

LOS ARTEFACTOS Y LA VISUALIZACIÓN EN EL ETG DEL PROFESOR

Carolina Henríquez Rivas, Elizabeth Montoya Delgadillo
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, FONDECYT N° 1110988.
carohenriquezrivas@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Chile

Resumen. El propósito de este escrito es mostrar los primeros avances y observaciones realizadas en una investigación de doctorado en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. El objetivo de investigación es analizar el tránsito que realiza el profesor, entre la geometría euclidiana y la geometría analítica en la enseñanza secundaria en Chile, sustentado en un enfoque teórico denominado *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETG)* y, otras perspectivas que permiten profundizar el análisis sobre instrumentos y visualización en geometría.

En las observaciones se ha analizado y caracterizado el ETG de profesores debutantes cuando enseñan geometría euclidiana, centrado en los artefactos utilizados y la actividad de visualización involucrada.

Palabras clave: trabajo geométrico, profesor, artefactos, visualización

Abstract. The purpose of this paper is to show the first advances, and observations in PhD research in Didactic of Mathematics at the Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. The research objective is to analyze the transit that makes the teacher, between Euclidean geometry and Analytic geometry in secondary education in Chile, based on a theoretical approach called *Geometrical Paradigms and Geometrical Working Spaces (GWS)* and other perspectives that allow deepen analysis about instruments and visualization in geometry.

The observations were analyzed and characterized the GWS debutantes teachers when teaching Euclidean geometry, focusing on the artifacts used and visualization activity involved.

Key words: geometric work, teacher, artifacts, visualization

Introducción

El propósito de este escrito es mostrar los primeros avances y observaciones realizadas en una investigación de doctorado en Didáctica de la Matemática en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y, en el marco de un proyecto Fondecyt. Estas observaciones nos han permitido realizar algunas caracterizaciones del ETG del profesor debutante –hasta 3 años de ejercicio de la profesión– cuando enseña geometría euclidiana y *da paso* a la geometría analítica –lo que llamamos *tránsito*–. Esta investigación está inserta en el marco teórico de la Didáctica de la Matemática *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETG)* iniciado por de Houdement y Kuzniak (1996, 2006). Además, han sido considerados dos enfoques cognitivos que permiten profundizar en el estudio del ETG; el de Rabardel (1995) sobre la noción de instrumentos y la visualización desarrollada por Duval (2004, 2005).

El principal objetivo de investigación es analizar y caracterizar el *tránsito* que efectúa el profesor en la Enseñanza Media chilena –desde 14 a 17 años, aproximadamente–, de la geometría euclidiana a la geometría analítica, donde el trabajo geométrico cambia, particularmente, los instrumentos usados, los registros semióticos y la actividad de

visualización involucrados, además, cómo es que articula los elementos de los planos epistemológico y cognitivo (ver figura 1) involucrados en su ETG en estas dos geometrías.

Es importante precisar que en el trabajo de investigación doctoral, la atención está centrada en el *tránsito* de la Geometría Euclidiana (GE) a la Analítica (GA) en la Enseñanza Media desde una perspectiva didáctica, pues es en estos niveles que se estudian ciertos objetos matemáticos, principalmente desde la perspectiva de la GA como si se tratara de otro tipo de geometría, donde las influencias mutuas –y el *tránsito*– no son considerados, coincidiendo al respecto con la posición de Klein (1908). Luego, la noción de *tránsito* considerada, no solo es el paso de una a otra, sino que momentos en la enseñanza donde el énfasis está en una u otra geometría.

Según esta noción de *tránsito* entre las geometrías, nos encontramos frente a un momento del saber enseñado, en que ciertos fenómenos de tipo matemáticos y cognitivos, no son problematizados e incluso a nivel saber a enseñar podemos observar que aspectos relacionados con el *tránsito* de GE a GA son *invisibles e incuestionables*. De forma similar, esto ocurriría no solo en Chile, por ejemplo, Gascón (2003) se refiere a ciertos aspectos que han permanecido *transparentes* en la institución escolar en España, en particular, en el caso de la Geometría. Luego, en este estudio pretendemos desvelar, analizar y caracterizar aspectos de tipo matemático-cognitivo, que habitan en la enseñanza de la Geometría a nivel de Enseñanza Media y que hasta el momento no han sido abordados.

