

## LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO CON UN ENFOQUE DESARROLLADOR EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Oswaldo Jesús Rojas Velázquez, Celia Rizo Cabrera, Luis Campistrous Pérez, Miguel Cruz Ramírez, Mario Estrada Doallo, Elpidio López Árias

Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la Luz y Caballero  
scmc@ucp.ho.rimed.cu

Cuba

**Resumen:** En la investigación se elaboran situaciones de aprendizaje que favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador, para la formación de profesores de Matemática. Se valoran las premisas que debe considerar un profesor para la elaboración de las situaciones y se expone su tratamiento a través de tres acciones, desde el punto de vista didáctico: la exploración, la conjeturación y la validación. Con esta investigación se favorece el desarrollo de las formas lógicas del pensamiento, la imaginación espacial, y de la elaboración, formulación y argumentación de conjeturas, para la resolución de problemas geométricos intramatemático o extramatemático.

**Palabras clave:** Geometría del espacio, situaciones de aprendizaje, formación de profesores.

**Abstract:** In this investigation, learning situations are presented in order to favor the teaching-learning process of space geometry with a development approach in the training of Mathematics teachers. There is a valoration of the foundations that a teacher must consider to elaborate situations and it is exposed its treatment through three didactic actions: the exploration, the generating of conjectures and the validation. This research, favors the development of logical thought, the space imagination, the conjectures formulation and argument to solve geometric type of problems both intra as extra mathematical.

**Key words:** Space geometry, learning situations, teacher formation.

### Introducción

La enseñanza-aprendizaje de la geometría ha ocupado a muchos investigadores en el área del aprendizaje de la Matemática, tanto nacional como internacionalmente y ha sido tratada en numerosos eventos, tales como los congresos internacionales de Educación Matemática (ICME 1995 y 2008), las conferencias interamericanas de Educación Matemática (1961, 1987 y 1995), las reuniones latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), los congresos iberoamericanos de Cabri (IBEROCABRI) y los congresos de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (COMPUMAT 1991-2009). En la actualidad, su enseñanza-aprendizaje, a pesar de que se aplica en algunos países los asistentes matemáticos, conocidos como software de geometría dinámica (SGD), persisten aún dificultades.

En un análisis realizado acerca de la enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular la del espacio, en los currículos de la formación de los profesores de Matemática de diferentes países se corroboró las siguientes regularidades: escaso vínculo con los problemas que a diario se enfrentan los alumnos en la vida cotidiana, es limitada la vinculación del contenido a los intereses y motivaciones de los estudiantes; escaso uso de los medios visuales y otros materiales manipulables; en la mayoría de los países la enseñanza no propicia que el profesor

en formación sea partícipe y busque el conocimiento; así como pobre desarrollo de habilidades para representar cuerpos geométricos en el plano y para la transferencia del plano al espacio.

Por tales motivos se necesita buscar métodos y procedimientos más activos, nuevas actividades y formas de organizar el proceso que permitan una participación activa del profesor en formación en la búsqueda del conocimiento geométrico, su cuestionamiento, y que a la vez le favorezcan el planteamiento y la resolución de problemas geométricos aplicados a fenómenos y hechos de la vida cotidiana; los cuales pueda convertir en modo de actuación de su profesión. En este trabajo se ofrecen las premisas y tres momentos esenciales desde el punto de vista didáctico a tener en cuenta en la elaboración de situaciones de aprendizaje para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador, en la formación de profesores de Matemática.

### **Desarrollo**

Sobre la base de los presupuestos teóricos de la Escuela Histórico-Cultural, con lo mejor de las tradiciones pedagógicas nacionales y a partir del pensamiento de ilustres pedagogos cubanos, desde finales del siglo pasado investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP) elaboran una concepción desarrolladora para el proceso de enseñanza-aprendizaje en la escuela cubana. Sobre la base de estas ideas, debe conceptuarse el proceso de enseñanza-aprendizaje con enfoque desarrollador, como aquel que promueve un aprendizaje desarrollador bajo la conducción del maestro. Incluso aceptando la idea retadora de que este desarrollo se extienda también al maestro, pues las exigencias que imponen los métodos activos requieren de una constante innovación y superación pedagógica: un desarrollo profesional. Diversas son las investigaciones realizadas sobre este enfoque, entre ellas están las de Zilberstein y Silvestre (1999, 2000 y 2004); Castellanos, Castellanos, Llivina, y Silverio (2001).

La enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular la del espacio, en la formación de profesores de Matemáticas, bajo un enfoque desarrollador, es el proceso sistémico de transmisión y apropiación activa y creadora del contenido geométrico espacial mediante la utilización de métodos y procedimientos adecuados, el empleo de las TICs y medios activos que le permitan al alumno explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar, de manera que se sienta partícipe en la obtención del conocimiento. El proceso se debe organizar en función del encargo social, donde se tiene en cuenta el diagnóstico, las intenciones profesionales y el nivel de desarrollo actual y potencial de los alumnos. Todo esto permite el tránsito continuo hacia niveles superiores de desarrollo, con el objetivo de formar una personalidad integral; capaz de aplicar los conocimientos geométricos espaciales en la solución de problemas

vinculados a la vida cotidiana, para transformar la realidad y convertirlo en modo de actuación profesional.

Los cambios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en el preuniversitario, conllevan a reestructurar el tratamiento de esta temática en la formación de profesores de matemáticas (a partir de aquí se le llamará alumnos) en las universidades pedagógicas y además deben de estar dirigidos hacia una nueva forma de trabajar los contenidos afines, donde se puedan explotar más y mejor los medios visuales y tecnológicos actuales y poner a los alumnos en situaciones activas para su aprendizaje geométrico. De esta forma se logrará que los alumnos se enfrenten continuamente a procesos de búsqueda, exploración, planteo de conjeturas, comprobación experimental, entre otras formas de actuación.

Con respecto a lo anterior, un medio adecuado para trabajar en la escuela con este enfoque es el diseño de situaciones de aprendizaje (Rizo y Campistrous, 2007a). Las situaciones de aprendizaje, tal como se conciben en este trabajo, son actividades de exploración para el alumno, que en el caso de la geometría del espacio se concretan en un conjunto de tareas sobre figuras geométricas, que representan una situación lo suficientemente abierta para no inhibir la búsqueda por parte del mismo. Donde es posible realizar transformaciones, con el fin de explorar cómo cambian dichas figuras y sus propiedades, de forma tal que les permite analizar el nuevo objeto de aprendizaje.

Por otra parte las situaciones de aprendizaje desarrolladoras se caracterizan por su carácter consciente, reflexivo, problematizador, significativo y contextualizado (Castellanos, Castellanos, Llivina y Silverio, 2001). Para la elaboración de situaciones de aprendizaje sobre la geometría del espacio el docente debe considerar las siguientes premisas:

- ❖ Determinar los elementos del conocimiento geométrico espacial, indicaciones y procedimientos didácticos y heurísticos necesarios, que permitan conducir al profesor en formación a una búsqueda activa, dinámica y reflexiva, donde tenga la oportunidad de explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar.
- ❖ Determinar las operaciones lógicas del pensamiento que se necesitan estimular en cada situación de aprendizaje sobre el contenido geométrico espacial.
- ❖ Conjugar la variedad de situaciones de forma tal que faciliten la búsqueda y utilización del conocimiento geométrico y estimulen el desarrollo del intelecto.
- ❖ Prever, a través de las situaciones, el incremento de las exigencias cognoscitivas geométrico-espaciales, intelectuales y formativas en el profesor en formación.

- ❖ Elaborar situaciones necesarias y suficientes que propicien la adquisición de los conocimientos geométricos espaciales, donde se considere la atención diferenciada, que se conduzca al resultado esperado en cada alumno de acuerdo a su zona de desarrollo próximo (ZDP).
- ❖ Determinar los medios visuales disponibles para el tratamiento a las diferentes situaciones.

Estas situaciones propician que el alumno actúe, participe, explore, experimente, construya, descubra y redescubra el contenido geométrico espacial mediante la manipulación geométrica, en su interacción con los medios visuales; de modo que se favorezca el aprendizaje y desarrolle un pensamiento lógico, creativo y geométrico espacial a través del trabajo, tanto individual como colectivo.

