EL INFINITO COMO EVIDENCIA DE CONFLICTOS EN DISCURSO DE LOS DOCENTES

Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
patricialeston@gmail.com

Resumen. El infinito ha sido estudiado a lo largo de los años y desde diversos marcos teóricos, con múltiples objetivos: el acercamiento de esta noción al aula, la identificación de obstáculos, la evolución del concepto, sólo por mencionar algunos. En nuestro caso, la búsqueda estuvo guiada por la necesidad de comprender los motivos por los cuales existen tantas dificultades en la construcción de nociones asociadas al cálculo, que entendemos, descansan sobre la noción de infinito, desde una visión socioepistemológica. En este estudio, hemos encontrado que el discurso matemático escolar, y los docentes, como representantes de ese discurso, plantean en las aulas situaciones y lenguajes que generan conflictos: el discurso se mueve en dos campos, uno analítico y uno algebraico, tanto para las funciones como para el infinito, que hacen que el alumno se sienta enfrentado continuamente entre lo que se dice, lo que se define y lo que se hace.

Palabras clave: infinito, contradicciones, práctica social

Abstract. The concept of infinite has been studied through centuries from different theoretical perspectives, with many different purposes: how to take this idea to school, what obstacles emerge from its study, the historical evolution of the concept, among others. In this case, our quest, from a socioepistemological point of view, was based on the need to understand the reasons that make calculus so hard for students, with the strong belief that is the infinite hiding beneath that makes this happen. In this research, we have detected that teachers as representatives of the mathematical scholastic discourse present their students with actions, words and ideas that contradict each other, mixing algebraic and analytical references, both for infinite and functions. That behavior causes students to get lost in a scene where they are faced with contradiction between what is said and done.

Key words: infinite, contradictions, social practice

Introducción

El infinito es un concepto que a lo largo de la historia atrajo a pensadores de diversas áreas del conocimiento por las dificultades en su tratamiento y abordaje científico y didáctico. Al incluirlo en la ciencia provocó numerosas paradojas y contradicciones que hicieron que durante siglos no fuera posible un tratamiento formal del mismo Sin embargo, difícilmente podríamos en la actualidad trabajar ciertos contenidos en el aula de los distintos niveles educativos, si no habláramos de este concepto.

La escuela actual responde a las necesidades de una comunidad de la que es parte, que determina qué conocimientos deben construirse al seno de ella y qué otros conocimientos pueden ser relegados o dejados de lado. El discurso matemático escolar predominante de la escuela media en la Argentina, tiene como uno de sus contenidos más relevantes a las funciones. Se incluyen en el estudio y tratamiento de las funciones gran cantidad de elementos, uno que es central en la comprensión y análisis de las funciones es la noción de infinito. Y sin embargo esa noción no es parte de ninguno de los currículos de la escuela media. ¿Por qué? Se parte del supuesto que la familiaridad del término en escenarios no escolares hace que los docentes y los investigadores que diseñan los contenidos de la escuela asuman que no es una necesidad. También se puede considerar que la complejidad propia del concepto sea una de las razones por las cuales esto ocurre.

Lo que se desea es reconocer el concepto de infinito factible de ser construido en las aulas de matemáticas. Si bien se parte del supuesto que no ocurre la construcción de esta noción en la escuela media, sí la hay en los cursos de Álgebra superior de la carrera de Profesorado en Matemática. Los futuros docentes transitan por una institución que incluye en sus diseños curriculares el estudio del trabajo de Cantor en los conjuntos infinitos y números transfinitos, lográndose así que los estudiantes de Profesorado enfrenten a sus cursos de escuela media con un constructo teórico que les permite enfrentar en el aula las situaciones que llevan a la discusión en relación al infinito.

Sin embargo, no se vislumbran en las escuelas medias propuestas de su construcción, o de discusión al menos, de lo que es el infinito. Se sigue aceptando, como se concluyera en Lestón (2008), que es lo que los estudiantes traen de los escenarios no escolares, aquello con lo que se cuenta en las aulas de escuela media. Y es sabido que eso no es suficiente ni funcional respecto a lo que el discurso matemático escolar precisa.

