EL PAPEL DE LA NOCIÓN DE CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN LA RESIGNIFICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Guadalupe Cabañas-Sánchez, Ricardo Cantoral
Universidad Autónoma de Guerrero México
Cinvestav-IPN
gcabanas.sanchez@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. El artículo analiza desde las prácticas del salón de clases, una resignificación del concepto de integral definida –visto como área bajo una curva– con estudiantes de una licenciatura en matemáticas, desde una perspectiva que articula usos, contextos y procedimientos del área con la conservación del área de regiones planas. Los usos del área evolucionan en las explicaciones de los estudiantes al conservar una medida de área a través de transformaciones geométricas y analíticas. Se reconocen en este proceso, atributos de las regiones de áreas objeto de estudio, como su forma, tamaño y posición relativa, al representar la medida de área de ciertas regiones. Se estudió el papel de la conservación del área en el contexto de polígonos convexos y no convexos, así como en regiones limitadas por la gráfica de una función polinómica, continua y positiva en un intervalo cerrado.

Palabras clave: integral definida, resignificación, práctica social y conservación del área

Abstract. This paper analyzes from classroom´s practices, how the concept of definite integral –as a area under the curve– is re-meaning by university students, from a perspective that links the uses, contexts and procedures of the area with the conservation of the area on plane regions. The uses of the area evolve in students explanations when they conserve the measurement of the area through of geometrical and analytical transformations. It is recognized in this process, attributes of the regions of the studied area, as form, size and relative position, when the measurement of the area of some type of regions is represented. We studied the role of the conservation area in the context of convex and non convex polygons, and in limited regions by the graph of a polynomial function, continuous and positive on a closed interval.

Key words: definite integral, re-meaning, social practice and conservation of the area

Introducción

El artículo analiza desde las interacciones en el salón de clases de matemáticas, una *resignificación* del concepto de integral definida. Esta resignificación se establece a través de una manifestación de desarrollo de usos del área, que emergen de *conservar una medida del área* relativa a regiones planas. Este desarrollo de usos evoluciona al transitar de transformaciones realizadas sobre objetos geométricos y analíticos. Como consecuencia de las acciones que se llevan a cabo en ese proceso, emergen explicaciones en torno a la *conservación del área*. Es así que esta noción se instaura en función *normativa* de la actividad matemática del aula, al ubicar las explicaciones de los estudiantes y su profesor en aspectos como: *forma*, *tamaño* y *posiciones relativas* de las regiones de área involucradas, en lugar de situar su discurso únicamente hacia conceptos, proposiciones, procedimientos, símbolos y fórmulas matemáticas, importantes sin duda; aunque en este trabajo, el centro está en la significación a partir de ello. La pregunta que guía este trabajo es la siguiente: ¿Con base en qué condiciones se resignifica el concepto de integral definida por estudiantes universitarios, desde una perspectiva que articula usos, contextos y procedimientos del área en la matemática, con la conservación del área en transformaciones geométricas y analíticas?

El estudio se estableció a dos niveles, teórico y de experiencia de aula. En ambos, el rol del profesor devino protagónico. En el primero, durante la concepción de la experiencia, que radicó en el diseño de una situación de aprendizaje, y en el segundo, durante la gestión que hizo de la construcción de conocimiento matemático, la cual se instituyó por medio de una relación funcional en el salón de clases.

Aspectos metodológicos

Orientación teórica

El estudio se aborda desde la *Socioepistemología*, teoría que se interesa por explicar de manera sistémica los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas desde una perspectiva múltiple, incorporando el estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural y los procesos cognitivos. Desde esta teoría, el énfasis se pone en modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento, con el fin de crear otro tipo de discurso, y con ello a su vez, "romper" con la centración de los conceptos que normalmente se evidencia en el discurso matemático escolar. La noción de conservación del área en este trabajo desempeñó ese rol, al *normar* las acciones de un profesor y sus estudiantes en diversas etapas de la explicación de la integral definida; en consecuencia, el centro del discurso en ese proceso.

