

## CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. CONTRIBUCIÓN TEÓRICA AL CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y ESTUDIANTES

Leticia Sosa Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas

México

lsosa19@hotmail.com

**Resumen:** En esta investigación pretendemos obtener una mayor información relativa al conocimiento de los profesores de matemáticas, en particular, al conocimiento del contenido y estudiantes (KCS, por sus siglas en inglés –*Knowledge of Content and Student*) mientras éstos se encuentran inmersos en su propia práctica. Nos enfocamos en un modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés – *Mathematical Knowledge for Teaching*). Es un estudio de 2 casos, los instrumentos de recogida de información son: observación de aula, cuestionarios y entrevistas a los dos casos. Finalmente, aportamos distintos indicadores del KCS que pueden ser considerados para identificar y comprender el KCS, éstos pueden ayudar a analizar a otros profesores o ser considerados en la formación del profesorado de bachillerato.

**Palabras clave:** Conocimiento matemático para la enseñanza, conocimiento del contenido y estudiantes.

**Abstract:** In this research we intend to increase our information about mathematics teachers knowledge, especially their Knowledge of Content and Students (KCS) when the teachers are immersed in their own practice. We focused on a model of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). It is a study of 2 cases, the instruments of information collection are: classroom observation, questionnaires and interviews. Finally, we provide different KCS indicators devised to identify and understand KCS, they can also help to analyze other teachers or be taken into account on high school teacher training.

**Key words:** Mathematical knowledge for teaching (MKT), knowledge of content and student (KCS).

### Introducción

Hoy en día, de acuerdo con Sosa (2011), podemos observar que se subestima muchas de las veces el proceso de enseñanza-aprendizaje, sin tomar en cuenta que el proceso no es sencillo porque en él se combinan diversos factores complejos (sociales, culturales, científicos, cognitivos, individuales, grupales, afectivos, contextuales, institucionales, económicos, etc.). En esta investigación asumimos que para enseñar matemáticas, saber el contenido es una condición necesaria para explicarlas pero no es una condición suficiente, pues existen casos en los que el profesor cuenta con un buen dominio de la matemática pero no es capaz de desarrollar un proceso adecuado de enseñanza. Además consideramos que los subdominios del MKT, constituyen un elemento clave en el conocimiento profesional del profesor y en la profesionalización en sí del profesor para desarrollar su actividad. En particular, nuestro objetivo es conocer y comprender el subdominio KCS cuando dos profesoras imparten Álgebra en bachillerato.

## Fundamentos teóricos

Marcadamente desde los años ochenta, y cada vez más, se ha venido discutiendo y profundizando el estudio del conocimiento profesional de los profesores, emergiendo recientemente distintas perspectivas sobre el conocimiento profesional, en particular sobre qué conocimiento matemático posee el profesor y qué conocimiento matemático debería poseer para el ejercicio de su función docente.

Ball y sus colegas (Ball, Thames y Phelps, 2008) proponen el *Mathematical knowledge for Teaching* (MKT). Sus investigaciones se centran en el conocimiento matemático para la enseñanza, en particular en el nivel de primaria, estudiando dicho conocimiento a partir de la práctica del profesor. Ellos proponen un modelo multi-dimensional adaptado a las matemáticas, en el que hacen un refinamiento a las dimensiones del conocimiento del contenido y didáctico del contenido propuesto por Shulman (1986). Ball y su grupo de investigación incluyen el conocimiento curricular planteado por Shulman, en el conocimiento didáctico del contenido, obteniendo así sólo dos grandes dominios que se encuentran, por su parte, cada uno de ellos subdivididos en tres subdominios, como se muestra en la Figura 1. El conocimiento del contenido queda subdividido en tres subdominios: Conocimiento común del contenido (CCK), Conocimiento especializado del contenido (SCK) y Horizonte matemático (HCK). Y el conocimiento didáctico del contenido en: Conocimiento del contenido y estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y Enseñanza (KCT) y Conocimiento Curricular (KCC).

