico de las matemáticas es predominante en una sociedad entonces se ve reflejado en los libros de texto y programas escolares los cuales a su vez son retomados por profesores, alumnos y sociedad en general. Las concepciones que de las matemáticas se tienen por parte de los profesores y profesoras a partir de la consulta de los libros de texto se ven a su vez también plasmadas en su modelo de enseñanza-aprendizaje lo cual es reforzado por los programas de estudio, que también son altamente influenciados en su diseño por estos mismos textos (Dolores, 2007). Todo lo anteriormente dicho ocasiona una serie de problemáticas en las matemáticas en general y las clases de Cálculo Diferencial (CD), de acuerdo a lo reportado en Serna (2011) existen problemas en cuanto a la enseñanza aprendizaje de esta asignatura en la educación media superior en el sistema escolar mexicano.

Los modelos de enseñanza docentes se ven evidenciados en las aulas escolares, dándole alta importancia a la enseñanza de la teoría y/o en su defecto al uso de estrategias algebraicas para llegar a resultados, lo cual no implica la construcción de conocimiento y que por lo tanto permita que los estudiantes sepan reconocer cuando un problema requiera del uso de algún objeto matemático determinado, por ejemplo la derivada, máximos y mínimos, el límite por citar tan solo unos ejemplos. De acuerdo a Dolores (2007), bajo este modelo de enseñanza aprendizaje tampoco se reconocen las ideas variacionales que se encuentran presentes en la derivada, y de acuerdo a diferentes investigaciones podrían ser utilizadas didácticamente (Buendía, 2005; Cantoral, 2001; Castañeda, 2004, Dolores, 2007; Serna, 2007).

Otra de las implicaciones de el modelo de enseñanza citado es la forma que se tiene de dar clases, la cual consiste (con posibles variantes) en explicar la parte teórica para posteriormente dar un ejemplo y cambiar algunos datos para que los alumnos y alumnas resuelvan problemas similares (Parra, 2005; Serna 2011); también bajo este enfoque y como las matemáticas son consideradas como algo ya dado preexistente e inmutable y el que las conoce es el profesor, entonces es este el que da los ejemplos, guía el proceso de enseñanza-aprendizaje estableciendo quien está en lo correcto o no, y también que es lo correcto o incorrecto, no se

permite que sean los alumnos quienes construyan el conocimiento, argumentando discutiendo, analizando, emitiendo conjeturas ya que quien tiene la última palabra es el profesor o profesora y/o en su defecto el libro de texto utilizado.

Un fenómeno didáctico: La recta tangente en Cálculo

Las problemática señaladas en la sección anterior se manifiestan en la enseñanza-aprendizaje en CD en donde al parecer los profesores de CD tienen una urgencia por que los alumnos aprendan a derivar (González, 1999). Por otro lado no se le da importancia a los aspectos visuales como es el caso de las gráficas ya que se considera como algo no formal (Cantoral, 2000; Castañeda, 2009) de acuerdo a este contexto de enseñanza-aprendizaje la interpretación geométrica de la derivada es vista tradicionalmente como la sucesión de una familia de rectas secantes cuya posición límite es la recta tangente, y está documentado que esta forma de abordar el tema ha sido fuente de dificultades didácticas (Artigue, 1998; Cantoral, 2000; Dolores, 2007, Martínez, 2005; Serna, 2007, 2011). Este es un tema que es abordado como por requisito del currículo, ya que viene en el programa, pero que no se va a utilizar más, ya que posteriormente se le da mucha importancia al hecho de los alumnos resuelvan ejercicios en donde hay funciones que tienen que derivar y prácticamente la recta tangente no se vuelve a ver en el transcurso de las clases (Serna, 2007). Esto ocasiona dificultades entre los estudiantes, entre ellas está el hecho que no pueden establecer un vínculo entre la recta tangente vista en sus cursos anteriores en Geometría y Geometría Analítica en donde la recta tangente tiene un carácter estático y no dinámico como es requerido en CD, también bajo esta forma de enseñanza los estudiantes conciben que la recta tangente a una curva toca a la misma en un solo punto sin volver a tocarla, así mismo consideran que la recta no puede cortar a la curva, otra situación con esta forma de estudiar el tema es que se pone demasiado énfasis en el punto de contacto quedando una idea errónea de que la derivada es la recta tangente en un solo punto y por lo tanto no puede volver a tocarla, tal y como es evidenciado en Castañeda (2004).