Una epistemología de la integral definida

La resignificación de la integral definida se sustenta en un análisis *a priori* que consiste de un estudio didáctico, cognitivo y epistemológico acerca del área e integral (véase Cabañas-Sánchez, 2011a). Asimismo, de las aportaciones derivadas de los estudios de Piaget, Inhelder y Szeminska (1970), Freudenthal (1983), Kordaki & Potari (1998) respecto de la existencia de una particular relación entre el área y la medición; de la medición y la comparación, y de todas estas con la conservación. Otros elementos, se retoman de Stewart (2006), así como las nociones de uso, contextos y procedimientos provenientes de la socioepistemología. A nivel de experiencia de aula, nos apoyamos en un modelo estratégico propuesto en Cabañas-Sánchez (2011a, 2011b) que consiste de tres niveles: *macro*, *meso* y *micro*. En el primero ubica las prácticas a nivel proyecto de una lección, en el segundo, la configuración de una situación de aprendizaje,lasformas de organización, comunicación e interacción en el aula, y; en el nivel *micro* se ubica la gestión que el profesor hace del conocimiento matemático.

La resignificación se estableció en un contexto estático. La trayectoria que sigue el desarrollo de usos transita por la Geometría y la medición, hasta los Principios del Análisis. En una primera etapa se exploraron sobre polígonos convexos y no convexos. Las etapas que siguieron mediante transformaciones analíticas, donde el objeto función, la noción de continuidad, partición del intervalo, sucesión, límite, límite de una sucesión y sumas de Riemann devinieron protagónicos. Este desarrollo de usos fue gradual, transitó por el análisis de casos particulares, que los situó a probar de forma empírica, como un primer movimiento validativo, a determinar una medida de área aproximada, para dar paso a procesos deductivos formales y con ello construir la definición de integral. Comprendió elementos como los contextos y procedimientos en que se presenta el concepto de área en la geometría y la medición y funciones polinómicas. En este sentido, la resignificación de la integral definida siguió una trayectoria que conjugó a la percepción, a la prueba y a los procesos deductivos.

La noción de resignificación

Es claro que la humanidad le ha asignado determinados significados a los objetos matemáticos. Asimismo, que en el contexto escolar, los estudiantes asocian significados propios a dichos objetos. La socioepistemología le ha llamado a este proceso, significación. La resignificación por el contrario, es el proceso en el que se modifica el significado que han construido. Así, una significación por los estudiantes sobre la integral definida podría estar asociada a los procedimientos, porque aprendieron una regla. La resignificación en esta investigación se interesó porque los estudiantes modificaran este tipo de significaciones, al conservar la medida del área de ciertas regiones planas, contribuyendo a explicaciones sobre la forma, el tamaño (medida) del área y la posición relativa con respecto del plano.

Usos, contextos y procedimientos

Entendemos por *contextos* a los entornos situacionales en los que se considera un hecho, y a los *procedimientos* como las formas de organización de una situación (Cordero, 2003). La connotación que se le da a la noción *uso* en esta investigación es en el sentido de Cabañas-Sánchez (2011a, 2011b), quien la caracteriza desde la teoría pragmática, como *las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico.*

Práctica y práctica social

a) La noción de práctica

La noción de práctica se asume desde la teoría Socioepistemología. Se entiende como un conjunto organizado de actividades o acciones objetivas e intencionales para resolver un problema dado (Tuyub, 2008). Estas prácticas, como señala Cabañas-Sánchez (2011a), están normadas por prácticas sociales y son inherentes tanto a las acciones específicas llevadas a cabo por los actores del sistema didáctico *in actu*, como a las que tienen lugar en la socialización del saber. La investigadora sostiene a su vez, la práctica conlleva una relación funcional entre grupos humanos y el conocimiento mismo. En consecuencia, se atribuye a actividades o acciones objetivas, y se evidencian en comportamientos observables por los seres humanos. Excluye por tanto, los actos mentales, internos y los estados disposicionales del sujeto (Cabañas-Sánchez, 2011b). Estos comportamientos, dicho sea de paso, representan roles de los individuos, y éstos a su vez, a las instituciones. Un esquema operativo de la práctica (Tuyub, 2008) se presenta mediante la figura siguiente.

