

## EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL ENTRE PROFESORES DE BACHILLERATO

Mario Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza

Cinvestav del IPN

macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

México

**Resumen** Diversos estudios muestran que los profesores parecen no haber desarrollado un pensamiento variacional, ya que no recurren a ideas variacionales para resolver actividades que las requieren. Como objetivo nos hemos propuesto identificar las causas por las cuales el profesor de matemáticas presenta dificultades para desarrollar un pensamiento variacional. Nuestra hipótesis indica que el pensamiento de los profesores los lleva a centrar su atención en reproducir una acción, aplicar una propiedad o regla para conseguir un resultado, dejando de lado el estudio de las causas que originan ese resultado. Para el logro de los objetivos se realizará una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional, y con base a ello, se aplicará un diseño de actividades a profesores para observar la forma en que abordan una situación de variación, analizando las dificultades que surjan y las causas que las generan.

**Palabras clave:** pensamiento y lenguaje variacional, profesor, variación

**Abstract.** Several studies show that teachers seem to have not developed a variational thought because they don't utilize variational ideas for solving activities that require them. As aim of this work, we want to identify the reasons why a math teacher has difficulties developing a variational thought. Our hypothesis is that the thinking of teachers leads them to focus their attention to reproduce an action, to apply a property or a rule in order to get a result, ignoring the study of the causes of that result. To achieve the objectives, we will do a characterization of the elements of the Thought and Language Variational, and, based on this, we will apply an instrument (an activities design) to teachers to see how they approach a situation of variation, analyzing the difficulties that will emerge and the causes that generate them.

**Key words:** thought and language variational, teacher, variation

### Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que tiene como objetivo identificar las causas que originan las dificultades en los profesores de bachillerato para desarrollar un pensamiento variacional. En el presente escrito reportamos los avances que se tienen ahora, enfocándonos en describir la problemática en la que se inscribe el trabajo, las preguntas de investigaciones que lo guían, el planteamiento de la hipótesis de investigación y los objetivos que persigue.

### Planteamiento de la problemática de investigación

Los resultados de investigaciones dentro de la Matemática Educativa han mostrado que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar las ideas y conceptos del Cálculo, pero el actual discurso matemático escolar no propicia este desarrollo de ideas variacionales. Se fomenta el desarrollo de estrategias y conocimientos procedimentales y memorísticos que, aunque son necesarios, no dejan ver el carácter variacional del Cálculo, y no propician la construcción de una concepción rica en significados. Se dedica mucho tiempo a

la enseñanza de algoritmos dejando de lado la formación de ideas variacionales tan necesarias para la comprensión de las ideas del cálculo.

“El discurso matemático escolar parece inhibir el desarrollo de ideas variacionales, al centrar la atención en el desarrollo de destrezas mecánicas y algorítmicas que no dejan ver la naturaleza variacional del Cálculo” (Reséndiz, 2004). Por tanto, propiciar el estudio de la variación representa una tarea importante para fomentar un aprendizaje rico en significados, tarea ante la cual se han desarrollado investigaciones enmarcadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), línea de investigación que estudia los saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, y que enfatiza en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico.

Algunas investigaciones (Salinas, 2003 y Reséndiz, 2004) han estudiado la forma en que la variación se hace presente en el discurso matemático escolar, particularmente en los libros de texto y en las explicaciones que los profesores proporcionan a los alumnos, sin embargo, aunque la variación tiene un papel en los libros o en las explicaciones, este es relegado a segundo plano, o bien, no se hace énfasis en la importancia de la variación en las ideas matemáticas. Otros trabajos (González, 1999; Aparicio, 2003; Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein y Henzenn, 2008) se han ocupado del diseño de actividades que propicien el desarrollo de estrategias variacionales entre los estudiantes y también en analizar las estrategias que los estudiantes usan ante situaciones variacionales. Los resultados de estos trabajos muestran, entre otras cosas, que los estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias para abordar situaciones de variación, lo que se refleja en el uso de definiciones, teoremas o propiedades aprendidas previamente, pero que no son recordadas correctamente, e incluso en ocasiones modificándolas para construir teoremas o propiedades no validas para dar respuesta a los problemas planteados.

