ANALIZANDO UNA SITUACIÓN DE VARIACIÓN EN UN SISTEMA DINÁMICO

Tulio Amaya de Armas(1y2), Natalia Sgreccia(3y4), Ricardo Valles Pereira(5), Albeiro López(6)
(1) Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo, (2) Corporación Universitaria de Caribe, Cecar, (6) Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo — Colombia,
(5) Universidad Simón Bolívar de Caracas, — Venezuela
(3) Universidad Nacional de Rosario — Argentina
(4) Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
tuama1@hotmail.com, nataliasgreccia@hotmail.com, rfricardovalles@hotmail.com, alocer8@hotmail.com

Resumen: Con la intención de contribuir de manera concreta a la formación de profesores en Matemática desde el uso pedagógico de las tecnologías, se propuso una actividad, cuyo contenido por lo general se trabaja hacia al final de los cursos de Cálculo Diferencial. *La situación inicial es: un alambre de longitud K se corta en dos partes. Una es doblada en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de circunferencia. ¿Cómo deberá ser cortado el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y del círculo sea mínima?* Se utilizó como recurso didáctico el software libre de geometría dinámica GeoGebra. Se efectuó la construcción geométrica, se representó la situación de manera gráfica y simbólica y se analizaron los equivalentes entre los sistemas de representación. Se comparten resultados de la implementación llevada a cabo con profesores latinoamericanos mediante la modalidad de taller.

Palabras clave: GeoGebra, tecnología, representación, situación de variación, optimización.

Abstract: In order to contribute by a concrete way to the training of Mathematics teachers from the pedagogical use of the technologies, we proposed to work on a task which is usually developed at the end of the Differential Calculus courses. The basic statement is: *a wire of length K is to be split in two parts. One of them is going to be bent so that it forms an equilateral triangle and the other one to form a circumference. How should the wire be cut in order to minimize the addition of the areas of the resulting triangle and circle figures?* As a didactic tool, we used GeoGebra, free software for dynamic geometry, to carry out the geometric construction, the representation of the situation in both a graphical and a symbolic manner, and the analysis of the equivalence between the systems of representation. Through a workshop we share the results of its implementation by Latin American teachers.

Key words: GeoGebra, technology, representation, variation situation, optimization.

Presentación

Con esta actividad se pretendía analizar las estrategias utilizadas por los docentes al hacer el paso entre los diferentes registros de representación de la situación planteada, tratando de indagar lo planteado por Duval (2004), al considerar que en muchas ocasiones, los alumnos no llegan a reconocer un mismo objeto matemático a través de sus diferentes representaciones semióticas posibles, y la conversión entre las distintas representaciones de un mismo objeto presenta graves dificultades. Además, las posibilidades del programa GeoGebra de realizar representaciones dinámicas de un objeto y poder analizarlas frente a otras de sus representaciones, creemos que es un atenuante significativo en este tipo de actividad.

Las comparaciones internacionales sobre capacidades matemáticas de estudiantes de secundaria ubican a la mayoría de los países latinoamericanos prácticamente al final de un conjunto considerable de naciones (Ministerio de Educación de España, 2009). Considerando además las Metas Educativas para el año 2021 en Iberoamérica (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 2010), se requiere incorporar las TIC a los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que la inclusión social y el acceso al conocimiento se vinculan cada vez más al uso de las mismas. Para mejorar el panorama actual, un aspecto importante a tener en cuenta es la formación continua de los profesores en Matemática. Se necesita resignificar las formas de enseñar y aprender Matemática. Una forma concreta de hacerlo es a partir del diseño, implementación y evaluación de propuestas de actividades concretas que atiendan a las necesidades detectadas.

En Matemática, las TIC favorecen el desarrollo de habilidades cognitivas, como representar, identificar y explorar comportamientos de relaciones matemáticas (Moreno y Santos, 2002). Hegedus & Kaput (2004) conciben a las TIC como una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano, afirmando que estas nuevas herramientas conducen a nuevas maneras de pensar o razonar. Para Estrada (2005), un rasgo importante de las representaciones de los objetos matemáticos en un ambiente dinámico es poder operar con ellos y ver al mismo tiempo en una pantalla el efecto de estas acciones sobre dichas representaciones. El dinamismo propio de software matemático se constituye en una característica de un valor formativo muy importante, ya que transforman significativamente las experiencias de aprendizaje matemático de los aprendices (Rojano y Moreno, 2002).

