

MATERIALES DIDÁCTICOS EN PRECÁLCULO. UN ESTADO DEL ARTE

María Ordaz, Reyna Chan, Gaspar Arceo

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán

México

oarjona@uady.mx, reyna_chan@hotmail.com, gaspar_arceo@hotmail.com

Resumen. En el presente documento presentamos los avances de una investigación de carácter documental y descriptiva. Estos avances se centran básicamente en la primera etapa que es en la que nos encontramos. Consiste en la revisión de artículos de investigación en matemática educativa y selección de aquellos que contengan propuestas didácticas en el área de Precálculo. El objetivo de esta investigación es generar un estado del arte de propuestas didácticas en Precálculo que en matemática educativa se han desarrollado en la última década y caracterizar elementos de corte investigativo e innovador a través del análisis de dichas propuestas.

Palabras clave: precálculo, investigación, innovación, estado del arte

Abstract. In this document we present the research advances of a documentary and descriptive kind. These advances basically focus on the first stage which is in where we are. It consists in the review of research articles in mathematics education and selection of those that contain educational proposals in the area of PreCalculus. The objective of this research is to generate a state of the art of didactic proposals in PreCalculus which in mathematics education have been developed in the last decade and characterizing elements of investigative and innovative cutting through the analysis of these proposals.

Key words: precalculus, investigation, innovation, state of the art

Introducción

En los resultados de la Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE) aplicada en el 2009 en México, se reporta que el 46.1% de la población estudiantil evaluada de nivel medio superior tiene un dominio Insuficiente de habilidad matemática. Mientras que en el Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Informe PISA por sus siglas en inglés (Programme for International Student Assessment), en su edición del 2009 se reporta que el 36.7% de la población estudiantil mexicana de nivel medio superior evaluada está por debajo del nivel I (insuficientes para acceder a estudios superiores y desarrollar las actividades que exige la vida en la sociedad del conocimiento). Con base en estos porcentajes presentados en dos diferentes pruebas, podemos ver que las habilidades matemáticas de varios alumnos en México de nivel medio superior, hasta el año 2009, son deficientes y por debajo de los requerimientos actuales de la sociedad. En la matemática educativa se estudian “temas relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas” (Ortiz, 2004, p. 172) y por medio de esta se pretende dar solución a los problemas generados en la escuela y disminuir los porcentajes negativos de aprovechamiento en esta asignatura.

Es así que la elaboración de propuestas didácticas centradas en el aprendizaje y no en la enseñanza, es decir, actividades que propicien que sea el estudiante quien construya su propio conocimiento a través de su actividad, y con base en su práctica dentro de situaciones reales o aplicativas sea él quien modele, prediga o visualice, se hacen una necesidad.

Una de las asignaturas donde se pudieran observar esas aplicaciones adaptables a situaciones reales dependiendo de la cultura de cada sociedad es el Precálculo, entendemos por Precálculo como aquella asignatura en donde se presenta el concepto función el cual es empleado posteriormente en temas relacionados al Cálculo como los son los límites, las derivadas y las integrales, dependiendo del sistema educativo pueden contemplarse otros conceptos en Precálculo, por ejemplo en la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México se manejan dentro de ésta asignatura los conceptos Inecuaciones así como las Series y sucesiones, todos estos conceptos son los que entenderemos como relativos al Precálculo. Ejemplo de las aplicaciones sociales del Precálculo son las funciones a través de las cuales se pueden modelar el crecimiento de poblaciones humanas en diferentes lugares. Adicional a esto hay que considerar la importancia dentro del mismo plan de estudios, ejemplo de esto es el plan de estudios para bachillerato de la UADY donde se escribe que esta asignatura relaciona entre sí los conocimientos previos de álgebra, de las geometrías plana y analítica, y de trigonometría visto en los semestres previos, además de vincularlos con los conocimientos que el alumno posee de otras ciencias como física o biología.