Pero existe otro tipo de investigaciones, que se ocupan de estudiar la formación de profesores de matemáticas con respecto a ideas variacionales (Cabrera, 2009; Engler, Vrancken, y Müller, 2011), y otras que analizan las estrategias empleadas por profesores ante situaciones de variación (González, 1999; Cantoral, Sánchez y Molina, 2005). Los resultados de estas investigaciones muestran la importancia del manejo de ideas variacionales en los profesores para una enseñanza donde los significados de los conocimientos matemáticos se enriquezcan con el estudio de la variación, pero también muestran que los profesores presentan dificultades para abordar satisfactoriamente situaciones de variación, en ocasiones dificultades similares a las reportadas en estudiantes.

Ejemplo de estas dificultades se pueden observar en el trabajo de González (1999), donde se propone una actividad a profesores de bachillerato en la que deben decidir sobre el signo de la primera, segunda y tercera derivada a partir de la gráfica de una función. Los profesores logran responder a las actividades referentes a la primera y segunda derivada usando recursos memorísticos, como la idea de pendiente y concavidad, pero ante el signo de la tercera derivada presentan dificultades y errores en sus respuestas. Estas dificultades se manifiestan cuando los profesores hacen uso de “teoremas factuales”, que consisten en afirmaciones basadas en las propiedades de los signos de la primera y segunda derivada, y que son extrapolados de manera errónea para argumentar sobre la tercera derivada, mostrando con esto una falta de comprensión de estas propiedades, pero también que los profesores no tienen desarrollado un pensamiento variacional, pues de tenerlo podrían recurrir al estudio de la variación para dar respuesta a la tercera derivada.

Este tipo de situación evidencia que los profesores poseen un buen dominio del contenido matemático, al menos a un nivel procedimental, pero que presentan deficiencias en cuanto a un entendimiento más profundo de los conceptos del Cálculo, particularmente con respecto a ideas variacionales. Esto a su vez, tiene repercusiones en cuanto a las estrategias de enseñanza, las cuales se sustentan en el uso de la memoria, aprendizaje de algoritmos y reglas, dejando de lado aquellas ideas variacionales tan importantes para el aprendizaje del Cálculo. Un ejemplo de esto lo vemos del trabajo de Reséndiz (1997), citado en Reséndiz, (2004), donde se analiza la práctica de un profesor cuando aborda el tema de la segunda derivada, observando que le cuesta trabajo establecer argumentos más allá del manejo simbólico que relacionen la segunda y tercera derivada, sin poder dotar de significado a la tercera derivada al no tener ningún esquema previo para ello, a diferencia de la primera y segunda derivada que si asocia un significado por medio de la velocidad y aceleración. De este ejemplo en un escenario de clase, podemos ver que el profesor no caracteriza los cambios más allá del orden dos, pues de hacerlo el profesor podría establecer características para la tercera derivada a partir del estudio de su variación y poder significarla a partir de ello. Asimismo, podemos ver una preocupación del profesor por hacer uso de los procedimientos algebraicos que domina, lo que ocasiona que deje de lado los aspectos variacionales que se encuentran al seno del aprendizaje y de la construcción de la derivada.