A su vez, Cabero (2004) advierte que tampoco se debería depositar confianza absoluta a las TIC descuidando los otros aspectos importantes para llevar a cabo propuestas didácticas eficientemente. Por ello consideramos propicio compartir en detalle una actividad que emplea un software geométrico específico, comentando incluso algunos resultados de una implementación llevada a cabo con docentes. De acuerdo con Herrera (2010), el debate sobre el papel de las tecnologías electrónicas en la Educación Matemática ya no se centra en si debemos usarlas o no, sino en cómo emplearlas inteligentemente para que nuestros estudiantes aprendan mejor Matemática. Este autor le otorga valor a las herramientas tecnológicas justamente para fomentar la observación, la discusión y el pensamiento crítico en los estudiantes. Estas habilidades adquieren relevancia en el escenario actual, donde la cantidad y variedad de información aumenta y se transforma continuamente.

Actividades como la que aquí se comparte son ilustrativas de la capacidad que tienen estos instrumentos para incidir en la formación matemática de los alumnos, pues ofrecen representaciones y relaciones entre objetos matemáticos con las que a su vez pueden interactuar, dando una nueva dimensión a la construcción del conocimiento matemático (Lupiáñez y Moreno, 2002).

Propuesta de actividad

A continuación se detallan las etapas básicas o centrales de la actividad consistente en la siguiente situación:

Un alambre de longitud K se corta en dos partes. Una es doblada en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de circunferencia. ¿Cómo deberá ser cortado el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y del círculo sea mínima?

Realizando las construcciones:

1. Abre el programa GeoGebra y construye un segmento AB y un punto D sobre él. Construye un triángulo equilátero de perímetro AD. Mueve el punto D y verifica que la construcción es consistente. Construye una circunferencia cuyo perímetro sea DB. Encuentra el área del triángulo y el área del círculo.
2. ¿Qué observas cuando mueves el punto D? ¿Con qué crees que está asociado? ¿Esto sucede moviendo cualquier otro punto? ¿Por qué?

Pasando a otras representaciones:

1. Muestra los ejes, transfiere la suma de las áreas al eje *y* y la longitud del segmento AD al eje *x*. Marca el punto P, que resulta de la intersección entre la recta vertical que pasa por el transferido de AD en *x* y el transferido de la suma del área del triángulo y la del círculo en *y*. Oculta estas rectas y activa la traza del punto P. ¿Qué observas cuando mueves el punto D? ¿Con qué lugar geométrico asocias este comportamiento?
2. Desactiva la traza de P y encuentra el lugar geométrico de P cuando mueves D. Ubica cuatro puntos sobre el lugar geométrico y construye una cónica que pase por los cinco puntos que aparecen ahora sobre dicho lugar geométrico.
3. Con el comando ecuación y coordenadas, encuentra la ecuación de la cónica recientemente hallada. Mueve ahora el punto A hasta que la longitud del segmento AB sea un entero. Compara la longitud de AB con los coeficientes de la ecuación. ¿Qué observas cuando mueves A? ¿A qué crees que se debe?

Buscando un patrón:

1. Conjetura comportamientos asociados a la situación en estudio.

2. Propón una secuencia de actividades que nos permita, como docentes, encontrar un patrón (o modelo) a partir de la generalización de lo recientemente analizado.
3. ¿Qué ejemplos de actividades de este tipo les propondrías a tus alumnos de secundario? Ensaya algunas propuestas.

Método

A partir de un segmento AB de longitud *k*, se coloca un punto D sobre éste. Se hace AD = *c* y BD = *k-c*. Se obtienen los perímetros del triángulo equilátero y de la circunferencia, que la situación planteada solicita. Con estos perímetros como guía se construyen tanto el triángulo equilátero como la circunferencia. Se calculan sus áreas respectivas, A_t del triángulo y A_c del círculo, así como la suma de éstas. Al mover el punto D, se puede revisar la consistencia de la construcción. Al transferir la longitud de *c* sobre el eje *x* y la suma $A_t + A_c$ al eje *y*, construir una recta vertical que pase por el transferido de *c* y otra horizontal que pase por el transferido de $A_t + A_c$. Estas rectas se intersecan en un punto, que llamamos P. Al activar la traza del punto P y mover el punto D, se puede ver el lugar geométrico determinado que permite analizar gráficamente la relación entre el área del triángulo y del círculo con su suma, visualizándose qué tramo de la gráfica recibe mayor aportación de una u otra figura geométrica. A partir de esta gráfica, se encuentra, con la ayuda del programa, la ecuación del lugar geométrico, donde además se puede analizar la relación de la ecuación con los otros elementos de la construcción.

Para analizar la relación entre la longitud del segmento AB = *k* y los coeficientes de la expresión matemática del lugar geométrico que describe el punto P al mover D, y asignar sentido a cada representación de la situación, al asociarla con elementos de otra representación, se compara cada una de las representaciones que se obtienen, con la ventaja -que el programa permite- de verlas simultáneamente y así apreciar su constante variación al mover el punto D. A partir del análisis de las tres representaciones, y al comparar con la longitud *k* del segmento, se pueden encontrar algunos patrones, objeto de estudio aquí.