Por otra parte, el profesor y su práctica docente tienen especial importancia en el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que como reportan Jarero y Ordaz (2007, p. 131) “son las prácticas docentes las que en mayor medida condicionan y delimitan tanto lo que los estudiantes han de aprender como la forma de hacerlo”. Es así que en la matemática educativa se reconoce la necesidad de realizar estudios en la línea Formación de profesores, realizando estudios como son aquellos centrados en las creencias y concepciones de los profesores, sin embargo, poco se ha abordado sobre los materiales que debieran incorporarse en los cursos de formación de profesores, que posteriormente el docente pudiera incorporar al aula, estos materiales son las actividades o propuestas, como se mencionó anteriormente, centradas en el aprendizaje que propician en el estudiante la construcción de su propio conocimiento a través de su práctica.

Generalmente estas actividades son presentadas a los alumnos a través de los libros de texto, Dalcín y Olave (2007, p. 161) afirman que “el desarrollo de las ideas matemáticas no debiera ser tan lineal como lo presentan en general los libros de texto”; por nuestra parte consideramos que los conceptos debiesen aparecer en los materiales didácticos desde su génesis, es decir, que el concepto no solo sea visto como algo acabado sino como algo en

construcción. Por esto, los materiales involucrados en la construcción del conocimiento matemático son de vital importancia, pues el concentrado de conceptos que se estudian en un curso de matemáticas y en especial en Precálculo, son sugeridos en los materiales que usen, así como también el tratamiento que se proporcione a los conceptos, el problema es que los materiales empleados por los docentes durante las sesiones de clase no cuentan con actividades o propuestas que generen dicha construcción de conocimiento en el estudiante, por el contrario, en ocasiones generan prácticas repetitivas de procesos.

Ahora bien, las actividades no deben surgir de la nada, sino que debe haber un análisis previo de cuáles pudieran ser las características que contribuyan a favorecer un aprendizaje significativo por parte del alumno, aquí es donde nuestro trabajo tiene cabida, ya que centramos nuestro interés en llevar a cabo un estado del arte de los trabajos desarrollados en el área de Precálculo a partir del año 2000 en Latinoamérica y España; de éstos extraeremos las características de corte investigativo y de corte innovador que estén presentes en estos documentos y que en un futuro pudieran apoyar en la creación de propuestas didácticas como las ya mencionadas.

Esto nos llevó a preguntarnos, ¿Cuál es el estado del arte de las propuestas didácticas de Precálculo centradas en construcción de conocimiento matemático de la última década?, ¿Qué características innovadoras y de investigación contienen dichas propuestas?

Para dar respuesta a estas preguntas nos propusimos alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- ❖ Generar un estado del arte de propuestas didácticas en Precálculo que en matemática educativa se han desarrollado en la última década.
- ❖ Caracterizar elementos de corte investigativo e innovador a través del análisis de dichas propuestas.

Elementos teóricos

Entenderemos *estado del arte* como la recopilación y organización de investigaciones con el fin de informarse de las producciones científicas llevadas a cabo en un área del conocimiento específico. Y como nuestro estado del arte corresponde a *materiales didácticos*, entenderemos éstos como aquellos elementos, impresos o digitales, que permiten la instrucción del alumno en un determinado tema de estudio.

Los elementos de investigación que esperamos encontrar en las propuestas son la *predicción*, entendiéndola como esquema argumentativo donde se permite construir cierta noción; la

modelación, no como una representación de expresiones algebraicas, sino más bien, como un acto de intencionalidad humana, pues un modelo es un ente para la intervención en la naturaleza, es una herramienta utilizada para comprender e intervenir en lo modelado (Arrieta y Buendía, 2003, p. 737); y la *visualización*, como “la representación concreta de relaciones abstractas y donde las ideas, conceptos y métodos en las matemáticas representan riqueza de contenidos visuales” (Guzmán, 1996, citado en Martínez, Torres, Tellería, Dibuti, 2007, p. 142), por mencionar algunos.