En trabajos como el de González (1999) y Reséndiz (1997) se observan dificultades en profesores de matemática para abordar situaciones de variación, lo que nos da indicios de la existencia de dificultades para desarrollar un pensamiento variacional. Esto representa una problemática fundamental a estudiar, debido a que consideramos que para poder hablar de una enseñanza donde el estudio de la variación tenga un papel importante, es necesario que el

profesor tenga desarrollado este pensamiento. Sin embargo, los trabajos enmarcados en el Pylvar relacionados con el profesor se han enfocado en analizar la forma en que resuelven situaciones de variación, pero no han tomado en cuenta la naturaleza de las dificultades para desarrollar un pensamiento variacional, aspecto que consideramos esencial para cualquier propuesta que pretenda incorporar ideas variacionales al conocimiento del profesor. Por ello en este trabajo nos enfocamos en analizar cuáles son las causas que ocasionan esas dificultades a los profesores para desarrollar un pensamiento variacional, para lo cual es importante entender qué es, en qué consiste, y cómo se desarrolla, y así tener un marco de referencia que nos permita analizar y comprender la naturaleza de esas dificultades. Con base en lo anterior, planteamos nuestras preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son las causas que originan las dificultades para desarrollar un pensamiento variacional en los profesores de matemáticas de bachillerato?
2. ¿Qué caracteriza y cómo se desarrolla el Pylvar?

El sustento teórico de la investigación se encuentra en la teoría Socioepistemológica, que plantea que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente llamadas prácticas sociales (Cantoral, 2004). Son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto que caracteriza a la Socioepistemología: pasar de los objetos a las prácticas. Es la praxis la que favorece y permite el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento (Cabrera, 2009), en el cálculo esta praxis se refiere a las prácticas propias de la variación. En las siguientes secciones se mostrará el análisis documental realizado al Pylvar y al Razonamiento Causal (RC), con el objetivo de caracterizar el pensamiento variacional y establecer nuestra hipótesis sobre las causas que originan dificultades para desarrollar este tipo de pensamiento.

### Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional

El Pylvar “estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida” (Cantoral, 2000, citado en Cabrera, 2009, p. 53). Enfatiza en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico, siendo las prácticas propias de la variación las que dotan de significado a los conceptos matemáticos y los procedimientos que se asocian a ellos. La idea que subyace a esta línea de investigación es el estudio del cambio y la variación, nociones que dieron vida y permitieron el desarrollo de las ideas del Cálculo. “Por cambio se entiende a la modificación de estado, apariencia, comportamiento o condición de un cuerpo, sistema u objeto, en tanto que la

variación es entendida como una cuantificación de ese cambio” (Cantoral, Sánchez y Molina, 2005). De modo que el estudio de la variación requiere de conocer qué es lo que cambia, cuánto cambia y cómo cambia

Cabrera (2009) menciona que el Pylvar puede ser visto bajo dos perspectivas, la primera como una línea de investigación que estudia los conocimientos matemáticos desde un punto de vista variacional, analiza las estructuras cognitivas que se generan ante situaciones de variación, y diseño de actividades que permitan la resignificación de los conocimientos matemáticos por medio de la variación. La segunda se refiere al Pylvar “como aquellas estrategias, formas de razonamientos, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten discutir y comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación” (Cabrera, 2009, p.55).

El estudio del cambio y la variación se derivan de la incapacidad de poder adelantar el tiempo para observar los resultados de los acontecimientos, lo que ha llevado a desarrollar herramientas basadas en el estudio del cambio para lograr anticipar el comportamiento de sistemas complejos, de modo que la idea de predicción se vuelve una herramienta importante en el desarrollo y construcción de algunos resultados y conceptos matemáticos (Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J.; Martínez, G., 2006). La predicción enmarcada bajo el Pylvar se fundamenta en el hecho de que el cambio posee herencia, “un estado posterior de un fenómeno de variación depende de las circunstancias que caracterizan el estado inicial” (Cabrera, 2009, p.57). En otras palabras, un estado B de un fenómeno, depende de las características variacionales del estado anterior A, por lo tanto la predicción requiere centrarse en la forma en que se da el cambio de un estado a otro, pues al conocer la forma en que se dan los cambios, se puede anticipar un estado futuro. El proceso de cambio de un estado a otro es por tanto más importante que los estados mismos.