En este escrito, mostraremos el análisis al *ETG idóneo* de un profesor debutante en una línea de investigación desarrollada por los autores citados en el primer párrafo. Para ello, mostraremos la caracterización del trabajo del docente, empleando un instrumento de estudio que nos ha permitido estudiar en profundidad cómo activan y controlan los profesores su ETG en situación de aula real.

Una herramienta de análisis

El sustento teórico del estudio, que permite describir y caracterizar el trabajo geométrico de un individuo cuando se enfrenta a una tarea en geometría, se denomina *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETG)*, iniciado por de Houdement y Kuzniak (1996, 2006) y que en Chile ha sido difundido por Montoya (2010) recientemente. Esta perspectiva teórica del ETG contempla tres niveles distintos; considera un referencial matemático (ETG de referencia), el espacio definido en términos didácticos (ETG idóneo) y el espacio propio de cada utilizador fruto de la reflexión entre sus conocimientos y los que utiliza para resolver una tarea (ETG personal). Desde esta perspectiva es posible observar cómo un *geómetra* –sujeto que resuelve una tarea geométrica– reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y el conocimiento de distintos modelos geométricos cuando enfrenta un problema en geometría,

conformando su propio ETG. En este espacio, fruto de la interacción entre el individuo y el problema geométrico, el ETG puede variar, pues dependiendo del paradigma dominante (y la institución), los problemas geométricos toman distinta interpretación y validez para el geómetra.

El ETG se conforma por dos planos: el cognitivo y el epistemológico. El plano epistemológico se relaciona con componentes de tipo matemático y está constituido por tres polos: el referencial teórico, el de los *artefectos* y el espacio local y real. En este estudio, consideramos con mayor énfasis el polo artefactos del plano epistemológico, sustentado en el enfoque instrumental desarrollado por Rabardel (1995). Los artefactos pueden ser de distinto tipo; materiales y simbólicos. En los *materiales*, los de tipo *tecnológico* permiten realizar procesos que con artefactos *tradicionales*, como lápiz y compás, sería más difícil realizar, o bien no se dejan ver y, por otro lado, los artefactos *simbólicos*, que permiten al geómetra utilizar instrumentos teóricos como teoremas, definiciones o ecuaciones al realizar una tarea específica. En este trabajo, se mostrará un trabajo asociado a los artefactos de tipo simbólico en el ETG de un profesor debutante. Respecto del plano cognitivo, está constituido por tres polos: la *visualización*, las construcciones y el polo prueba. Este análisis, considera en relación a este plano, el proceso de visualización, pues interesa analizar cómo los docentes realizan el trabajo que involucra el registro figural y la actividad de semiosis, en particular los tratamientos vinculados a este registro, sustentado en los trabajos de Duval (2004, 2005).

Paradigmas Geométricos

En la investigación realizada por Houdement y Kuzniak (1996, 2006) y Kuzniak (2008, 2011) ellos identifican tres tipos de geometrías que coexisten en la enseñanza de la geometría y cuya función es permitir que el alumno construya su propio espacio de trabajo geométrico guiado por el docente. En este espacio, los problemas geométricos toman distinta interpretación y validez dependiendo del paradigma y de la institución elegida. La noción de *paradigma geométrico* ha sido inspirada por la noción de paradigma introducida por Kuhn (1962) en su obra sobre la estructura de las revoluciones científicas.

Los tres tipos de geometrías, o bien, tres *paradigmas geométricos* que habitan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, son considerados en forma conjunta, no están jerarquizados, sino que el horizonte de trabajo es diferente, estos son:

❖ Geometría I: Geometría Natural

La geometría sobre objetos reales, importancia en las mediciones, aproximaciones, trabajo de tipo material.

❖ Geometría II: Geometría Axiomática Natural

Objetos geométricos descritos por una propiedad, su definición, al momento de validar, esto se hace dentro de un sistema axiomático local.

❖ Geometría III: Geometría Axiomática Formal

Independencia de la geometría y la realidad, axiomática explícita y completa.

Espacio de Trabajo Geométrico

Podemos observar cómo un geómetra reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y el conocimiento de distintos modelos geométricos cuando enfrenta un problema en geometría. Este ambiente de reflexión, fruto de la interacción entre el individuo y el problema geométrico, donde el trabajo se asocia a los paradigmas, es lo que se denomina *espacio de trabajo geométrico* (ETG) y, dependiendo del paradigma dominante, el ETG variará.