Lo anteriormente mencionado hace que se pierda el carácter variacional de la recta tangente de tal forma que cuando los estudiantes revisan el tema de máximos y mínimos a pesar de que se les menciona que la pendiente de la recta tangente a la curva cambia de signo de positivo a negativo en un máximo y que la pendiente de la recta tangente vale cero en el mismo, es frecuente que los estudiantes no comprendan esto ya que fue una idea que no quedo estabilizada en su momento, por lo que tienen que recurrir a los pasos a seguir para encontrar las coordenadas de los máximos y mínimos lo cual no implica que los alumnos y alumnas

establezcan una conexión entre estos pasos a con los elementos conceptuales a los que están asociados.

Desde nuestro punto de vista consideramos que la recta tangente a la curva es algo que debería de ser visto como un tema en sí para abordar en Cálculo ya que de acuerdo a Cantoral (1988) la interpretación geométrica de la derivada es vista como una aplicación de la misma y no como el problema que le dio origen. Consideramos que al revisar obras antiguas en donde es abordado el problema de las tangentes usando a los infinitesimales como la herramienta con la cual fue resuelto, podemos detectar elementos que nos puedan permitir reconocer como se construyo conocimiento al resolver el problema en cuestión y elaborar una serie de secuencias didácticas que permitan que los alumnos puedan construir la noción de recta tangente variable, la cual es una noción que se requiere en CD puesto que nuestra hipótesis es que “la construcción de la recta tangente variable proporcionará argumentos que permitirán la introducción de la noción derivada desde un punto de vista gráfico”.

Estado del Arte

Nuestro interés consiste en que se pueda construir la noción de recta tangente variable desde un punto de vista variacional, esa línea de investigación ha sido trabajada en la Socioepistemología y por lo tanto revisamos investigaciones que tienen que ver con el nacimiento de las ideas del CD del siglo XVI, XVII y XVIII, específicamente aquellas que tratan o están relacionadas con la resolución del problema de las tangentes mediante el uso de los infinitesimales.

Una de las obras consultadas fue la tesis doctoral de Castañeda (2004); sus productos de investigación nos proporcionaron elementos teóricos para la nuestra. Uno de los elementos clave que encontramos fue el uso de los infinitesimales como una herramienta que fue utilizada por el marqués de L'Hospital y María Agnesi en la resolución del problema de las tangentes.

Se retomaron también algunas ideas de Cantoral (2001) ya que él reconoce la importancia de la diferencia fundamental entre dos puntos de una curva y como el análisis de esto nos puede ayudar a determinar comportamiento de la misma, pero este análisis se llevo a cabo reconociendo que el pensamiento matemático fue orientado por el pensamiento físico en donde la predicción jugó un papel determinante en la construcción social del pensamiento matemático y en donde teóricamente también retomamos ideas como la de Farfán (1983, citado en Cantoral, 2001) que dice

...existen elementos que permiten, e históricamente hicieron posible la construcción de un concepto, todos esos andamios de los que se vale el sujeto en

su acción sobre el objeto para acceder al concepto, andamiajes con vida efímera que circunstancialmente son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto...

(pp. xxiv-xxv)

Otra investigación que vamos a utilizar es la llevada a cabo en Serna (2007) en la cual se lleva a cabo un análisis de varias obras antiguas y vamos a retomar específicamente aquellas que tratan el problema de las tangentes utilizando como herramienta para su solución a los infinitesimales. En Serna (2007) hay ideas germinales que aportan en la construcción de la recta tangente variable.

En la obra de Copérnico sobre las revoluciones de las orbes celestes su interés está puesto en poder saber las posiciones que tendrían los astros o cuerpos celestes con tal intención llegó a la conclusión de que una curva se comporta como una línea recta en una región muy cercana entre dos puntos de la misma, esta misma idea se puede encontrar también presente en la obra de Newton, sin embargo ahora los dos puntos son la hipotenusa de un pequeño triángulo infinitesimal con lo cual se puede intuir también el carácter variacional ya que su ángulo y posición va cambiando consecutivamente.