Y en cuanto a la innovación, nos centramos en una de sus variantes, la denominada *innovación educativa*, esto son aquellas características que generan algún tipo de cambio favorable en las prácticas educativas. Estos cambios se darán en alguno de los elementos de lo que llamamos, para fines de este trabajo, *cuadrilátero didáctico*, profesor-alumno-saber-ambiente, este último elemento se anexó debido a que es el espacio donde se da la interacción entre los tres elementos del conocido triángulo didáctico, quedando de la forma en que se puede ver en la imagen I.

Los cambios en estos elementos se espera que estén relacionados con los elementos de investigación, mostrando así que existe una conexión entre la investigación y la innovación, y que no son ajenas una de la otra.

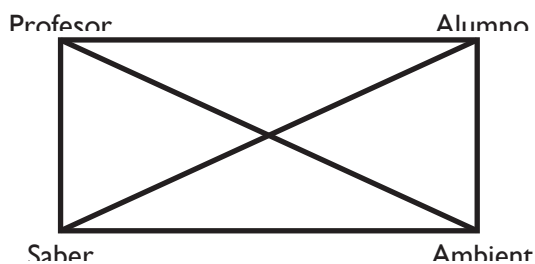
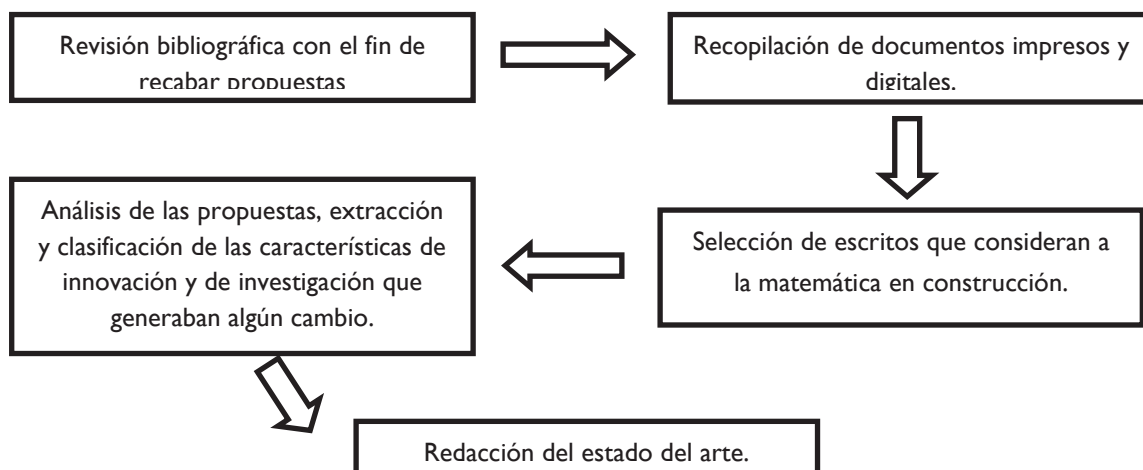


Imagen I. Cuadrilátero didáctico

Método

Este es un estudio de carácter documental y descriptivo que consta de las siguientes etapas (ver Esquema I).



Esquema I. Fases del trabajo

Los artículos se seleccionan de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, la Revista Unión, la Revista Premisa, la Revista Números, la Revista Digital Matemática, Educación e Internet y las Memorias de la Escuela de Invierno de Matemática Educativa. De éstas se consideran aquellas propuestas didácticas donde se propicie un cambio favorable en alguno de los elementos del cuadrilátero didáctico y no generen prácticas repetitivas por parte del estudiante tales como las mostradas en la siguiente imagen 2.

Actividad 1

1.- Siendo $P = (2 ; 3)$ un punto de la gráfica de una función de proporcionalidad directa, creciente, con dominio en los Reales y denominando O al origen del sistema de coordenadas cartesianas:

- Escribe las coordenadas de otro punto A perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; A) sea mayor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para A? Hallar la distancia (O; A) y la distancia (O, P)
- Escribe las coordenadas de otro punto B perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; B) sea menor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para B? Hallar la distancia (O, B)
- Escribe las coordenadas de otro punto $C \neq P$ que pertenezca a la gráfica de la función y tal que la distancia (O; C) sea igual a la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para C? Hallar la distancia (O, C)
- Encuentra las ordenadas de otros puntos pertenecientes a la gráfica cuando la abscisa toma los valores: 20 ; -200 ; 105 ; $2/3$ y $5/7$?