En el ETG se articulan dos niveles, uno epistemológico, y otro cognitivo. El nivel epistemológico está constituido por tres componentes: espacio local y real, referencial teórico y la componente *artefectos*. El nivel cognitivo está conformado por tres procesos: la visualización, la construcción y el proceso discursivo que produce la prueba.

En los distintos espacios de trabajo geométrico es posible identificar tres niveles de ETG, dependiendo de la función de la reflexión del geómetra cuando se enfrenta a un problema geométrico; en torno a la relación con el saber definido de manera ideal solamente sobre criterios matemáticos, cómo enseña este saber en una institución dada con una función definida y, cómo se enfrenta al problema geométrico, cómo se apropia y utiliza los conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. Estos son: ETG de *referencia*, ETG *idóneo* y ETG *personal*, respectivamente.

Este marco teórico, coincide con la idea de Gonseth (1945-1955) de concebir la geometría como una síntesis dialéctica entre tres diferentes modos de conocimiento sobre los cuales el geómetra se apoya al resolver una tarea geométrica: la *intuición*, que articula los objetos reales con la visualización, el uso de artefactos y la construcción mediante la *experiencia* y, el modelo teórico puesto en juego que permite probar vinculado por la *deducción*. Esta organización del ETG se esquematiza de la siguiente forma (Kuzniak, 2011):

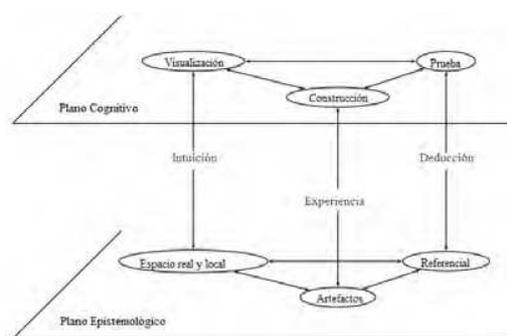


Figura 1: El Espacio de Trabajo Geométrico

La activación y control del ETG puede ser diseñada a nivel de los profesores (nivel idóneo) o a nivel de referencia. Es posible analizar las entradas posibles en el trabajo geométrico (personal) especificando los polos puestos en juego. En este caso, analizamos cómo un profesor activa y controla el ETG en una situación de aula real.

En este trabajo consideramos los polos artefactos y visualización en profundidad, pues no solo nos interesa observar cómo se vinculan los planos del ETG en general, es decir, estudiar y caracterizar las circulaciones del ETG del profesor, sino que además, estudiar aspectos más específicos relacionados con los artefactos empleados por el profesor y cómo esto podría afectar ETG personal de los estudiantes y, también, cómo las formas de visualizar las figuras podrían favorecer o no el tránsito entre las dos geometrías.

Los artefactos en el ETG

Los artefactos conforman uno de los polos del ETG en el plano epistemológico. Este componente y las técnicas de uso son problema central para la psicología (Rabardel, 1995). Es necesario comprender los mecanismos y los procesos por los cuales son concebidos los artefactos para proporcionar ayuda real al geómetra, además, se deben analizar y comprender los significados y contextos en donde están inscritos sus usos y considerando que se desarrollan en situaciones sociales donde el rol del profesor es fundamental.

El enfoque de Rabardel sobre los artefactos está relacionado con sus usos, es decir, no deben ser analizados como cosas transparentes, sino cómo estudiar los esquema de uso. En este sentido, los instrumentos pasan a ser entidades mixtas formadas por el objeto técnico (artefacto), ya sea material o simbólico y componentes cognitivos relacionados con sus usos (esquemas de uso).

El término *artefacto* que utilizaremos, está relacionado con una cosa que ha sufrido transformación de origen humano y, lo que nos interesa, son los procesos relacionados con su uso, es decir, se refiere a todo lo que nos permite manipular el objeto geométrico en cuestión,

sea este de tipo material o simbólico. El término *instrumento* será empleado para designar el artefacto en situación. Por lo tanto, son las actividades que involucran instrumentos, las de nuestro interés a estudiar.