Figura 1. Esquema operativo de la práctica, donde un conjunto de actividades organizadas con cierta intencionalidad la caracterizan (Figura 2.3.1. en Tuyub, 2008, p. 23).

Situados en el contexto de una situación de aprendizaje, estas actividades se enlazan a las del profesor y los estudiantes, cuyo fin es la construcción de conocimiento.

b) La noción de práctica social

La noción de práctica social se entiende en el sentido de Covián (2005), quien sostiene que "la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen(Covián, 2005, p.70)".

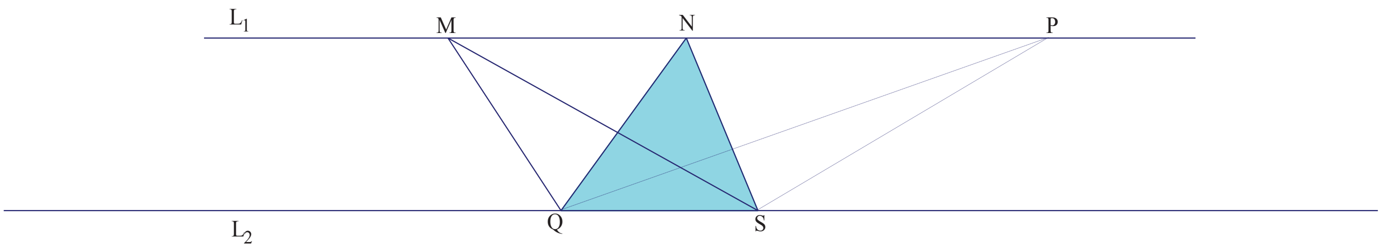
Cabañas-Sánchez (2011 b, 2011c) distingue tres funciones de la práctica social, la *normativa* (que regula), es la razón oculta; la *pragmática* (praxis o práctica), es la razón explícita, y la *discursiva* (que comunica), razón declarativa. Los estudios socioepistemológicos atienden a estas tres funciones de la práctica social. En el marco de esta investigación, el conservar el área de ciertas regiones planas, *norma* la actividad relacional que se establece en el salón de clases. La noción de conservación del área es a la vez, el medio por el cual emergen usos del área; en consecuencia, se establece como el centro del *discurso*; por ende, es la *razón explícita* de la resignificación de la integral definida.

Actividad matemática en el salón de clases

Durante las interacciones estudiante-profesor el discurso aparece regulado por el representante legal del currículo, contrario a la actividad en equipo, donde los jóvenes tienden a confrontar y evaluar argumentos de sus colegas y hacia el consenso. La discusión en equipo, favoreció además, la evolución de significados alrededor de los usos del área, así como los procedimientos y los contextos, sin ser estos dos últimos el centro.

Veamos tres ejemplos, uno asociado a polígonos transformaciones geométricas (Actividad I.2) y dos a las analíticas (Actividades II.4 y V.2.)

Actividad I. 2. Los triángulos MQS, NQS y PQS están construidos sobre las rectas paralelas L1 y L_2. ¿Qué relación encuentras entre las áreas de los tres triángulos? Argumenta tu respuesta.



En esta actividad los argumentos emergieron de las acciones realizadas sobre transformaciones geométricas establecidas, en la que se pidió esclarecer qué garantiza el que la medida del área de tres polígonos convexos construidos entre dos rectas paralelas (triángulos), permanezca invariante (se conserve). En ese proceso, se comparó e incluso se determinó la medida del áreas. Otro aspecto a explorar fueron las relaciones que establecieron entre la *forma* de los polígonos, el *tamaño* del área (o medida) y las *posiciones relativas* que guardan las figuras.