La investigación con ese objetivo planteado se realiza desde una aproximación socioepistemológica, que mediante un estudio sistémico y situado del conocimiento permite, a través del reconocimiento de las prácticas sociales, comprender cómo es que el infinito ha aparecido a lo largo de la evolución del conocimiento científico y se ha constituido en concepto matemático (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010).

La socioepistemología como marco teórico de esta investigación

Creemos que es la socioepistemología el marco teórico que nos ha dejado crecer en su seno, ver las realidades de nuestras aulas de la manera en que lo hacemos, y preguntarnos las cosas que nos permite esta aproximación sistémica, que pone el foco en los procesos de construcción que se dan al seno de una comunidad.

> Las investigaciones que hemos desarrollado a fin de "hacer ver" la postura descrita, han seguido una aproximación sistémica que permite tratar con las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento, a saber; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo

> y los modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido nombrada como el acercamiento socioepistemológico (Cantoral, 2001, p. 65)

La construcción social de ese conocimiento es el foco de la mirada: entender que todo conocimiento es producto de una necesidad y una serie de acciones que están sustentadas por una idea que las provoca y en un escenario sociocultural particular que permite que acontezcan.

> El dominio matemático obliga a explicar la matemática desde la matemática misma y, en consecuencia, soslaya a lo humano y a los sentidos de todo el saber matemático. Se trata, entonces, de identificar o construir aquellos marcos o prácticas de referencia en los que se manifieste el uso del conocimiento matemático; es decir, donde sucede su funcionamiento y su forma orgánica en la situación específica. Ahí aparecerán elementos que no corresponden a las justificaciones razonadas que norman alguna estructura lógica, sino que atañen a la utilidad del participante en la situación específica. Es por eso que no nos importa el estudio del conocimiento matemático, sino el estudio de la función del conocimiento matemático. (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010, p. 189)

Hay entonces una realidad socialmente compartida, una necesidad o pregunta que nace de esa realidad y una serie de acciones que ocurren al seno de una comunidad en la búsqueda de encontrar respuesta a lo que se preguntan. Sin una necesidad no hay construcción, sin uso no hay acción. La socioepistemología proclama estas ideas, declara que es ese tipo de situaciones las que debemos acercar al aula. Y propone para ello una mirada global, sistémica, compleja, que incorpora todo aquello que interviene en los momentos de construcción de conocimiento. Como eje rector de la mirada que propone el marco, se define dentro de esta aproximación teórica una noción que ha sido eje de muchas investigaciones, la de práctica social. Consideramos como definición de esta noción la propuesta por Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez Sierra (2006).

> La *práctica social* la entendemos como normativa de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica [...]En sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan más bien caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber. (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez Sierra, 2006, p. 85)

Compartimos esta idea que sustenta el espíritu de esta mirada que nos ha adoptado y que nosotros hemos aprendido a ver desde adentro. Cordero et al (2010) presentan sin dejar lugar a dudas los motivos por los cuales resulta de relevancia identificar las prácticas sociales que norman las acciones que llevan a la construcción de conocimiento matemático.

> Una vez identificadas las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático necesitan ser reinterpretadas para integrarse al sistema didáctico, donde precisan de la intencionalidad (de producción, en el sistema didáctico) para que se desarrollen en las condiciones del sistema. (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010, p. 190)

Ahora sí, sabemos cómo mirar nuestra realidad, cómo identificar lo que es importante (prácticas en lugar de objetos), y qué debemos hacer con eso que encontramos. Sin embargo, las prácticas sociales, como definen Cantoral et al (2006), no son acciones sino normativas, o sea, no son visibles. Sin embargo, otros investigadores de este campo y de esta aproximación teórica han ido desarrollando elementos que dan pautas de qué debemos tener en cuenta para ver aquello que es invisible.