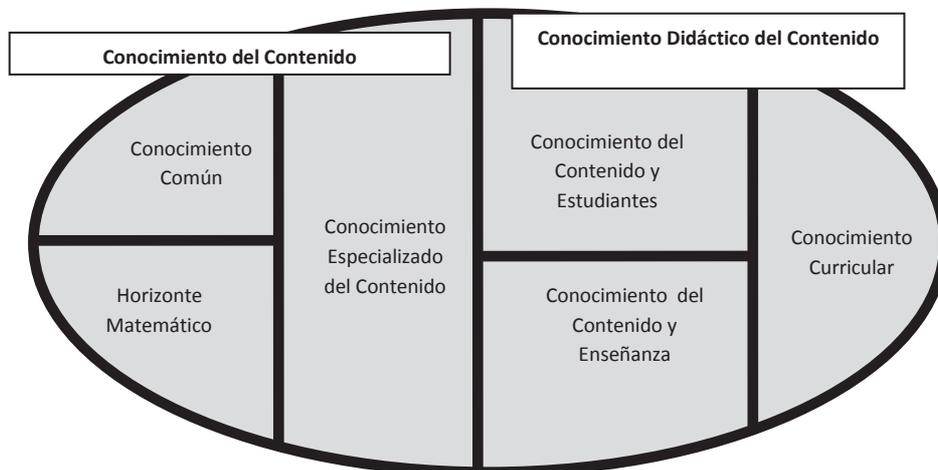


Figura 1. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). (Ball et al., 2008)

A continuación expresaremos brevemente la idea central de cada uno de los subdominios del modelo, pero cabe remarcar que en este documento nos centraremos en el KCS.

**CCK** se refiere al conocimiento matemático y a las habilidades necesarias para resolver las tareas que los estudiantes están realizando, los profesores *necesitan ser capaces de hacer las tareas que ellos están asignando a sus estudiantes* (Ball et al., 2008, p.399).

**SCK:** Conocimiento constituido por el conocimiento matemático y las habilidades que son propias de la profesión de los profesores, el SCK incluye el conocimiento que permite a los profesores conocer la naturaleza matemática de los errores que cometen los alumnos y razonar si alguna de las soluciones inesperadas que dan sus alumnos podrían funcionar matemáticamente en general o no.

**HCK:** Es considerado como el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extramatemáticas.

**KCS:** Se refiere a la conjunción del entendimiento del contenido y saber lo que los alumnos pueden pensar o hacer matemáticamente, el KCS incluye las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá interesante, motivante, fácil, difícil, aburrido o agobiante.

Los profesores se hacen una imagen de lo que posiblemente harán los alumnos en las tareas matemáticas que les asignen, en este tipo de conocimiento se considera también la capacidad que tienen los profesores para escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual.

El KCS también incluye las habilidades de los profesores para identificar los conceptos previos, las dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas que traen los estudiantes acerca de un contenido matemático particular.

**KCT:** Se refiere a la conjunción del entendimiento del contenido y su enseñanza, al entendimiento del contenido matemático y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñar ese contenido.

**KCC:** Está *“representado por el conjunto de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven tanto como las indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios particulares o los materiales del programa en determinadas circunstancias”* (Shulman, 1986, p.10)

Hay que hacer notar que el contenido del conocimiento profesional del profesor, la forma en que se organiza y sus características están siendo ampliamente estudiadas en la Educación Matemática y que en nuestras investigaciones nos centraremos en el estudio de las

características de una parte del conocimiento profesional, en particular en el estudio de los descriptores que distinguen el contenido del MKT propuesto por Ball y su equipo de investigación en su modelo del MKT. En este documento presentamos sólo una parte de uno de sus subdominios (KCS).

### Metodología

Se trata de una investigación inscrita en el paradigma interpretativo (Latorre, Del Rincon y Arnal, 1997) porque nuestro objetivo es comprender e interpretar el MKT en bachillerato, de tal forma que nos enfocamos en un aspecto cognitivo, por lo cual el investigador juega un papel importante en dicha interpretación, característica distintiva de ese paradigma (Bogdan & Biklen, 1994).

### Participantes

Esta investigación trata de un estudio de 2 casos. Son 2 profesoras (Emi y Aly) de distintos institutos de nivel bachillerato en España, seleccionadas intencionalmente para que aportaran información a los objetivos de la investigación, es decir, nos interesaba que fueran dos profesionales identificadas con su profesión y reconocidas como excelentes profesionales tanto por sus pares como por sus estudiantes y sus autoridades. Las profesoras son licenciadas en Matemáticas, ellas imparten Matemáticas en el último año de bachillerato. Al hacer el estudio, ambas poseen varios años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas (Emi 21 y Aly 13).