También en Serna (2007) se puede observar que en L'Hospital se utiliza una definición de punto de una curva que dice que un punto de una curva es un segmento infinitesimal de tal forma que la curva está constituida por el ensamblaje de estos pequeños segmentos infinitesimales y cuando uno de estos pequeños segmentos infinitesimales se extiende indefinidamente en ambos sentidos se obtiene lo que podemos llamar recta tangente de una curva e intuitivamente se puede también determinar su carácter variacional.

Al analizar la obra de Euler *l'analyse infinitésimale* en su segundo volumen se observa que hay un cierto abandono por los argumentos geométricos aunque no totalmente. Con su obra se infiere que se pretende formalizar el cálculo naciente que se había formalizado con Newton y Leibniz pero se estaba intentando crear un mayor soporte matemático, de tal forma que Euler empieza a manejar argumentos de tipo algebraico pero todavía retomando ideas de los infinitesimales. Euler enuncia explícitamente el carácter variacional de la recta tangente mostrando un método algebraico en donde da explicaciones que utiliza ideas matemáticas, en donde se muestran los cambios a partir de polinomios y se dan una serie de argumentaciones del porque son eliminados ciertos términos del polinomio analizado y como al final de cuentas se va a tener uno que representa una línea recta, todo esto lo hace mediante un análisis que hace a partir de desarrollos algebraicos auxiliándose de representaciones gráficas en donde se

muestra como dos puntos infinitamente cercanos de una curva se convierten en la hipotenusa de un pequeño triángulo infinitesimal.

Marco Teórico

Utilizaremos a la Socioepistemología como nuestro referente teórico, la cual es una teoría que da cuenta de la construcción social del conocimiento, y reconoce que el origen de las ideas tiene que ver con la cultura, época, lugar, ubicación geográfica y todos aquellos elementos que de alguna forma caracterizan a una comunidad. Este marco teórico incorpora cuatro componentes con la intención de desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, las cuales son: las componentes cognitiva, didáctica, epistemológica y social (Montiel, 2005).

El conocimiento matemático “no nace puro” cuando en una sociedad hay necesidades por resolver, surgen formas, producto de su forma de ver la vida, existe una racionalidad contextualizada, es decir las personas construyen conocimiento y lo hacen como lo hacen por vivir en sociedad. La Socioepistemología postula que la práctica social norma la construcción del conocimiento matemático, en nuestro caso la práctica social que existía en la época en que investigamos es la predicción, (Cantoral, 2000).

La práctica social de la predicción normó la construcción de conocimiento matemático a través de las prácticas que existían entre las comunidades de matemáticos eruditos, la práctica (no la práctica social) la podemos considerar como aquella acción que enlaza conocimiento previos o cúmulos de experiencias anteriores con la construcción de nuevas ideas con la intención específica de resolver un problema que atañe a una comunidad.

El problema de las tangentes existente en los siglos XVII y XVIII era una *práctica*, a la cual le vamos a llamar la *práctica de la tangente variacional*, una *práctica* no es algo que nace instantáneamente, es más bien algo que se da por generaciones en una sociedad y tiene una historia y un futuro potencial es decir tiene *historicidad* (Zemelman, 2005). Lo anterior nos muestra que una *práctica* es algo dinámico, no estático, lo cual nos ha llevado reconocer diferentes momentos de la *práctica*. Las ideas germinales con Copérnico que se van resignificando conforme van transcurriendo los años como producto de la actividad humana, para nosotros la resignificación no tiene que ver con crear nuevos significados sino más bien es crear conocimiento en la organización del grupo humano, pero esta resignificación tiene la característica de iniciar con una idea que se va enriqueciendo y que va conservando sus elementos de inicio pero se va robusteciendo para llegar a ser cada vez más funcional.

Cuando a través de la práctica se ha resuelto un problema y la comunidad ha podido sistematizar este conocimiento y las herramientas correspondientes para llevar a cabo ciertas actividades de manera cotidiana podemos decir que se ha establecido un uso del conocimiento.

