PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO

Marco Antonio Rosales Riady, Leonora Díaz Moreno
Universidad del Bío-Bío Chile
Universidad de Los Lagos
mrosales@ubiobio.cl, leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Se reportan evidencias de Pensamiento Geométrico en estudiantes de Pedagogía en Educación Básica, con particular atención a las construcciones geométricas en el plano con y sin el uso de un procesador geométrico. Se aplicó dos reactivos a estudiantes, elegidos al azar, que cursan una segunda asignatura semestral de geometría. Ante cada actividad describieron los procedimientos utilizados, pudiendo usar en cada situación la mano alzada, instrumentos para la construcción y/o un procesador geométrico. Sus producciones dan evidencia de que no todos efectúan una construcción geométrica y que presentan dificultades para argumentar los procedimientos utilizados. Privilegiaron la demostración por sobre la verificación.

Palabras clave: formación docente, pensamiento geométrico

Abstract. Evidence of geometric thinking of students of Pedagogy in Elementary Education is reported, with a focus on geometric construction in the plane with and without the use of a geometry processor. Two reagents were applied to students, chosen randomly enrolled in a second semester course in Euclidean geometry. Before each activity they described the used procedures, being able in each procedure to: freehand drawing, use tools for the construction and/or a geometry processor. Their productions are evidence that not all of them execute a geometric construction, and have difficulties to argue the used procedures. Demonstration was privileged over verification.

Key words: teacher training, geometrical thinking

Introducción

El estudio preliminar, que informa este artículo, explora conocimientos disciplinares en lo conceptual y procedimental en el Eje Geometría, en particular, en lo referido a problemas de construcción con uso de un procesador geométrico.

La literatura muestra la necesidad de que los estudiantes den significados a las entidades geométricas con base en su construcción (Fritzler, 1997, citado en López, 2004) a la vez que releva el aporte didáctico del uso de un software geométrico dinámico con ese propósito, visión asumida hoy en día a nivel ministerial y de la institución formadora.

Molina, Rosas y Castañeda (2011) sostienen que con acceso a nuevas tecnologías, los estudiantes exploran la geometría y estudian objetos y propiedades geométricas, para redescubrir teoremas por ellos mismos, generar ideas matemáticas, sus propias estrategias y formas de resolución de un problema.

Este estudio preliminar forma parte de una investigación mayor, la que busca responder a la pregunta ¿Cómo evoluciona el pensamiento geométrico en estudiantes que cursan una carrera de Pedagogía en Educación Básica? cuya respuesta aporte antecedentes a quienes toman decisiones en la formación docente respecto a las competencias que debe desarrollar un futuro profesor de matemática para la educación básica, en el área de la geometría.

Antecedentes

El Ministerio de Educación, en julio de 2011, hace públicos los Estándares Orientadores para Egresados de Pedagogía en Educación Básica, tanto pedagógicos como disciplinarios. En particular, en la descripción e indicadores que se señalan para los estándares pedagógicos, para el caso del Estándar 4, se requiere de manifestaciones tecnológicas. A su vez, por tratarse de estándares transversales, estas manifestaciones debiesen plasmarse también al seno de la asignatura de matemáticas. Específicamente el Estándar 4 señala que el futuro profesor o profesora: "Sabe cómo diseñar e implementar estrategias de enseñanza aprendizaje, adecuadas a los objetivos de aprendizaje y de acuerdo al contexto" (MINEDUC, 2011, p. 30). En su descripción se menciona: "Incorpora recursos TICS en los diseños, en la implementación curricular y en la evaluación educativa, seleccionando los que son apropiados para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje" (MINEDUC, 2011, p. 30). Tres indicadores para este estándar se vinculan a las TICS, en particular, uno de ellos está directamente relacionado con el desarrollo de habilidades superiores: "Selecciona TIC que potencian el desarrollo de la enseñanza en cada área curricular fundamentándose en criterios como su aporte al aprendizaje y al desarrollo de habilidades de orden superior (cognitivas, de comunicación, de expresión y de creación)" (MINEDUC, 2011, p.31). Por tanto si desde el punto de vista pedagógico el futuro profesor tiene que dar cuenta de este estándar, satisfaciendo indicadores relacionados a las TICS.

Por su parte en cada uno de los Ejes disciplinarios de matemáticas, hay al menos un estándar que habla del uso de las TICS. En particular, para el caso del Eje de Geometría, el cual consta de cinco estándares, dos de ellos refieren al uso de tecnología, a saber, en el Estándar 7, el indicador 10 señala: "incorpora TICS como medio de apoyo para desarrollar en los estudiantes la capacidad de visualizar" (MINEDUC, 2011, p. 96). En tanto que, en el Estándar 10, el indicador 13 señala: "utiliza TICS para conducir actividades de indagación en el tema de áreas y perímetros" (MINEDUC, 2011, p. 102).