Se discute con los participantes la explicación matemática de este hecho, basados en la relación entre las áreas del triángulo y del círculo que se construyeron con cada trozo del alambre como referencia. Se visualiza, tanto en la gráfica como en los valores numéricos de las áreas, el punto mínimo que el problema solicita.

Resultados de la implementación

A continuación se comparten las principales apreciaciones, en relación al impacto de la propuesta, sobre la implementación de ésta con un grupo de educadores matemáticos latinoamericanos que asistieron al taller, en el marco de la XXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Se hicieron las construcciones geométricas, obteniéndose además una representación algebraica donde los coeficientes -a modo de ejemplo- son los que pueden apreciarse en la Figura 1.

Se discutió con los participantes la explicación matemática de esto, comparando los sistemas de representación entre sí y haciendo corresponder a otros sistemas cada elemento identificado en un cierto sistema de representación. El área del triángulo es $A_t = \frac{B \times h}{2}$ y la altura del triángulo de perímetro *c* es $h_1 = \sqrt{3}\,\frac{c}{2}$. Así que el área del triángulo equilátero en función de *x* es $A_t(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$ y la del círculo es $A_c(x) = \pi\left(\frac{k-x}{2\pi}\right)^2$. La expresión algebraica correspondiente a la suma de las áreas es $A_s(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{\pi}\right)x^2 - \frac{2kx}{\pi} + \frac{k^2}{\pi}$, que es equivalente a la mostrada en la Figura 1 -para el ejemplo en estudio-, al remplazar el valor correspondiente de *k* y dividir por el coeficiente de *y*.

En relación a la implementación del taller, consideramos como urgente la alfabetización informática de los docentes en Matemática de nuestros países latinoamericanos. Los participantes del taller dejaron ver su casi nula familiarización con este tipo de medios tecnológico-didácticos. Sin embargo, se consideraron y discutieron aspectos centrados en la incidencia de las TIC en los procesos y resultados del aprendizaje. Resaltaron la fortaleza de programas como el GeoGebra al facilitar a los estudiantes conjeturar e inferir con relativa facilidad, además de permitir realizar procesos inductivos utilizando muchísimos datos, con alto nivel de confiabilidad. Se mencionaron las bondades del programa, al permitir visualizar simultáneamente diferentes sistemas semióticos de representación del mismo objeto matemático, permitiendo asignar significado a los diferentes elementos presentes en las representaciones, en relación con sus equivalentes en los otros sistemas.