Imagen 2. Ejemplo de matemática construida. Tomada de Rey, Forcinito, Lazarte y Hernández 2005

Actividades como esta no generan conocimiento nuevo en el estudiante sino prácticas repetitivas y en ocasiones mecanizadas de procesos que él ya conoce, en este caso hallar distancias o coordenadas de puntos, a este tipo de matemática donde el concepto es el punto de partida del cual se basa el alumno para llevar a cabo los reactivos de la propuesta la denominamos *matemática construida*. El tipo de matemática que nos interesa es la que llamamos *matemática en construcción*, es decir, aquella donde el alumno, a través de la puesta en escena

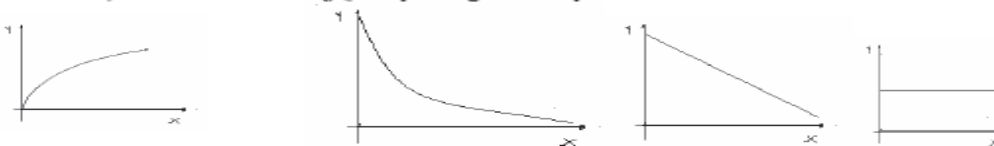
de la propuesta, y con base en su práctica, genere en sí los conceptos matemáticos que se desee que obtenga. Ver Imagen 3 y 4.

Problema

En la siguiente tabla se encuentra los progresos de sus grandes alcances de la velocista sonorense Ana Gabriela Guevara con sus mejores tiempos en los 400 metros planos hasta el año 2003.

Año	Tiempo (segundos)
1996	54:75
1997	52:46
1998	50:65
2000	49:70

a) Al leer los datos ¿Qué tipo de gráfica esperas?



b) Realizar su representación gráfica.

c) ¿Coincide con la conjetura de la pregunta a)?

d) ¿Cómo se comporta el tiempo registrado por Ana de 1996 al 2003?

Imagen 3. Ejemplo de matemática en construcción 1. Tomada de Flores 2005

Actividad n° 1. Reconocimiento y descripción de la variación [captación cualitativa]

Se le entrega a cada equipo de estudiantes una pelota y se les pide que describan el movimiento del objeto cuando se deja caer a cierta altura.

Imagen 4. Ejemplo de matemática en construcción 2. Tomada de Villa 2008

En las imágenes de los trabajos de Flores y Villa podemos ver que con ayuda de las instrucciones y los reactivos el alumno puede transitar entre registros de representación (del tabular al gráfico) y hacerse una idea del tipo de relación que guardan los datos (lineal, exponencial, constante, etc.) como en el caso de la imagen 3 y hacer sus propias conjeturas de qué es lo que puede ocurrir al realizar un experimento, qué variables intervienen, cómo se relacionan entre sí, etc. como se ve en la imagen 4.

Resultados

Los elementos de investigación fueron analizados desde el punto de vista de cómo contribuyen en la construcción del conocimiento matemático en Precálculo. En este aspecto encontramos a la predicción y modelación como una práctica relacionada con la intencionalidad humana, es decir, son elementos que se vinculan con el qué hacer de los estudiantes (ver Imagen 5).

Un cuerpo se encuentra frente al sensor; ¿cómo debe ser el movimiento de dicho cuerpo para que la gráfica resultante sea del siguiente tipo?