Los estudiantes pocas veces aceptan el *cambio* en la *posición* de los polígonos. Por ejemplo que el triángulo MQS se transforma en el triángulo NQS o en el PQS, al mover el vértice Q o bien que el triángulo PQS se transforma en el MNQ o en el NQS. El cambio de posición lo aceptan siempre que *se mueva* toda la figura. Con relación a los usos del área, aparecieron con frecuencia en las explicaciones tanto del profesor como de los estudiantes en la *comparación,* al momento de explorar relaciones entre las áreas de los polígonos. La *medición*, en argumentos que se apoyan de la fórmula para calcular el área de los triángulos, por ejemplo al afirma: "…como tienen misma base y misma altura…por la fórmula… base por altura sobre dos… las áreas son iguales…". Respecto de la *representación* del área*,* al construir otros triángulos con la misma medida de área a los originales.

Actividad II. 4. En la tabla siguiente se muestran los resultados del cálculo de aproximaciones del área bajo la curva $f(x) = x^2$ cuando se divide al intervalo [0, 1] en 4, 10, 20, 30, 50, 100 y 1000 subintervalos. Analiza los datos.

No. Rectángulos	Aproximación inferior	Aproximación superior
4	0.21875	0.46875
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
50	0.3234000	0.3434000-
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

¿A qué valor se aproxima el área de la región R al aumentar el número de rectángulos?

Los estudiantes observan que los datos de la primera columna "*crecen*" y los de la segunda "*decrecen*". Una mayoría, relacionó el comportamiento de estos datos con el límite superior y el inferior del intervalo, por ello es que el "crecimiento", en sus propias palabras, es que se aproxima a uno y el decrecimiento, a cero. Veamos la discusión que tuvieron Elena y Carlos durante la actividad en equipo, una de las formas de organización de la actividad en el aula.

[829] Elena: Se aproxima a uno porque va aumentando entonces va a llegar un momento que va llegar a ser… se va a aproximar a uno.

[830] Carlos: Nooo … no puede aproximarse a uno el área… porque se supone… que tienes esto … **no va a tender a uno** el área… y tienes algo así (representa el cuadrado que se forma de la intersección entre las rectas que traza desde el eje *x* e *y* tomando como base al intervalo)… tienes aquí un triángulo rectángulo (sombreó el triángulo curvilíneo que se forma por encima de $y=\sqrt{x}$ en el intervalo [0,1])... y este es 0.5 (región de área por encima de $y=\sqrt{x}$)…y tienes aquí 0.5, tiene que ser menor que 0.5 de hecho ni a 0.5 puede llegar, porque es ilógico… lo más lógico es 0.333333 333….. Pero si ya tenemos así… podemos observar así 100, 10000 100000 podemos observar su comportamiento… de manera…. Porque aquí van a llevar un orden… ya es constante la diferencia…si los tendemos hasta… infinito podemos llegar a 33333 pueden llegar a un tercio… a lo más pueden llegar a un tercio.

Apoyándose de argumentos visuales, así como analíticos, Carlos "convence" a Elena de que la medida aproximada del área objeto de estudio es menor que uno (ver figura 2).