### Instrumentos para la colección de datos y análisis

Los instrumentos de recogida de información son: observación de aula, notas de campo tomadas por la investigadora, cuestionarios y entrevistas a las profesoras participantes. El equipo de investigación asistió simultáneamente durante tres meses a las clases de Emi y Aly respectivamente, de ellas se filmaron 15 de cada una, con una duración aproximada de 50 minutos por clase, la cámara fue enfocada a la profesora y colocada detrás de los estudiantes tratando de alterar la observación lo menos posible. La observación no participante se complementó con notas de campo por parte de la investigadora, cuestionarios y entrevistas (instrumentos utilizados para triangular los resultados). Los datos que presentamos en este documento provienen de las transcripciones de las 15 clases filmadas de cada una de las profesoras.

En cuanto a los instrumentos para realizar el análisis de la información tomamos dos, uno para organizar la información de las transcripciones y poder analizarlas (adaptamos el modelo cimentado en las ideas de otros anteriores para modelar la enseñanza –el modelo presentado

por Schoenfeld (2000), y por Ribeiro (2008) a la matemática en temas de primaria), y otro para identificar los subdominios del MKT (Ball et al. 2008), en particular aquí sólo presentamos lo referente al subdominio KCS.

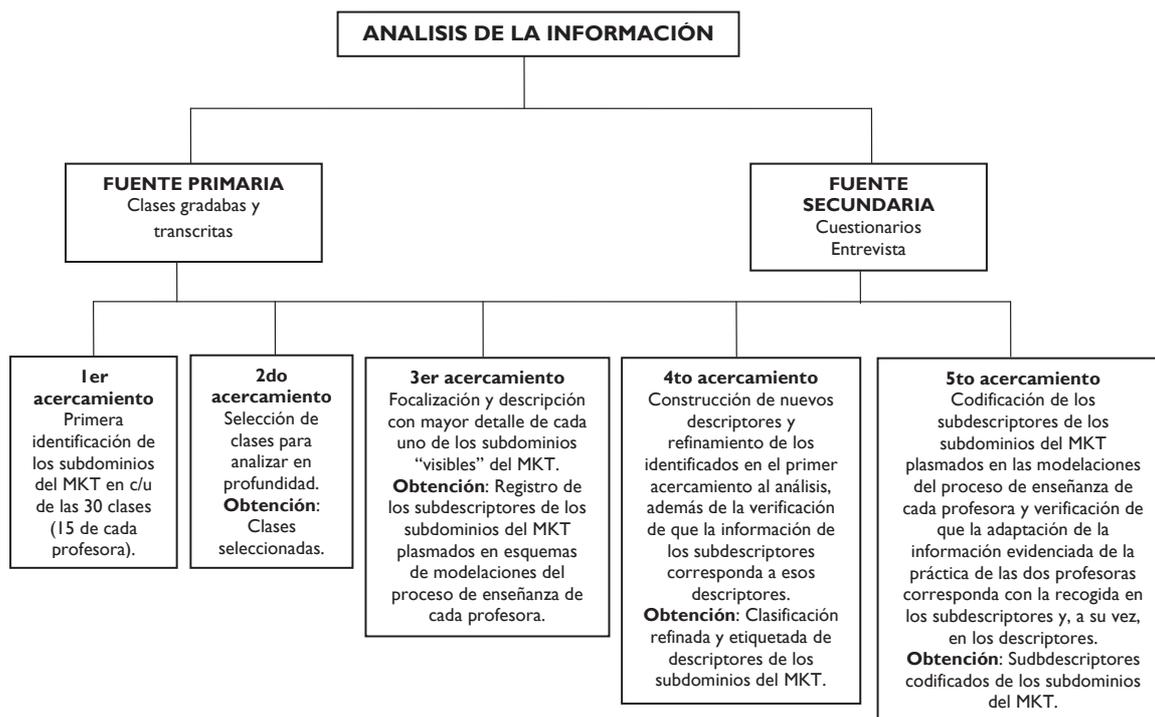
### **Análisis de la información**

El análisis de las clases grabadas es realizado a partir de cinco acercamientos. Para analizar dichas clases, basados en las transcripciones de éstas, y utilizando la adaptación hecha al modelo de Ribeiro (2008) para organizar la información de las transcripciones y proceder a identificar los distintos subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) propuesto por Ball et al. (2008) (y estando atentos por si aparecían nuevos subdominios), en cada clase se hizo una división de episodios fenomenológicamente coherentes de manera recurrente, identificando los eventos iniciales y finales, después de haber identificado el objetivo declarado por el profesor o interpretado por la investigadora, respecto al contenido matemático que la profesora pretende enseñar en esa clase, y usando una metodología de revisión/comparación constante entre las divisiones anteriores y posteriores para garantizar una consistencia interna de esa división. Después de tener la división de los episodios, en los episodios que se requiera, se divide cada episodio en sub-episodios, siguiendo la misma metodología.

Consideramos necesarios cinco acercamientos para el análisis de la información porque si bien es cierto que como expresa Kagan (1990), estudiar el conocimiento del profesor requiere de varias fuentes de información, pensamos que también es necesario realizar varios acercamientos al análisis de la información para revisar, comprobar y validar constantemente lo que se va obteniendo de dicho análisis, y a su vez, refinar y pulir continuamente los distintos acercamientos para contrastar y confrontar la información analizada. Defendemos que en este tipo de estudios cualitativos es muy importante exigirnos rigor en el análisis de la información para robustecer la credibilidad de los resultados de la investigación.

Queremos hacer notar que en este caso no estamos hablando de triangular con distintas técnicas de análisis en sí, sino de un refinamiento y validación interna entre varios acercamientos al análisis de la información dentro de una sola técnica.