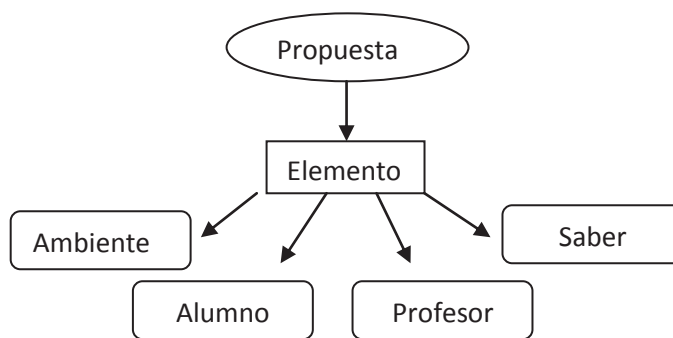


Imagen 5. Predicción y Modelación relacionadas con las prácticas humanas. Tomada de Arrieta y Buendía 2003

En el ejemplo anterior, podemos notar que es el estudiante quien describe un movimiento del móvil, teniendo que realizar un ejemplo con palabras del modelo, así como también recrea un movimiento con el propósito de predecir una nueva gráfica que se ajuste a ciertas condiciones como por ejemplo ¿Cómo tendrá que ser el movimiento para que la gráfica se desplace hacia arriba o hacia abajo? ¿Cómo sería la gráfica si el movimiento es más rápido o más lento?

En cuanto a la visualización, esta es encontrada con el propósito de vincular experiencias del estudiante con los conceptos u objetos matemáticos, en el sentido que es el estudiante quien observa y analiza ciertas imágenes de gráficas para después relacionarlas con prácticas propias, como en el ejemplo anterior, el estudiante relaciona las gráficas con movimiento que puedan caer en su mismo contexto sociocultural; es decir, al observar las gráficas, los estudiantes pueden relacionarlas con trayectorias cotidianas como por ejemplo, ir a su recámara, cierto paso de baile, etc.

Al identificarán los elementos de investigación presentes en las propuestas, se analizan los cambios generados en cada uno de los elementos del cuadrilátero didáctico; por ejemplo, se observa cómo se propicia la visualización en la propuesta y qué cambios favorables para la construcción del conocimiento genera en el ambiente, en la práctica del alumno, en el rol del profesor y en el saber; posteriormente se analizará cómo se propicia la predicción y los cambios que genera, y así sucesivamente para los demás elementos de investigación que se hallen en cada propuesta generando un esquema como el siguiente:



Esquema 2

Del análisis de las propuestas se espera poder concluir cuáles son las tendencias al realizar propuestas didácticas en Precálculo, por ejemplo acerca de qué tema se han desarrollado más trabajos, en qué país se han desarrollado más, cuáles son los recursos más empleados, cuáles son los elementos de investigación más favorecida y los cambios más significativos, por mencionar algunos.

Referencias bibliográficas

- Arrieta, J. y Buendía, G. (2003). Diseño de situaciones desde una perspectiva de la actividad humana. En J. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(2), 735-740. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Dalcín, M. y Olave, M. (2007). Ecuaciones de primer grado. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 156-161. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Flores, C. (2005). Características de las gráficas y su relación con la modelación de situaciones de movimiento. En G. Martínez Sierra (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19. 406-412. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2009). *Información sobre México en PISA 2009*. Recuperado el 6 de agosto del 2011 de http://www.inee.edu.mx/archivosbuscador/2011/02/INEE-201102297-informacion_pisa2009.pdf
- Jarero, M. y Ordaz, M. (2007). Prácticas discursivas y libros de texto. Un estudio de sus relaciones en las clases de matemáticas. En G. Buendía Ábalos y G. Montiel Espinosa (Eds.). *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 131-140). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.
- Martínez, D., Torres, A., Tellería, A. y Dibuti, L. (2007). Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior. En C. Crespo Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 138-143. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ortiz, L. (2004). Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 7(2), 171-185.
- Rey, M., Forcinito, S., Lazarte, G y Hernández, C. (2005). Ecuación de la recta: una ingeniería didáctica para su enseñanza. En G. Martínez Sierra (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19. 48-54. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Secretaría de Educación Pública (2011). *ENLACE. Media Superior 2011. Resultados nacionales por entidad. Matemáticas*. Recuperado el 12 de abril del 2012 de http://enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/

Villa, A. (2008). El concepto de función: una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21, 245-254. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.