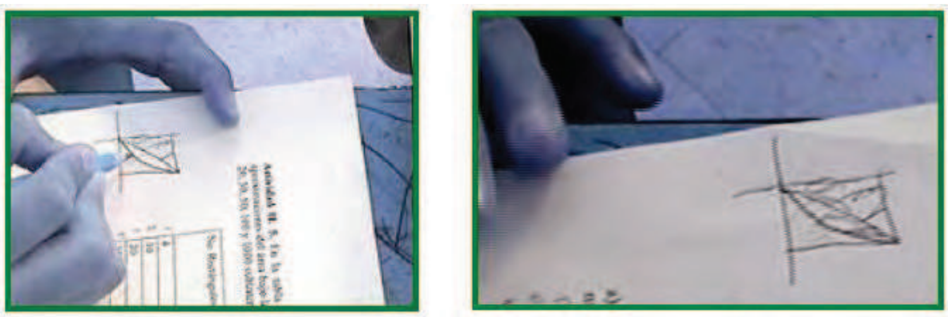


Figura 2. Argumentos visuales

[831] Carlos: … Pero si ya tenemos así… podemos observar así $\int_0^3 \frac{1}{2} x\,dx$ 100, 1000, 100000 podemos observar su comportamiento… de manera…. Porque aquí van a llevar un orden… ya es constante la diferencia…si los tendemos hasta… infinito podemos llegar a 33333 pueden llegar a un tercio… a lo más pueden llegar a un tercio.

*Actividad V.2.*Interpreta gráficamente, los resultados de las integrales siguientes. $\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{x+1}\,dx$ 2. $\int_1^2 m^2\,dm$

1. $\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{x+1}\,dx$ 2. $\int_1^2 m^2\,dm$ 3. $\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{n}\,dn$

Aun cuando el centro de las explicaciones se orientaron hacia los usos del área, se observó que algunos estudiantes significan a la integral definida por medio de la resta; se reconoció por expresiones como la siguiente: "*no estoy seguro de cómo expresar la resta*". Es decir: 2. $\int_1^2 m^2\,dm$ 3. $\int_1^4 \frac{1}{2} n\,dn$ 3. $\int_1^4 \frac{1}{2} n\,dn$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Es claro que este tipo de significados están asociados a las explicaciones del profesor, las involucraron a la técnicas de integración. Por cuanto a los usos del área que emergieron de los argumentos de los estudiantes fueron la medición, la comparación, conservación y representación. Ello, al representar y comparar las regiones de área involucradas en ese proceso. En sus explicaciones, aludieron además, a aspectos como *forma* y la *medida del área.* Ante preguntas expresas del profesor sobre la *forma* de las regiones, las respuestas de los jóvenes se enfocaron a las gráficas de las funciones, más que a la región de área que las limitan.

[1745]	Profesor:	¿En qué se parecen?
[1746]	Luis:	Solamente en el área
[1747]	Profesor:	¿Y las regiones?
[1748]	Luis	Son diferentes
[…]		
[1755]	Profesor:	¿Cómo es la forma de las regiones?
[1756]	Israel:	Su forma es diferente… las únicas que son casi similares son la última y la primera.
[1757]	Profesor:	¿La primera y la última?
[1758]	Israel:	La primera y segunda gráfica … éstas…

Reflexiones finales

La conservación del área de regiones planas, favoreció el que una mayoría de los argumentos de los estudiantes estuviesen centrados en los usos, contextos y procedimientos en que se presenta en concepto de área, así como a su evolución, contribuyendo con ello a la resignificación de la integral definida. Sus explicaciones y argumentos se enfocaron en aspectos como: *forma,tamaño* y *posicionesrelativas,* resultado de conservar la medida de un área en regiones planas. Durante las interacciones en el salón de clases, algunos momentos de la actividad del profesor muestran que su discurso orienta las acciones de los estudiantes hacia los procedimientos algorítmicos más que hacia los significados; el que las dificultades y errores se comprendan como un obstáculo en el aprendizaje en lugar de usarlos de forma constructiva.

a) El desarrollo de usos, contextos y procedimientos

En las transformaciones geométricas los estudiantes transitaron por los usos del área sin dificultades, en un principio apoyados por su profesor a fin de que centraran su atención en aspectos como *forma*, *tamaño* y *posición relativa* respecto del plano cartesiano. Su experiencia con la matemática en tópicos de Geometría era fuerte, aunque a nivel algorítmico. Se exhibió por ejemplo, que además de usar sus propios recursos, exploraron diversos métodos, que compartieron en la fase de trabajo grupal. Un obstáculo de tipo epistemológico fue la palabra "transformación". Una mayoría de jóvenes acepta sin discutir que toda transformación conduce a cambio de forma de los objetos geométricos, su experiencia previa así los indicaba. Lo asociaban a las acciones: descomponer y recomponer o en la construcción de figuras geométricas a partir de una dada. Otro obstáculo, de tipo didáctico, surgió por en su interacción con los polígonos no convexos. El estudio contribuyó a que modificaran este tipo de obstáculos.