A continuación un esquema donde mostramos de manera sintética cada uno de los cinco acercamientos al análisis de la información.



El análisis a través de los cinco acercamientos lo hicimos para el caso de Emi y luego para el caso de Aly.

En las fuentes secundarias identificamos elementos que nos dieran indicio de alguno de los distintos subdominios del MKT o aspectos que nos ayudaran a comprender alguno(s) de los descriptores que obtuvimos para cada subdominio y a su vez a entender los propios subdominios. Además, estos instrumentos de recogida de información nos aportan información a la hora de triangular los resultados.

## Resultados

Finalmente, aportamos distintos descriptores o indicadores del KCS que pueden ser considerados como indicadores para identificar y comprender el KCS, éstos fungen como una base de dimensiones para ayudar a analizar a otros profesores, así como a tener en cuenta en la formación inicial y continua del profesorado de bachillerato. Por cuestión de espacio sólo mencionamos los correspondientes a tres categorías: “necesidades y dificultades”, “confusiones y/o equivocaciones” y “quedarse con una imagen inadecuada”, pero reportamos más categorías de este subdominio (KCS) y de los otros mencionados anteriormente (en los fundamentos teóricos), en Sosa (2011).

**Necesidades y dificultades**

- Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.

**Confusiones y/o equivocaciones**

- Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase.
- Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando.
- Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores.
- Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.

**Quedarse con una imagen inadecuada**

- Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido.

El descriptor que proponemos en la categoría “*necesidades y dificultades*” pudiera ser uno de los descriptores más generales, debido a que consiste en saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre un contenido matemático. Nuestra intención es destacar ese conocimiento, a sabiendas de que podríamos debatir si alguno o algunos de los demás descriptores que proponemos para el KCS pudieran quedar incluidos en éste. Sin embargo, consideramos conveniente dejar este descriptor general porque tal como está posiblemente dé luz sobre distintos matices en estudios posteriores.

En los descriptores correspondientes a la categoría “*confusiones y/o equivocaciones*” queremos hacer notar el conocimiento matemático que le permite al profesor prever la confusión que pudiera tener un estudiante con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase, de tal forma que, con el propósito de evitar que los estudiantes cometan un error a causa de su confusión, el profesor normalmente hace un comentario para prevenirlos. Además, queremos destacar el conocimiento que le permite saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando. Así como el descriptor referente a saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. Por ejemplo, en la clase 7 de Emi (líneas 184-186, 221-225), saber que los estudiantes se pueden equivocar al escribir el sistema en forma matricial, que no pongan las equis debajo de las equis, las y’s debajo de las y’s y las z’s debajo de las z’s; o prever que algún estudiante pudiera escribir la solución del sistema sin seguir la convención matemática de que siempre se anota el valor de las incógnitas en el orden en que aparecen dadas (x, y, z). Nuevamente, cuando el profesor distingue esto último, hace una aclaración o comentario haciéndoles notar que deben poner atención en el orden establecido en las convenciones