Cabe destacar además que, en los estándares 8 y 11 de este Eje, entre sus indicadores se exige el uso de regla y compás (MINEDUC, 2011, p. 97, p. 103). En este caso, tomando en consideración las exigencias tecnológicas anteriormente mencionadas en el marco de los estándares pedagógicos y disciplinarios, los estudiantes debiesen contar también como vía alternativa, entre sus estrategias de acción, el uso de recursos tecnológicos para construcciones geométricas.

Problemática

Se ha podido constatar en clases en asignaturas de geometría que los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío, presentan diversas dificultades ante situaciones problemáticas simples que les son propuestas.

Así por ejemplo:

Dado el triángulo ABC rectángulo y el ángulo ABC con una amplitud de 60°

¿Qué conclusiones se pueden extraer sobre los elementos del triángulo ABC?

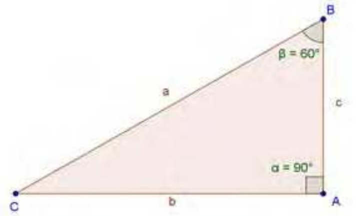


Figura 1

Al abordar la situación propuesta, algunos estudiantes pudieron fácilmente determinar la medida del tercer ángulo (30°), pero no fueron capaces de determinar algunas propiedades relacionadas con la medida de los lados, a partir de la representación figural del enunciado.

En efecto, si bien conocen el Teorema de Pitágoras, no reconocieron propiedades que relacionen las medidas de los catetos con la medida de la hipotenusa, en este caso que el cateto adyacente al ángulo de 60° mide la mitad de la hipotenusa. Así, podría determinar la medida del tercer lado en función del otro cateto o hipotenusa. Lo que deja en evidencia el nivel deficitario de la geometría escolar que ellos poseen. No descubrieron propiedades inherentes a la situación en estudio. En algunos casos presentaron dificultades para elaborar códigos pertinentes; no analizaron la información proporcionada; no argumentaron, no fundamentaron y no explicaron sus afirmaciones. Con el objeto de pesquisar estas dificultades, el estudio preliminar que se reporta se planteó el propósito que sigue.

Propósito del estúdio

Explorar facetas del pensamiento geométrico, con particular atención a las construcciones geométricas en el plano con y sin el uso de un procesador geométrico. Más específicamente, caracterizar conocimientos disciplinares y habilidades que los estudiantes movilizan en torno a, por una parte, propiedades de la circunferencia y sus elementos y, por otra, propiedades de triángulo y circunferencia cuando resuelven problemas de construcción geométrica.

Marco teórico conceptual

El marco referencial del presente reporte está centrado en el modelo teórico propuesto por Duval (1998) y desarrollado por otros investigadores como Torregrosa y Quesada (2007), y también por Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Estos últimos autores manifiestan que el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo y directamente relacionado con el desarrollo cognitivo. Duval (1998) establece que para la operación cognitiva de la aprehensión, existen tres tipos aprehensiones. La aprehensión perceptiva se refiere a la identificación simple de una configuración, es un proceso básicamente intuitivo. La aprehensión discursiva es la actividad cognitiva que produce una asociación de la configuración con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Esta asociación es bidireccional, de lo visual a lo discursivo, y viceversa. La aprehensión operativa consiste en la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Ésta puede ser un cambio figural en la que se le añaden o quitan elementos a la configuración original, generándose nuevas subconfiguraciones. También, la aprehensión operativa puede ser de reconfiguración en la cual hay una manipulación como piezas de un puzle. Se concuerda con Castiblanco et al. (2005) en que: (1) los procesos de argumentación pueden influir sobre la percepción visual, (2) la justificación o argumentación puede ser informal y formal, generalmente de carácter deductivo, (3) el trabajo complementario entre los procesos de visualización y los procesos de justificación puede favorecer una organización deductiva, y (4) al establecer conexiones entre los procesos de justificación y los procesos de visualización, el razonamiento deductivo adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación.