a.1) Usos, contextos y procedimientos del área en transformaciones geométricas

Por cuanto a la evolución de los usos del área, las actividades del diseño contribuyeron a que:

- El centro de las explicaciones de los estudiantes estuviesen más que en los procedimientos en los significados. Apareció de modo más natural en las transformaciones geométricas. En las analíticas, un cambio de dio en la explicación de la integral definida, al momento de su definición, cuyo centro fueron conceptos, teoremas y procedimientos, aun cuando midieron, aproximaron, compararon y representaron una región de área.
- Posterior a la definición de la integral definida, los argumentos de los estudiantes estuviesen enfocados a medir, conservar, comparar y representar el área de regiones limitadas por la gráfica de una función continua y positiva en un intervalo cerrado.
- Los estudiantes establecieran relaciones de equivalencia entre representaciones geométricas con entidades analíticas y geométricas mediante diversos procedimientos.

Tales relaciones las establecieron o por medio de fórmulas o relaciones algebraicas o bien, mediante la relación de congruencia.

- Los estudiantes reconocieran comportamientos a partir de las transformaciones analíticas que llevaron a cabo, contribuyendo además, a que establecieran "generalizaciones" en donde aparecen familias de funciones, al comparar resultados que correspondían a una medida de área que conservaron.

a.2) Usos, contextos y procedimientos del área en transformaciones analíticas

Los usos del área que pusieron en juego en las transformaciones analíticas por medio de sus argumentos, fueron: las medición, comparación, estimación y representación del área. El contexto: las funciones polinómicas continuas y positivas, un intervalo cerrado y la partición del intervalo. Los procedimientos se sustentaron en: a) métodos de aproximación por exceso y por defecto, b) sumas de Riemman, y: c) métodos y técnicas de integración principalmente. Se observó una tendencia por describir la definición de la integral definida mediante la "resta":

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Incluso, que algunos "olvidaron" cómo escribirla. Surgió así, otra dificultad para resolver integrales.

b) La situación de aprendizaje

Respecto del diseño, se percibió por el profesor que algunas actividades concebidas básicas en el estudio, contribuyeron al uso de procedimientos algorítmicos laboriosos. Particularmente las que exploran el valor aproximado de la medida del área de una región limitada por una función siempre continua y positiva, la cuadrática. Nuestra tesis es que el uso de la tecnología evitaría en gran medida la aparición de este tipo de fenómenos.

Esta investigación evidencia que la noción de conservación del área contribuye a que el centro de los argumentos de los estudiantes se orienten hacia la medición, comparación, conservación y representación del área, donde los procedimientos también son importantes, sin ser el fin último.

Referencias bibliográficas

Cabañas-Sánchez, G. (2011c). Prácticas matemáticas asociadas al desarrollo de usos del área en el estudio de la integral definida. *Memoria de la XIV Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 183-190.

Cabañas-Sánchez, G. (2011b). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.México.

Cabañas-Sánchez, G. (2011a). Prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 787-792

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Editorial Iberoamérica.

Covián, O.N. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la Cultura Maya.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.México

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holland: D. Riedel Publishing Company.

Kordaki, M. & Potari, D. (1998). Children´s Approaches to Area Measurement Through different Contexts. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17*(3), 303-316.

Lezama, J. (2005). Una Mirada socioepistemológica al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 339-362.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1970). *The Child´s conception of geometry*. New York: U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.

Stewart, J. (2006). *Cálculo Multivariable*. México: Thomson.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modela de la construcción social del conocimiento*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.México.