matemáticas, no sólo para no confundirse o equivocarse sino también para darse a entender en lenguaje matemático. Proponemos también el descriptor correspondiente al a saber las equivocaciones que pueden tener los estudiantes por hacer cálculos mecánicamente sin tener conciencia de lo que están realizando, a continuación mostramos un segmento de clase que dio pie a ese descriptor, el cual sucedió en la clase 8 de Emi de las líneas 137 a la 148, al resolver un sistema de tres ecuaciones por Gauss.

137	Emi:	¿Cuántas soluciones nos han salido en el problema?
138	E10:	Tres
139	Emi:	Cuando ponemos $x=$ , $y=$ , $z=$ , ¿cuántas soluciones estamos dando?
140	E10:	Tres.
141	Emi:	Por ejemplo $x=10$ , $y= 50$ y $z=30$ , ¿cuántas soluciones?
142	E3:	Una.
143	Emi:	Es una solución, es decir, son tres incógnitas, pero es una solución.
144		Porque el sistema está formado por varias ecuaciones y en este caso
145		tenemos nosotros tres incógnitas,
146		hallar la solución es hallar el valor para cada una de las incógnitas,
147		si tenemos un valor para cada una de las incógnitas,
148		pues tenemos sólo una solución, de acuerdo.

Remarcamos que en Sosa (2011) se explicitan más evidencias de los descriptores del KCS y de los otros subdominios del MKT.

Por último, en el descriptor propuesto en la categoría “*quedarse con una imagen inadecuada*” respecto a prever que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido, cuando el profesor anticipa ese hecho, interviene y hace una aclaración o comentario como medida preventiva para evitar que los estudiantes se queden con una imagen o idea incorrecta del contenido que afecte el aprendizaje de los estudiantes.

## Conclusiones

Concordamos con Godino (2009) en el sentido de que “*Se suele reconocer que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos,...)*” (p. 14). Por lo que en la medida en que los profesores de bachillerato pongan más énfasis en el Contenido del Conocimiento y Estudiantes (KCS), les puede permitir anticiparse a las necesidades, dificultades, confusiones, equivocaciones que estos presenten y de igual manera podrían anticiparse a que los estudiantes tengan ideas o imágenes inadecuadas de los contenidos que se estén manejando, inclusive podrían tener la habilidad de diseñar actividades de aprendizaje adecuadas, saber usar los recursos y comprender los factores que condicionan la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Podemos decir, además, que con base en lo que establece Llinares, Valls y Roig (2008) en el sentido de que la implicación de los profesores en la dinámica de analizar los aspectos del pensamiento matemático de los estudiantes les puede permitir establecer planeaciones más adecuadas a la forma de aprendizaje de los estudiantes. Así, el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (dificultades, nivel de estrategias utilizadas, etc.) puede utilizarse para valorar y seleccionar las tareas, ejemplos y representaciones apropiados para que puedan ser usadas en contextos idóneos.

### Referencias bibliográficas

- Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto editora.
- Godino, J.D. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas*. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Núm. 20, pp. 13-31.
- Kagan, D.M. (1990). Ways of evaluating teacher cognition: Inferences concerning the Goldilocks Principle. *Review of Educational Research*, 60 (3), 419-469.
- Latorre, A., Del Rincón, D., y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado ediciones.
- Llinares, S., Valls, J. y Roig, A.I. (2008). *Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas*. Educación Matemática: Santillana. Vol. 20, Núm. 3, pp. 59-82.
- Ribeiro, C.M. (2008). From modeling the teacher practice to the establishment of relations between the teacher actions and cognitions. In M. Joubert (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics November 2008*, 28(3), (pp. 102-107) Londres: British Society for Research into Learning Mathematics.
- Schoenfeld, A.H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(3), 243 - 261.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.
- Sosa, L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en <http://hdl.handle.net/10272/4509>