Por un lado, una noción que permite situar a las prácticas sociales es la de escenariosociocultural, que define Crespo Crespo (2007), tomando como base elementos de la psicología ecológica.

> Escenario sociocultural: son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales. Están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos que constituyen las sociedades específicas. En estos escenarios se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico, o podemos decir más generalmente: culturales (Crespo Crespo, 2007, p. 7)

Los escenarios sí son visibles, podemos entender de manera directa que cada grupo actúa de acuerdo a uno de esos escenarios. Todos esos escenarios hacen aportes a la manera en que las personas piensan y entienden al conocimiento matemático. Y si bien no todas las personas son parte de todos esos escenarios, sí ocurre que por lo general, se transita por más de un escenario. Y esos contextos en los cuales se vive y se construye conocimiento e identidad, no son entes estáticos ni estancos: se superponen, se modifican unos a otros, se influyen de manera en que cada uno aporta continuamente cosas a los otros en las mentes y las manos de quienes por ellos transitan. Espinoza (2009), aporta a la comunidad y a la teoría otro elemento que construye sobre la idea de escenario sociocultural, y es la noción de contexto de significación.

> El contexto de significación de cierto conocimiento es el ámbito en el cual cierta persona o colectivo sitúa la significación de cierto conocimiento en cierto escenario sociocultural. Estos contextos nos permitieron acercarnos a la mirada de los autores respecto a sus obras, de manera de entender las intencionalidades subyacentes y las ideas germinales de las obras. Los contextos de significación de ciertos conocimientos tiene tres dimensiones: la situacional, la sociocultural y la de la racionalidad, en las cuales se sitúa la significación del conocimiento matemático. (Espinoza, 2009, p. 150)

El escenario sociocultural se transforma entonces en un ámbito de interacción sociocultural que, además de estar vivo y siendo modificado continuamente por sus actores, permite construir significados propios de una comunidad a un conocimiento de acuerdo a las necesidades y cultura propia de esa comunidad. Podemos decir que de esta manera, la comunidad que construía conocimiento en base a las prácticas sociales que normaban las acciones, tiene un ámbito que hace que esas normas estén sujetas a otras, más generales y que norman no sólo la manera de hacer las cosas sino de entender sus necesidades y proponerse preguntas que harán que aparezcan prácticas que normen acciones. La práctica social de una comunidad estará entonces sujeta a un contexto de significación que, como escenario sociocultural, hará que el problema que surge de esa realidad se aborde en función de un bagaje cultural y cuya construcción de conocimiento se dé asociada a un significado que es el necesario para los requerimientos de esa comunidad.

Identificación de las prácticas sociales asociadas al infinito

Se pueden identificar a lo largo de la historia dos procesos que van apareciendo alternadamente y que buscan dar respuesta a la misma necesidad: definir cuál es la extensión del espacio, o mejor dicho, modelizar el universo. Esa necesidad fue abordada desde Oriente y Occidente, y finalmente se llegó a esclarecer dicha extensión desde esas dos culturas, con el paso de los siglos. El Universo es infinito, pero el cómo es lo que da sentido a la diferencia que aún hoy encontramos en las aulas de matemática.

Se puede asegurar que es Newton el que primero llega a la afirmación de un universo infinito, a partir de la distinción que hace entre espacio absoluto y espacio relativo. Ese infinito del que Newton habla es el infinito físico, que existe en el espacio absoluto para que el otro espacio, el relativo, pueda existir. Lo que logra Newton con esto último es la matematización del espacio desde la geometría, es decir, se construye la geometrización del espacio, logrando así que ese infinito de la física presente en la extensión real del universo, se transforme en el infinito de la matemática, vinculado al tamaño, lugar o extensión (Koyré, 2008).