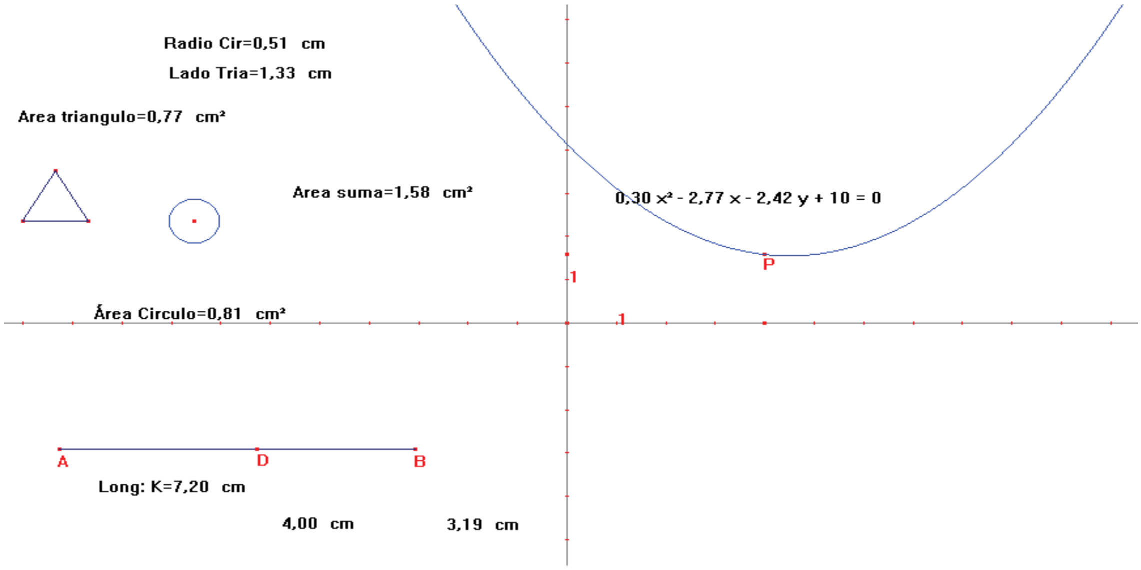

Figura 1. Construcción geométrica de la situación empleando GeoGebra

Tal es el caso de los puntos de la parábola de la construcción y su dependencia del tamaño de las figuras y la dependencia de toda la construcción del segmento AD. La mayoría de los participantes reconocieron en el programa su utilidad como herramienta y, cuando fueron llevados a utilizarlo, como instrumento (Moreno y Santos, 2002) y comenzaron a realizar comentarios muy favorables sobre sus potencialidades didácticas. Esto pone en evidencia que su falta de utilización en las aula es más por falta de interacción con este tipo de programas, que por apatía o temor a éstos. Hicieron dos tipos de comentarios, donde se puede evidenciar un acercamiento hacia la utilización del software como instrumento: 1) ofrece facilidades de innovación continua de las construcciones, lo cual es imposible de realizar con los medios tradicionales. Esta diferencia dinámica en velocidad y precisión hace factible una metodología de enseñanza de la geometría euclidiana que, si nos limitamos al papel y lápiz, es sólo posible desde el punto de vista teórico y con muchas limitaciones; 2) el uso del GeoGebra permite alcanzar los mismos resultados que los logrados con los medios convencionales en un tiempo significativamente menor, así como también tiene el poder de modificar dinámicamente las construcciones y observar lo que ocurre en los distintos casos, facilitando el estudio y análisis de propiedades.

Comentarios finales

Jiménez (2006) asegura que todo contenido del currículo que tenga relación con los procesos de Cálculo será necesariamente influenciado por los aportes de las TIC. Esto conlleva una necesaria redefinición de los énfasis en la enseñanza de algoritmos y conceptos. Incluso adquiere relevancia la reflexión docente sobre la intencionalidad en los usos de los materiales y recursos didácticos disponibles (Flores, 2006), entre ellos los software educativos matemáticos.

Estos programas se constituyen en soporte para el desarrollo innovador de las actividades en el aula de Matemática y que, sin la orientación del docente en las actividades académicas que involucran esta herramienta, difícilmente se lograrían los resultados esperados. Es por ello que siempre debemos tener presente que las herramientas tecnológicas surtirán efecto en el aprendizaje siempre y cuando el docente logre adecuar las mismas a las necesidades educativas existentes.

Para finalizar, cabe resaltar que actividades de este tipo, que involucran TIC, trascienden la mera acción técnica del uso de una herramienta, ya que contemplan el desarrollo de habilidades matemáticas, como por ejemplo: conjeturar, construir, comparar, describir, justificar, visualizar,… de suma importancia para la alfabetización matemática de las personas. De eso se trata: de potenciar los aprendizajes matemáticos de los estudiantes, presentándose aquí una actividad concreta con software para ello.

Referencias bibliográficas

Cabero, J. (2004). La transformación de los escenarios educativos como consecuencia de la aplicación de las TICs: estrategias educativas. En M.I. Vera y D. Pérez. (Eds.), *Formación de la ciudadanía. Las TICs y los nuevos problemas* (pp.17-43). Alicante: Asociación Universitaria del Profesorado de Didáctica de las Ciencias Sociales.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Estrada, J. (2005). *Diseño de situaciones dinámicas en un ambiente computacional como un escenario para el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo*. Recuperado el 11 de marzo de 2010 de http://polya.dme.umich.mx/ eventos/MemoriaXIII.pdf.

Flores, P. (2006). Los materiales y recursos didácticos en la formación de profesores de matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *12*(41), 77-97.

Hegedus, S. & Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp.129-136). Bergen: Bergen University College.

Herrera, M. (2010). Introducción al Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 1149-1151. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Jiménez, L. (2006). *Enseñanza de la matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual*. Recuperado el 06 de marzo de 2010 de http://www.uned.ac.cr/memencmate/Ponencias/procesoensenanza/Enseñanza%20de%20la%20Matemática%20-%20Lilliana%20Jiménez%20Montero.pdf.

Lupiáñez, J. y Moreno, L. (2002). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. *Memorias del Seminario Nacional de formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp.248-256). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación de España (2009). *Pisa 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. OCDE. Informe español*. Recuperado el 25 de febrero de 2011 de http://www.educacion.gob.es/cesces/actualidad/pisa-2009-informe-espanol.pdf.

Moreno, L. y Santos, M. (2002). El proceso de transformación del uso de la tecnología en una herramienta para la solución de problemas de matemáticas por parte de los estudiantes. *Memorias del Seminario Nacional de formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp.263-268). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2010). *2021. Metas educativas. La educación que queremos para la generación de los Bicentenarios*. Recuperado el 25 de febrero de 2011 de http://www.oei.es/metas2021/todo.pdf.

Rojano, T. y Moreno, L. (2002). Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo. *Memorias del Seminario Nacional de formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp.194-202). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.