Diseño metodológico

Respecto a la muestra

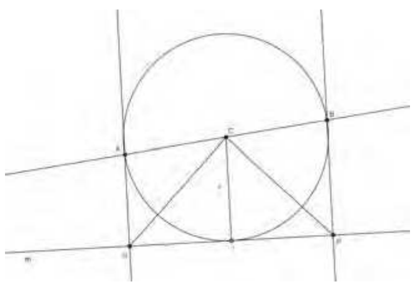
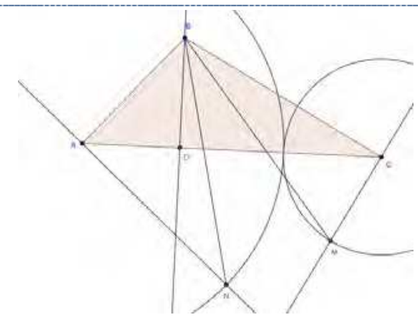
Cuatro estudiantes fueron elegidos al azar. Debían ya tener cursada una segunda asignatura semestral de geometría euclidiana. Así ya habrían abordado la temática de construcciones geométricas por medio de regla y compás y, también, mediante el procesador geométrico GeoGebra u otro. De los cuatro estudiantes, circunstancialmente por el azar, tres de ellos tenían estudios universitarios previos inconclusos, con 2, 4 y 5 semestres de Pedagogía en Educación Matemática, carrera conducente a formar profesores de educación media, cuya malla curricular considera dos asignaturas de geometría euclidiana, Geometría Plana y Geometría del Espacio, y que se imparten en el segundo y tercer semestre respectivamente. Por aspectos curriculares de formación y de los destinatarios a los que están dirigidas ambas carreras, educación básica y educación media, las correspondientes asignaturas no son convalidables entre los planes de estudio, por lo que todos los estudiantes debían cursar todas las asignaturas del eje temático de Geometría. El cuarto estudiante no tenía estudios previos de matemática.

Respecto a las condiciones de aplicación

Se fijó de común acuerdo el día y la hora para la aplicación del instrumento. Posteriormente, al entregarles la hoja que presenta los reactivos, se indicó el objetivo de la experiencia. Se acordó que el desarrollo de cada reactivo sería llevado a cabo de manera completamente individual, sin comunicación entre ellos, y sin supervisión del profesor. Además, se les indicó que podían tardar todo el tiempo que estimasen necesario, y que tenían la libertad de utilizar todos los recursos que ellos consideraran pertinentes, sin darle opciones concretas, como por ejemplo dibujar a mano alzada, usar regla y compás, o bien, un procesador geométrico. Disponían de las salas de estudio y laboratorios informáticos con que cuenta la carrera.

Respecto al diseño de los reactivos

Tal como se expresó anteriormente, el diseño de los reactivos consideró que las construcciones geométricas fueran abordables por parte de los estudiantes, bajo las condiciones de mano alzada, o con instrumentos para la construcción, o bien con un procesador geométrico.

El **primer reactivo** señala:	El **segundo reactivo** señala:
Se traza una recta tangente m por un punto T a una circunferencia de diámetro AB con centro en C. Sobre la recta m se localizan los puntos D y P de modo que los segmentos AD y BP son respectivamente perpendiculares a m. Probar que CD = CP.	*En un triángulo ABC está trazada la altura BD, AN es la perpendicular a AB y CM la perpendicular a BC; además |AN|=|DC|, |CM| = |AD|. Mostrar que M y N son equidistantes del vértice B.*
 Figura 2	 Figura 3

Respecto al análisis de las respuestas

El análisis se efectuó por reactivos, elaborando descripciones de lo puesto en escena por los estudiantes, a partir de sus producciones escritas y, posteriormente, efectuando un análisis por construcción y demostración. Luego, se profundizó el análisis prestando especial atención a la movilización de conocimientos previos, las estrategias de resolución y habilidades puestas en juego por los estudiantes.

Resultados de la experimentación

Descripción de lo puesto en escena por los estudiantes vía sus producciones escritas

Reactivo 1

Estudiante 1: Muestra una representación a lápiz y papel. Realizó una transferencia adecuada de anclaje, del discursivo al visual, dando cuenta de la consigna. Utiliza una aprehensión discursiva apropiada al utilizar las hipótesis dadas en la prueba. Usa el Teorema de Thales pero no lo menciona. Concluye correctamente la prueba de la tesis.

Estudiante 2: Aplicó una aprehensión discursiva, cambiando del anclaje discursivo al visual a mano alzada representando la consigna. Utiliza una asignación de letras griegas para dar medidas de ángulos, pero no da cuenta del uso de ellas. Deja en evidencia un razonamiento discursivo natural de dos párrafos para dar cuenta de la prueba de la tesis.

Estudiante 3: El proceso de aprehensión discursiva con anclaje visual aplicado por la estudiante no da cuenta de la perpendicularidad. Evidencia un razonamiento como proceso discursivo teórico, realizando una demostración de la consigna con uso del Teorema de Thales, con un apoyo visual incorrecto, ya que el triángulo PCD no es isósceles, según la configuración que determinó.