*Para desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque dinámico, mediante situaciones de aprendizaje, es importante el desarrollo en los alumnos de la capacidad de emplear procedimientos de búsqueda y exploración. En este sentido son muy útiles, en primer lugar, los denominados procedimientos heurísticos o estrategias heurísticas: mover en una figura o cuerpo (manipular y variar las condiciones dadas), mover figuras o cuerpos sobre otros, considerar casos particulares o especiales, considerar casos límite, medir y comparar, buscar relaciones y dependencias, hacer conjeturas, realizar analogías, reducir el problema nuevo a un problema conocido. En este proceso tiene un papel esencial el principio heurístico de la visualización (Rojas, 2009). En segundo lugar, los procedimientos didácticos desarrolladores: aprender a observar y describir, observar y dibujar lo que rodea, plantear semejanzas y diferencias, establecer suposiciones o hipótesis, buscar contraejemplos, escribir o dibujar mientras se aprende, así como buscar las características e identificar propiedades y conceptos.*

Para cumplimentar el enfoque dinámico de la geometría del espacio se trabaja fundamentalmente con el Cabri 3D, el cual es interactivo; permite la manipulación de las figuras geométricas; ofrece la posibilidad de dibujar, construir y animar figuras geométricas, ver los elementos de las figuras en forma precisa y rápida y, que el resultado se presente inmediatamente en la pantalla de la computadora. También el empleo en las clases del medio visual *Stix & balls magnetic*, el cual se basa en varillas de diferentes colores, imantadas en cada extremo, para las aristas y pequeñas esferas para los vértices. Con este medio se puede construir cualquier tipo de prismas y pirámides, mediante su utilización, se favorece el desarrollo de la imaginación espacial de un cuerpo del espacio hasta su representación en el plano. Por otra parte estos medios constituyen un soporte adecuado para el planteamiento de situaciones de aprendizaje que promuevan la actividad y la reflexión, para la búsqueda del conocimiento geométrico.

El papel del profesor es dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, de modo que pueda garantizar la actividad protagónica de sus alumnos. Esto se realizará, inicialmente, de forma individual y luego en dúos o tríos de discusión, permitiendo socializar las primeras ideas y de arribar en colectivo a nuevas conjeturas geométricas, después de un proceso de análisis y discusión. En este sentido, la didáctica a utilizar requiere un carácter desarrollador, pues debe propiciar el desarrollo integral de la personalidad del alumno.

Para la resolución de las situaciones de aprendizaje geométricas, es necesario considerar que el alumno que aprende tiene que poner en relación los nuevos conocimientos geométricos con los que ya posee, es decir, con los conocimientos precedentes que ya aprendió. Esto permitirá la reestructuración y el surgimiento de un nuevo nivel en el conocimiento geométrico espacial, así como las relaciones que se pueden establecer entre los conocimientos aprendidos y las motivaciones, las vivencias afectivas, las relaciones con la vida y con los diferentes contextos sociales que le rodean.

Estas situaciones de aprendizaje deben adaptarse a las características de los alumnos y al tratamiento del contenido geométrico espacial. Es importante para el trabajo con el contenido geométrico espacial determinar qué saben los alumnos como condiciones previas para desarrollar estas situaciones, qué deben aprender según el currículo y qué es posible que aprendan a través del proceso de búsqueda, manipulación y exploración. Para propiciar una enseñanza que permite estimular la ZDP, se deben proponer situaciones de aprendizaje sobre el contenido, vinculadas a la vida cotidiana y a contenidos profesionales.

En el trabajo con las situaciones de aprendizaje se proponen tres momentos esenciales o acciones fundamentales, desde el punto de vista didáctico: la exploración, la conjeturación y la validación, las cuales se concretan de forma general en la geometría plana (Rizo y Campistrous, 2007b). Estos tres momentos esenciales de la didáctica del tratamiento de situaciones de aprendizaje no es posible llevarlos a cabo con todo el rigor en la geometría del espacio, pues pasar algo del plano al espacio tiene sus dificultades propias. Por ende en esta parte inicial, aparecen propiedades que hay que asumir sin demostración y a partir de ellas demostrar otras. En el trabajo con las situaciones de aprendizaje geométrico-espaciales que se proponen, no siempre se valoran las tres etapas, en su mayoría solo se propone llegar hasta la conjeturación.

La exploración es una etapa inicial, en la cual el alumno de manera individual o en colaboración con otros, mediante la utilización de los medios adecuados para la visualización geométrica de cada situación y de los impulsos que el profesor le da (si fuera necesario), comienza a realizar un proceso de búsqueda de relaciones en una actividad en la cual experimenta, mediante la

manipulación geométrica, de manera variada.

Esta experimentación debe hacerse de forma tal que permita un proceder sistemático de búsqueda de nuevas relaciones geométricas del espacio, o de relaciones ya conocidas de situaciones anteriores y que pudieran ser de alguna manera transferidas a la nueva situación geométrica. La exploración, siempre que sea posible, debe realizarse de una manera organizada; pero a la vez es un proceso sin una planificación totalmente preconcebida, pues no siempre es posible planificar este tipo de actividad de búsqueda. Por tanto, se exige del profesor una preparación previa ante cada situación de aprendizaje geométrica en el contenido a trabajar con cada situación, en los medios para la visualización geométrica, en los impulsos necesarios y en haber explorado antes la situación (o sea, conocer todos los casos posibles que serán abordados mediante esa situación).