Ese infinito relacionado con el movimiento, con la posibilidad de variar de posición un objeto a lo largo del tiempo sin que nunca llegue a un lugar donde deba detenerse, es el que puede asociarse con el infinito de la geometría y el estudio de las curvas al modo que Newton las concebía, y con el infinito del análisis, al modo en que está presente en el discurso matemático escolar actual. El contexto de significación en el cual se dan estas caracterizaciones del infinito, es el contexto del análisis, reconocido como una de las producciones en las cuales Newton tuvo más protagonismo. Lo que Newton necesitaba hacer era concebir y explicar el movimiento, poder medirlo, y para eso necesitaba un marco que le quitara los límites. Eso se lo dio el universo infinito otorgando a la matemática un nuevo objeto científico. Es la medida de movimiento, en particular la "noción de cantidad" lo que hace que se dé en la historia de la matemática otra construcción del infinito, una que es concebida desde las cantidades y que es la que ha inundado al discurso matemático escolar del álgebra superior de las instituciones formadoras de docentes en la Argentina. Esa construcción es la que realizó Cantor (2006).

Cantor estaba también intentando realizar una tarea de modelización, no ya del universo sino de todo aquello que fuera conocimiento de las ciencias naturales a partir de un sistema conceptual formalmente matemático. Bajo esa idea, en la búsqueda de ese sistema, es que replantea la modelización del universo, pero no ya desde cuestiones relativas a la física, sino a las cantidades, noción que después de Newton se transforma en eje rector de muchos de los avances de la matemática (Camacho, 2004). Es en la matematización de esas cantidades, relacionadas con la extensión del espacio, que Cantor logra la definición de su infinito, el infinito de la matemática. Las cantidades de las que Cantor se ocupa se vinculan de manera directa con los números y con la acción de contar.

En ese contar, se pueden clasificar a las cantidades en contables, incontables, y aquellas que no pueden contarse por su propia naturaleza ontológica y no por la imposibilidad humana de llegar al final antes de que se le acabe el propio tiempo. Así como se dice en el párrafo anterior que Newton logra la geometrización del espacio, puede afirmarse que Cantor logra la aritmetización de las cantidades infinitas, construyendo así un infinito que responde a la noción de cardinalidad y a lo que se entiende es el infinito del álgebra, que se desarrolla dentro de ese contexto de significación.

Estos dos infinitos, el del álgebra y el del análisis, son parte del discurso matemático escolar, aunque sólo uno de ellos es parte de lo que el discurso quiere construir, aquel que Cantor logró formalizar a través de su aritmética transfinita. El otro, el de Newton, aquel que permite entender las nociones de cálculo, aparece pero es ignorado, aún cuando es evidente que su presencia no transparentada es uno de los grandes problemas de la educación media actual.

Resultado de las indagaciones realizadas

Resulta evidente que el estudio de funciones que se logra tanto en la escuela media como en el Profesorado, está determinado por el lenguaje y tratamiento conjuntista. Las funciones son así entes estáticos, que no permiten manifestaciones de variación ni representaciones de lo que cambia. Esa visión hace que quede oculto el sentido potencial del infinito que interviene en el discurso del cálculo.

Los alumnos de Álgebra III que han construido ideas asociadas a la teoría de transfinitos de Cantor, tampoco puede ver en las funciones representaciones del discurso variacional, con lo cual la seguridad que les da el conocimiento de una teoría que fundamenta el tratamiento del infinito se transforma en obstáculo para reconocer las limitaciones que ese infinito, propio y actual de Cantor, tiene frente al tratamiento de funciones.

El objetivo de la presente investigación fue planteado en dos sentidos, y es de ese modo que se pretenden analizar los resultados: por un lado, detectar las características que tienen el infinito que está presente en el discurso matemático escolar de la escuela media; y por otro, analizar cuáles son las construcciones que del infinito se hacen en la formación docente. Desde el conocimiento personal de la carrera de Profesor de Matemática, se sabe que el infinito como objeto a ser construido (al menos en una de sus manifestaciones) es parte del discurso matemático escolar del Profesorado. Y por otro lado, desde el conocimiento de lo que ocurre en la escuela media en la Argentina, se sabe que el infinito no es ni siquiera discutido tangencialmente en ese nivel educativo. El problema que se detectó tiene que ver, entonces, con las causas que hacen que esa noción, que sí es parte de lo que el futuro docente construye, no llegue a las aulas de escuela media.