Estudiante 4: Muestra una configuración construida a mano alzada que da cuenta de la consigna. Presenta un razonamiento discursivo teórico adecuado, donde aplica el Teorema de Thales. Concluye correctamente la prueba solicitada.

Reactivo 2

Estudiante 1: Presenta la configuración asociada a la consigna a mano alzada. Se evidencia un razonamiento discursivo teórico inconcluso, ya que escribe solo las hipótesis, pero no demuestra.

Estudiante 2: Muestra una configuración construida solo con regla e inconclusa. No aborda el problema propuesto.

Estudiante 3: La configuración utilizada da cuenta del enunciado, por lo que se manifiesta una aprehensión discursiva con anclaje hacia lo visual. Inicia la demostración de la propiedad escribiendo las hipótesis correspondientes. Construye las alturas del triángulo MBN, por lo que manifiesta aprehensión operativa de cambio figural, y también, al utilizar la transversal del vértice B con un punto auxiliar E', punto medio.

Afirma que por propiedad de los triángulos isósceles se tiene la igualdad, de esta manera se evidencia la aprehensión discursiva. Aparece un razonamiento discursivo natural al hacer mención al GeoGebra y el teorema de Apolonio de los nueve puntos. No hace mención como éstos justifican el enunciado.

Estudiante 4: Muestra una configuración hecha con el GeoGebra. Se evidencia una aprehensión discursiva adecuada al dar cuenta de la consigna. Al demostrar, utiliza apropiadamente las hipótesis dadas, usa el Teorema de Apolonio de los nueve puntos, y concluye correctamente la demostración, quedando en evidencia la interacción de las aprehensiones discursiva y operativa, y el razonamiento discursivo natural aplicado por el estudiante.

Análisis por construcción y demostración

Reactivo 1

Por construcción. En el primer reactivo, todos los estudiantes dan cuenta de una construcción a lápiz en papel, por lo que se evidencia en cada uno de ellos una aprehensión discursiva con cambio de anclaje, de lo discursivo a lo visual. Tres de ellos usan regla y compás, pero no trazan utilizando construcciones básicas (trazado de perpendiculares), en este caso, no se manifiesta la aprehensión operativa figural. Tres de los cuatro estudiantes hacen una construcción muy cercana a la que se podía hacer con un procesador geométrico. Uno de los estudiantes lo hace a mano alzada. Otro, a pesar de usar instrumentos, su construcción no da cuenta de la perpendicularidad, quedando su representación distorsionada.

Por demostración. Todos presentan una demostración basada en el Teorema de Thales, en congruencia de triángulos y relaciones métricas en una circunferencia. Los procesos discursivos desarrollados por ellos, particularmente son los discursivos natural y teórico.

Reactivo 2

Por construcción. Dos estudiantes muestran una construcción mixta, las configuraciones están hechas a mano alzada y con instrumentos. Uno inicia la construcción, pero no la concluye. Sólo el último de los estudiantes utiliza el procesador geométrico. Éste último, construye el teorema de los nueve puntos de Apolonio para mostrar tangencia y congruencia de triángulos evidenciando la aplicación de las aprehensiones discursiva y operativa, y el razonamiento discursivo natural.

Análisis con foco en los conocimientos previos, las estrategias de resolución y las habilidades puestas en juego por los estudiantes

Respecto al primer reactivo, todos los contenidos que se esperaba fuesen puestos en escena, efectivamente aparecieron. Los estudiantes en su conjunto privilegiaron la demostración por sobre la verificación. Sin embargo, no argumentaron sus procedimientos.

Respecto al segundo reactivo, se pudo evidenciar la presencia de los siguientes estadios: un estudiante no abordó el problema; otro sólo representó la consigna; el tercero lo enfrentó representando la consigna y argumentando el uso del procesador geométrico y el Teorema de Apolonio de los Nueve Puntos, pero no menciona cómo éstos justifican el enunciado; por último, el cuarto hace la construcción con el procesador geométrico, y demuestra la consigna usando el Teorema de Apolonio de los Nueve Puntos, aunque muestra sólo ocho de los nueve puntos.

Los estudiantes evidenciaron la movilización de conocimientos previos en torno a las propiedades de la circunferencia y sus elementos, así como a las propiedades de triángulo y circunferencia, en distintos grados de profundidad, y acorde a las experiencias adquiridas en estudios previos en Pedagogía en Educación Matemática. Esto no se manifiesta en el caso del estudiante que ingresó directamente a la carrera de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad. Esto demuestra la necesidad de desarrollar el pensamiento geométrico progresivamente.