En nuestro caso hemos hecho un análisis de los usos del conocimiento para descubrir los significados existentes en las herramientas matemáticas que son utilizadas y que actualmente ya no se encuentran presentes por los cambios que se presentan cuando un objeto matemático es introducido a los sistemas escolares pero también digamos que con el paso del tiempo los conocimientos sufren una evolución. Con el análisis hecho obras originales mencionadas se pueden detectar elementos que nos sirven de andamiajes en la creación de secuencias didácticas y que a partir de ellas los alumnos puedan construir la recta tangente desde una perspectiva variacional, esto en base a el ejercicio de la *práctica de la tangente variacional*.

Metodología

A partir de los elementos encontrados en el análisis de obras mencionadas se llevaron a cabo la creación de cinco secuencias didácticas la elaboración de las mismas, tomando en cuenta que el uso de los infinitesimales sirvió de herramienta matemática para la solución del problema de las tangentes, como encontramos ideas germinales de lo que es la recta tangente en la obra de Copérnico implementamos una secuencia didáctica en donde nuestra intención es que a partir de la interacción herramienta matemática-actividad los estudiantes pudieran construir significados, en este caso específico que una curva se comporta como una recta cuando hay dos puntos infinitamente cercanos de la misma, para esto se hizo uso de elementos geométricos que los estudiantes podían utilizar como herramienta para llegar a sus conclusiones.

Posteriormente en la secuencia didáctica 2 se retomo la idea anterior, y nuestra intención es que al desarrollarse la secuencia los estudiantes pudieran construir significados tales como que una pequeña recta al extenderse se convierte en una recta tangente y tiene una cierta inclinación, además que se puede intuir que su posición va a ir cambiando, todo esto a partir de elementos geométricos como son la semejanza de triángulos rectángulos que fueron usados con Newton y que también pueden ser utilizados en una didáctica actual . En la secuencia didáctica tres se retoman los elementos anteriores pero se refuerza la idea con lo expuesto por L'Hospital en su obra en donde enuncia que un punto de una curva es un pequeño segmento infinitesimal y que al extenderse en ambos sentidos se forma la recta tangente la cual va a ir cambiando de punto en punto. Se diseño la secuencia también con la intención de que se usara lo visto hasta ese momento para resolver un problema para calcular la velocidad instantánea de un cuerpo que se lanza verticalmente hacia arriba. En la secuencia didáctica

cuatro se retoman los elementos anteriores pero ahora se usan elementos de tipo algebraico por medio de los cuales se puede obtener una expresión matemática la cual represente una razón de cambio instantánea. Por último en la secuencia didáctica 5 en una de las últimas actividades se tiene la intención de que los alumnos a partir de la gráfica de una curva de polinomio de grado tres (a los alumnos no se les da la ecuación) se les pide que encuentren la gráfica de la función derivada, es decir al diseñar la secuencia se tiene la intención de que los estudiantes usen el objeto construido ahora como una herramienta matemática. Esta propuesta problematiza sobre la construcción de la recta tangente variacional, lo cual nos permitirá hacer un rediseño del Discurso Matemático Escolar.

En una etapa posterior de la investigación pretendemos hacer un análisis de los datos obtenidos con lo cual pretendemos dar cuenta de cómo a partir de los elementos teóricos mencionados en nuestro marco teórico y puestos en marcha a partir de las secuencias didácticas los estudiantes podrán construir conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 1 (1), 40-55
- Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Cantoral, R. (1988). Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada. En Hitt, F., Figueras, O., Radford, L. y Bonilla, E., *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. (Vol. Único, pp. 381-386), Guatemala.
- Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.
- Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad* México: Iberoamérica.
- Castañeda, A. (2004) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México
- Castañeda, A. (2009) Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379-1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada*. México: Díaz de Santos.
- Gascón J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4 (2), 129-159.
- González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Martínez, R. (2005). *La Pendiente y su variación: un estudio didáctico y cognitivo*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.
- Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 69-90.
- Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la tangente*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.
- Serna, L. (2011) Estudio Socioepistemológico del desarrollo de la recta tangente. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 825-834. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Zemelman, H. (2005). Formación de sujetos y perspectivas de futuro en América Latina. En M. Escorza (Ed), *Discurso Pedagógico. Horizonte epistémico de la formación docente*. (pp. 1-9), México: Editorial Pax México.