La conjeturación es el conjunto de relaciones que se derivan de la manipulación de los medios utilizados, las cuales se socializan con el resto de los alumnos, hasta llegar a una lista de relaciones posibles que se convierten en conjeturas. La conjeturación está frecuentemente ligada al proceso de argumentación y tiene su origen en la etapa de exploración. Las conjeturaciones van a desarrollar la necesidad y la suficiencia de las proposiciones geométricas. En esta etapa el principio heurístico de la visualización juega un papel determinante, pues las conjeturas se apoyan en la visualización, conformando conjeturas geométricas. O sea, la interpretación geométrica de los objetos y las interrelaciones que se obtienen como resultado de la manipulación geométrica en la etapa de exploración derivan en conjeturas geométricas, constituyendo éstas el contenido geométrico espacial. El pensamiento geométrico espacial favorece y dinamiza la formación de conjeturas y, a la vez, esas conjeturas desarrollan y profundizan este pensamiento. A través de los métodos y procedimientos activos, los medios visuales y mediante la manipulación geométrica, el alumno obtiene las relaciones que se dan entre los objetos matemáticos de la situación, a los cuales llama conjeturas.

En esta etapa es importante el papel del profesor en la orientación al alumno, sobre cuáles conjeturas constituyen axiomas, proposiciones y teoremas y dentro de éstas cuáles deben ser demostradas en el aula. Aquí también el profesor puede activar la ZDP a través de impulsos o preguntas heurísticas de forma tal que, mediante una atención diferenciada, el alumno llegue a plantear las conjeturas.

La validación es el procesamiento de las conjeturas hechas, donde se analiza su posible rechazo de inmediato, mediante un contraejemplo, o su veracidad, en este caso deben ser argumentadas con otras afirmaciones ya aceptadas y conocidas por el alumno o demostradas siguiendo un proceso deductivo que lo permita. En esta etapa es importante el uso de las

simbologías adecuadas para cada conjetura, de forma tal que propicie comprender el proceso de demostración de cada una de ellas.

En las situaciones de aprendizaje geométricas-espaciales, en las que la actividad del alumno es determinante y juega un papel protagónico en la búsqueda del conocimiento, es muy importante establecer una situación inicial. Esta situación debe estar claramente formulada y acompañada de las indicaciones necesarias, de forma tal que le facilite al alumno comprender la tarea que se le está planteando. Así, él comprenderá que se trata de actividades de exploración y experimentación que le permiten analizar el nuevo contenido geométrico espacial, así como sistematizar el aprendizaje. Además, son actividades donde él puede realizar transformaciones que le faciliten identificar los diferentes casos que se pueden presentar ante una misma orden y visualizarlos, así como formular hipótesis sobre el comportamiento de los elementos nuevos que pueden aparecer. Es muy importante que el profesor en formación reconozca la situación inicial y a qué propiedades debe dirigir su atención, de forma tal que pueda decidir las manipulaciones y variaciones que van a realizar.

Como se ha planteado antes, si es necesario, el profesor les dará a los alumnos impulsos que constituyen sugerencias, ayudas que van a favorecer la resolución de las situaciones de aprendizaje. Al alumno desarrollar métodos propios de exploración, demostrado en la medida que ha sido capaz de resolver las situaciones de aprendizaje, necesita cada vez de menos impulsos por parte del profesor, pues los que le ha ido dando inicialmente se convierten en un proceder generalizado de actuación para la búsqueda y obtención del conocimiento geométrico del espacio.

Debido a la naturaleza de la geometría del espacio y sus aplicaciones en la vida cotidiana; así como a la necesidad de buscar una nueva forma de organizar y dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde se utilicen métodos y procedimientos activos, medios visuales que permitan la participación activa, dinámica y conciente del alumno en el aprendizaje de la geometría del espacio, se propone una tipología de situaciones de aprendizaje. En la investigación se clasifican las situaciones de aprendizaje geométricas espaciales en dos tipos:

- ❖ Un primer tipo de situaciones de aprendizaje dirigidas hacia la búsqueda de nuevos conocimientos y habilidades geométricas que pueden ser: situaciones de aprendizaje para la formación (definición) de conceptos geométricos espaciales, situaciones de aprendizaje para la búsqueda de proposiciones (teoremas) geométricas, situaciones de aprendizaje para la búsqueda de procedimientos de solución.
- ❖ Un segundo tipo de situaciones de aprendizaje para la aplicación creadora de los

conocimientos y habilidades geométricas adquiridas, las cuales pueden ser: situaciones de aprendizaje para buscar soluciones a nuevos problemas geométricos, situaciones de aprendizaje para buscar soluciones a problemas vinculados con la vida y a contenidos profesionales.