El Pylvar es una línea de investigación y una forma de pensamiento que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. Las situaciones donde se pone en juego el Pylvar, se caracterizan por enfatizar en los procesos de cambio, lo que permite significar los conocimientos matemáticos propios del cálculo más allá de la sola manipulación simbólica, analizando estos procesos de cambio por medio de las ideas variacionales que dieron vida y desarrollaron esos conocimientos.

Dada la naturaleza de estas características del Pylvar, se decidió complementar este análisis con las aportaciones referentes al RC propuesto por Piaget, postura que se preocupa del estudio de las causas que originan un cierto fenómeno. Antes de exponer este análisis, conviene aclarar que los estudios de Piaget fueron realizados con niños, y nuestra investigación

considera profesores de bachillerato que son personas adultas, no obstante, consideramos que dada la relación existente entre el RC y el Pylvar, conocer las dificultades que se presentan en la infancia, y las causas que originan dicha dificultad, nos puede ayudar a explicar las dificultades que se refieren al desarrollo del pensamiento variacional en la etapa adulta, y las causas que la originan.

### El razonamiento causal

El RC tiene su base en la causalidad, que consiste en la explicación que se realiza sobre una relación o fenómeno observado, en cuanto esta versa en el análisis de su modo de producción (Piaget, 1977). Consiste en los procesos mentales que permiten la explicación de las causas que originan algún fenómeno, lo que implica mostrar qué transformaciones se produjeron y como ciertos aspectos del resultado corresponden a transmisiones del estado inicial (Piaget, 1977), en decir, señalar lo que está ocurriendo, hacer énfasis en aquello que produce el resultado del fenómeno y cómo se produce.

En una etapa inicial, el sujeto fija completamente su atención en los estados inicial y final de un fenómeno, sin prestar atención a lo que sucede entre estados. No se busca él cómo suceden las cosas, sino que se enfoca en el resultado final de una acción sin preocuparse de los estados intermedios, no hay necesidad de averiguar las causas del fenómeno (Piaget, 1977), basta con saber que cierta acción produce un cierto resultado deseado, siendo estas acciones principalmente una reproducción de los movimientos que el niño realizó cuando el fenómeno se produjo. En un experimento se colocaba un objeto sobre una cornisa con una cuerda atada que colgaba a la altura del niño, quien jalaba de la cuerda para acceder a ese objeto. Al repetir el experimento, se observa que el niño no jala la cuerda, sino que realiza un ademán con su mano, mismo que uso al jalar la cuerda anteriormente. En esta situación, el propósito no está en entender porque el objeto cayó, sino obtenerlo, para lo cual hace uso del movimiento corporal que anteriormente le permitió obtener el objeto.

En una etapa avanzada se comienza a desarrollar y formalizar el RC al intervenir dos elementos que importantes, la objetivación y la espacialización. El desarrollo de la objetivación permite adquirir una verdadera permanencia e identificación física con los objetos, volviéndolos ajenos a los movimientos del niño y permitiendo reconocer y asociar elementos externos que interactúan y afectan al objeto. El desarrollo de la espacialización consiste en reconocer el centro de la acción, relacionarlo con otros espacios y entrar en contacto físico con esos espacios, es decir, el fenómeno y las acciones que sobre ella se realicen toman lugar en un escenario específico con características propias. Cuando estas dos ideas son desarrolladas, las causas de los fenómenos dejan de ser asociadas únicamente al movimiento corporal o a las

intenciones, logrando reconocer otros factores o elementos que pueden afectar y originar esos fenómenos. Se reconoce la existencia de causas al fenómeno externas al comportamiento físico, y la existencia de lazos entre los eventos del suceso, lo que permite aplicar esquemas previos a nuevas situaciones (Piaget, 1977).