Respecto a las habilidades de comunicación escrita, los estudiantes no explicaron paso a paso el procedimiento de construcción geométrica, sino de manera sintética. No detallan su desarrollo. No explican su raciocinio ni dan cuenta del proceso que llevaron a cabo.

Respecto a las habilidades para dibujar con instrumentos como la regla y el compás, se ocupan con inexactitud, demostrando, en algunos casos, que no tienen claridad sobre algunos conceptos, como por ejemplo el estudiante 3, que evidencia un desconocimiento del concepto de perpendicularidad.

Sólo uno de los estudiantes participantes, quien tiene estudios previos de Arquitectura, demostró tener habilidades para usar un procesador geométrico. Lo usó para desarrollar sólo el reactivo 2. Esto evidencia habilidades primarias de los estudiantes en el uso del procesador geométrico, razón que se justifica con el hecho de que su primer acercamiento al uso de un procesador geométrico como GeoGebra, fue en la última asignatura.

En los estudiantes participantes, el uso del procesador no fue privilegiado, sólo uno de los estudiantes lo utilizó. Respecto a las habilidades para visualizar conceptos y propiedades geométricas se evidencia que uno de los estudiantes expone construcciones geométricas inconsistentes con los conceptos involucrados en dicha construcción, a saber, perpendicularidad, paralelismo y congruencia de triángulos (Figura 3).

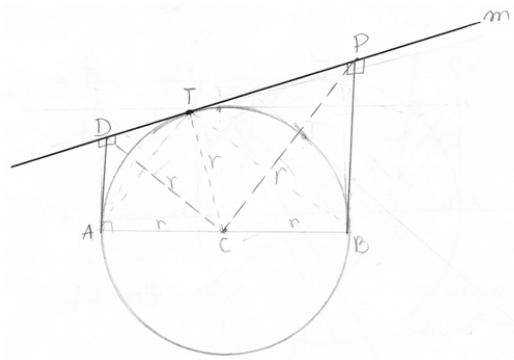


Figura 3

Respecto a la validación de las respuestas

A raíz de la falta de argumentación de los procedimientos utilizados por los estudiantes, y como una forma de validar las respuestas, se procedió a hacer una entrevista grabada en la que cada uno de ellos expresaba en forma oral las razones de sus desarrollos. Quedó en evidencia que las experiencias previas condicionaban tales respuestas. El estudiante que no tenía estudios en Pedagogía en Educación Matemática, manifiesta que su experiencia sólo es la obtenida en la carrera. Los otros tres estudiantes, con estudios previos de Pedagogía en Educación Matemática, expresan que "la representación gráfica no es tan importante, sino que lo importante es la demostración". Por otro lado, al preguntarles que les sería más fácil para ellos, el probar o el demostrar, indicaron que probar, pues "probar se asocia más a algo aritmético" y que "demostrar requiere más que una justificación", y que "lo tecnológico permite visualizar", pero "el trasfondo va más en la demostración". A pesar de que en ambos reactivos se les solicita probar, optaron por demostrar. Sus producciones relegaron el uso de la tecnología a un segundo plano. Hechos concurrentes con la experiencia en sus estudios anteriores.

A modo de cierre

De la aplicación de ambos reactivos, los estudiantes presentan dificultades para argumentar los procedimientos utilizados, privilegiando la demostración por sobre la verificación, y sin priorizar el uso del procesador geométrico.La exploración reportada evidencia la necesidad de fortalecer la generación de aprendizajes geométricos con diseños didácticos que recurren a las TICS.

Los resultados globales de la aplicación del instrumento dejaron en evidencia que no todos efectúan una construcción geométrica, independiente del recurso didáctico con el que se lleven a cabo. Ello podría deberse más que a un tema de recursos, al poco uso y magra comprensión de aspectos conceptuales y procedimentales. En cuanto a los procesos cognitivos, los estudiantes muestran diferentes niveles de razonamiento, privilegiando el proceso discursivo natural, si bien comunican describiendo o argumentando sus procedimientos no adecuadamente.

Referências bibliográficas

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Recuperado el 3 de octubre de 2011 de

http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

López, A. (2004). Geometría dinámica en un curso remedial. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 480–485. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

MINEDUC. (2011). *Estándares Orientadores para Egresados de Pedagogía en Educación Básica.* Ministerio de Educación. Santiago de Chile.

Molina, G., Rosas, A. y Castañeda, A. (2011).Construcción geométrica dinámica y modelo de Van Hiele. Una experiencia de formación de profesores. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 1150–1158. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.