Los alumnos que respondieron a cuestionarios han construido un discurso conjuntista para las funciones, pueden explicar los procesos de cálculo de límites y velocidad de cambio. Sin embargo, no pueden darle sentido a lo que significa lo que hacen o los resultados a los cuales llegan. No pueden presentar un discurso coherente en relación a lo que representa una gráfica, que pueden construir sin ningún problema cuando se les haya dado una fórmula que la representa. Resulta ser que el análisis, que es el contexto de significación del infinito de la variación, no es contexto de significación para ninguna de las nociones del análisis: ni las funciones, límites y derivadas, tienen significado, no hay un contexto de significación para ellas, sino una serie de algoritmos que se reproducen a la perfección para lograr superar lo que el contrato didáctico demanda.

Aun cuando los alumnos del Profesorado pueden ver los problemas de la educación secundaria, no tienen forma de enfrentarlos. En toda su formación no hay espacios en que se les enseñe a cuestionar lo que se hace en la escuela. Y la realidad es que cuando son puestos en evidencia, la sensación de vacío que sufren es mayor que lo que pueden manejar. No pueden aceptar que el infinito que han construido no alcance, no sea suficiente para algo que, peor aún, ya han estudiado y aprobado en los primeros cursos de su formación. Es necesario darles herramientas para poder enfrentar los cursos en los cuales van a trabajar, porque los próximos treinta años de educación de escuela media van a estar sujetos a lo que los egresados logren construir. No alcanza modificar lo que ocurre en una clase o en una escuela, es necesario llegar a los institutos de formación docente y cambiar esa formación, anquilosada y enquistada en viejas prácticas, que colocan al conocimiento en una posición donde el alumno no puede más que *comprarlo*, y a la ciencia en un lugar donde lo que importa es que sea formal y rigurosa, aun cuando eso no permita comprender lo que realmente se está haciendo.

Conclusiones

El infinito que se detectó es necesario para la escuela secundaria, resulta ser entonces el que nace de la visión dinámica de lo que se mueve, el que se construye en la búsqueda de los límites del espacio, el que llega a Newton habiendo nacido de la contemplación de los pueblos más antiguos. Ese infinito, que está más próximo que cualquier otro al que todos construimos desde la intuición, es el que los alumnos precisan para entender lo que sustenta a las funciones. Sin embargo, el infinito sólo no alcanza. El discurso matemático escolar hace uso de una forma de entender las funciones que están enfrentado con ese infinito. Si el infinito que tiene sentido para el análisis es dinámico, entonces el registro en que presentan las funciones debería también ser dinámico. Mantener a las funciones en un registro estático e intentar construir un infinito dinámico sería introducir otro objeto de conflicto en la escuela. Es tan profundo el cambio que se necesita, que sólo la identificación del tipo de infinito involucrado resulta insuficiente.

El rediseño que se hace necesario es muy complejo, profundo, y lamentablemente en el sistema educativo argentino los cambios se hacen alejados de la investigación educativa, ya que quiénes los hacen lejos están de la tarea educativa. Creemos que el lugar donde podemos impactar es en el Profesorado y cambiar las nociones que los futuros docentes construyen en esa institución; porque de esa manera ellos cambiarán el discurso de las aulas cuando estén desenvolviéndose como docentes. El impacto será entonces en las mentes y manos de los docentes y no en los papeles, que para los que están inmersos en el sistema, poco importan.

Referencias bibliográficas

Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. J. Ferreirós (Ed.), Barcelona: Crítica.

Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial*, 83-102.

Cordero, F., Cen Che, C. y Suárez Téllez, L. (2010). Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa13 (2),* 187-214

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en Matemática Educativa. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1145-1153. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Espinoza Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Koyré, A. (2008). *Del mundo cerrado al universo infinito.* Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA del IPN, México.

Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.