Las situaciones de aprendizaje que se proponen constituyen “situaciones elementales” en el aprendizaje del contenido de la geometría del espacio, para entonces dar paso a situaciones más complejas. La solución de estas se realiza valiéndose de las situaciones elementales (reglas heurística “reducir un problema a otro ya resuelto”). Esta tipología comprende todo el sistema de conocimientos y habilidades del programa. En algunas situaciones solamente se propone llegar hasta la conjeturación. Un ejemplo de estas situaciones de aprendizaje compleja es el siguiente: Construya una pirámide recta, regular, de base cuadrada, si la longitud de uno de los lados de la base mida 7,0 cm.

- a) Determine las relaciones de posición entre las rectas que contienen sus aristas y entre los planos que contienen sus caras.
- b) Determine el volumen de la pirámide si la longitud de la altura de una de sus caras es 7,0 cm y el ángulo que forma dicha altura con la altura de la pirámide es de  $300^\circ$ . ¿Cuántos litros de agua contendrá un prisma de igual base y altura?

En el desarrollo de esta situación el profesor expone el contenido geométrico asociado, un conjunto de impulsos heurísticos o preguntas heurísticas que permiten activar la ZDP, algunos medios visuales adecuados y se esclarece cómo tiene lugar la exploración, la conjeturación y la validación, con el objetivo de lograr modo de actuación de los profesores en formación en la resolución de otras situaciones. El tratamiento didáctico a estas situaciones de aprendizaje, mediante la utilización de métodos y procedimientos activos y medios visuales, favorece el aprendizaje del contenido geométrico espacial, lo cual le permite comprender y resolver problemas geométricos espaciales vinculados a la vida.

También, esta forma es fértil para abordar el tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática que con más frecuencia se presentan en la geometría del espacio. La graduación de los impulsos heurísticos en la solución de las situaciones de aprendizaje permite brindar una atención diferenciada a los alumnos, acorde con el desarrollo alcanzado por cada uno.

## Conclusiones

Los resultados obtenidos sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio a través de situaciones de aprendizaje, permite destacar algunos elementos que resultan determinantes

en el logro del objetivo que se persigue. Ellos son:

- ❖ Las situaciones de aprendizaje en las cuales se consideran tres momentos esenciales, la exploración, la conjeturación y la validación, son propicia para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, en la formación de profesores de matemática de las universidades pedagógicas, lo cual les permite desarrollar modos de actuación en el tratamiento de esta temática en el preuniversitario.
- ❖ Las situaciones de aprendizaje geométricas espaciales se clasifican en dos: las que son dirigidas hacia la búsqueda de nuevos conocimientos y habilidades geométricas y las que se orientan a la aplicación creadora de los conocimientos y habilidades geométricas adquiridas.
- ❖ El tratamiento de las definiciones y proposiciones a través de situaciones de aprendizaje favorece el desarrollo en los alumnos de formas lógicas del pensamiento, de la imaginación espacial, de la visión espacial, así como de la elaboración, formulación y argumentación de conjeturas.

### Referencias bibliográficas

- Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M. y Silverio, M. (2001). *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Rizo C. y Campistrous, L. (2007a). Geometría Dinámica en la escuela, ¿mito o realidad? *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 45, 61-79.
- Rizo C. y Campistrous, L. (2007b). Una didáctica para el tratamiento de las situaciones de aprendizaje de la Geometría con un enfoque dinámico en la escuela. En O. Coloma (Ed). *Memoria del Taller científico metodológico sobre las Ciencias Exactas (2)*, (pp. 3-15). Holguín: Educación Cubana.
- Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la Luz y Caballero”. Holguín, Cuba.
- Zilberstein, J. y Silvestre, M. (1999). *Hacia una didáctica desarrolladora*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2000). *¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje?* La Habana: Pueblo y Educación.
- Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2004). *Didáctica desarrolladora desde el enfoque Histórico Cultural*. México: CEIDE.