### Planteamiento de la hipótesis de investigación y objetivos

Del análisis del RC encontramos elementos que causan dificultades para su desarrollo y que brindan elementos para plantear una postura acerca de las causas que originan que profesores presenten dificultades para desarrollar un pensamiento variacional, ya que se observaron características similares entre ambas formas de pensamiento, en cuanto a que requieren analizar el proceso entre estados, más que los estados mismos. Las dificultades en el RC se originan por la centración en reproducir una acción que produzca un resultado deseado, sin preocuparse por las causas reales que originan ese resultado. Sólo hasta que el niño comienza a darse cuenta que los fenómenos son producidos no solamente por las acciones realizadas, sino que también intervienen otros estados intermedios, como cuerdas unidas a un objeto, es que podemos hablar de un RC.

El desarrollo del Pylvar requiere, al igual que el RC, centrarse en las causas que generan un fenómeno, lo que en el caso del Pylvar implica enfocarse en el estudio y cuantificación del cambio y la variación. Con base en el análisis del RC, sostenemos que el uso de ideas variacionales por profesores es obstaculizado por razones similares al desarrollo del RC, esto es, la persona centra su atención en reproducir una acción (como puede ser aplicar una propiedad o regla) para conseguir un resultado, dejando de lado el estudio de las causas que originan ese resultado. Los resultados de las investigaciones acerca de Pylvar, confirman esto último, pues se observa una predilección por el uso de procedimientos, algoritmos, o recursos memorísticos para afrontar situaciones de variación.

Con base en lo anterior, nuestra hipótesis de investigación sostiene que el pensamiento de los individuos los lleva a centrarse en utilizar algún conocimiento que los conduzca a un resultado satisfactorio, lo que hace que no se enfoquen en estudiar las causas del fenómeno, es decir, estudiar el cambio y la variación. Sostenemos que esto último tiene su origen en las herramientas con las que cuenta el profesor, pues como se menciona Attorps (2006) los profesores han desarrollado en mayor medida habilidades procedimentales, algorítmicas y memorísticas, lo que no favorecen el desarrollo del Pylvar. Este desarrollo requiere centrarse en los procesos de cambio de un estado a otro de un fenómeno, más que en el estado mismo y de la mera manipulación simbólica, identificando aquello que cambia, cuantificar ese cambio y analizar como varían los cambios. Si sólo se verifica que alguna propiedad o regla se cumple, no

hay un pensamiento variacional detrás, ya que no se requiere comprender el proceso de variación involucrado, sino obtener el resultado.

### Reflexiones finales

El interés del estudio es identificar las causas que originan dificultades en profesores para desarrollar un pensamiento variacional. Para ello, establecimos los siguientes objetivos: Primero, caracterizar los elementos que conforman el Pylvar, segundo, con base en esa caracterización, diseñar un conjunto de actividades que involucren situaciones de variación, y tercero identificar, a partir de esas actividades, las estrategias empleadas por los profesores que son propiamente variacionales de aquellas que no lo son, para poder analizar y verificar si nuestra hipótesis es válida. Hasta el momento se ha realizado la caracterización del Pylvar, y el diseño de las actividades, y se está procediendo a aplicar las actividades con profesores de matemáticas para analizar el tipo de estrategias que emplean con base en la caracterización, y nuestra hipótesis.

### Referencias bibliográficas

- Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de discontinuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes de ingeniería en contexto de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México, D.F. México.
- Attorps, I. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations*. Tesis de Maestría no publicada, University of Helsinki.
- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México D.F. México.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, pp. 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial, 18, 83-102. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.



- Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2011). Formación a distancia. Las concepciones de los docentes con relación a ideas variacionales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 1027-1036. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M., Müller, D., Hecklein, M. y Henzenn, N. (2008). Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada. Análisis de una secuencia didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 466 – 476. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México D.F. México.
- Piaget, J. (1977). Causality and Operation. En J. Piaget y R. Garcia (Eds), *Understanding Causality* (pp. 1 – 10), United States of America, Norton Library.
- Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México D.F. México.
- Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México D.F. México