Las situaciones que involucran uso de instrumentos, se caracterizan por comprender los siguientes tres polos: el sujeto utilizador, el instrumento y, el objeto al que la acción de utilizar el instrumento se dirige. Posteriormente, Rabardel agrega un cuarto polo, que lo conforman las relaciones del sujeto con otros sujetos. Por ejemplo, cuando el artefacto es de tipo tecnológico (software), donde las relaciones colaborativas son fundamentales. Estas relaciones entre los polos, se muestran en la siguiente figura 2:

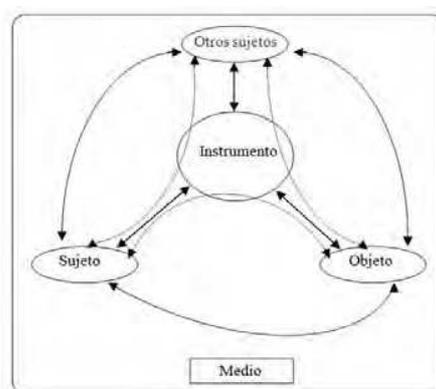


Figura 2: "Modelo de situaciones de las actividades colectivas instrumentadas" (Rabardel, 1995, p. 62).

El instrumento tiene entonces una posición intermedia, es decir, es un mediador entre sujeto, objeto y los otros sujetos que interactúan entre sí; constituye un intermediario donde la característica principal es que se adapta en términos de propiedades materiales o simbólicas puestas en escena, pero también, cognitivas y semióticas en función de un tipo de actividad en la cual el instrumento se inserta.

Para los efectos de este análisis, emplearemos el modelo de situaciones con instrumentos de Rabardel, sin considerar el polo de las interacciones con otros sujetos. Esto queda, para un trabajo futuro.

La visualización en el ETG

El proceso de visualización conforma uno de los polos del plano cognitivo del ETG. En este estudio, consideramos la noción de visualización desarrollada por Duval (2004, 2005). Según este autor, la actividad cognitiva requerida para la geometría exige la articulación de dos registros de representación que funcionan de manera simultánea e interactiva; el lenguaje y registro de las figuras.

La actividad cognitiva vinculada al registro figural es la *visualización*. Las formas de visualizar pueden funcionar de modo icónico o no icónico, según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades. En el caso de la primera forma de visualizar, los objetos se identifican o representan por semejanza de un objeto real (objeto de tipo estable, no modificable). Además, la figura es independiente de las operaciones que se realizan. En el segundo caso, el de la visualización no icónica, las figuras se construyen y descomponen. Se trata de una secuencia de operaciones que permite reconocer y movilizar propiedades geométricas, es decir, se realiza construcción de figuras usando instrumentos, las figuras se descomponen usando trazos suplementarios y se efectúa de-construcción dimensional de figuras (Duval, 2005). Según Duval esta última forma de ver es la requerida en geometría “La manera de ver requerida en geometría: la deconstrucción dimensional de las formas” (p. 20).

El ETG de un profesor debutante

En el marco de un proyecto Fondecyt, sobre el espacio de trabajo matemático (ETM) de profesores debutantes, en donde se realizan análisis al trabajo en situaciones de aula reales durante los años 2011 y 2012, consideramos un caso para mostrar cómo se analiza y caracteriza el *ETG idóneo* de los docentes centrados en los polos artefactos y visualización en esta investigación.

Los objetivos propuestos en este estudio son: *identificar tareas durante una sesión, describir y caracterizar el ETG del profesor según videos y transcripciones e identificar las interacciones de los estudiantes que generan discusión para cada tarea*. En la etapa de creación y validación del instrumento de análisis para estudiar el ETG idóneo del profesor, realizado durante el primer semestre del año 2012, se asignó una clasificación a cada polo con un número o letra según el plano del ETG, con la finalidad de permitir registrar y caracterizar el trabajo realizado durante las sesiones de forma clara y concreta. Esta clasificación se muestra a continuación:

- ❖ Plano cognitivo: visualización (A), Construcción (B), Prueba (C).
- ❖ Plano epistemológico: espacio local y real (1), artefactos (2), referencial (3).

Luego, el instrumento que permite describir y caracterizar el ETG del profesor, es el de la tabla siguiente, donde se muestra el extracto de una clase analizada a uno de los profesores debutantes que han sido grabados.

Tarea 3° 7°	Circulación	Descripción y caracterización del ETG del Profesor	Intervenciones de estudiantes
Tarea de clase:	3	Relaciona la <u> semejanza con la proporcionalidad</u> , estudiada la clase anterior -según docente-.	1: Un estudiante (5° 1°) pregunta por la sombra que se determinará, pues la configuración dibujada no se relaciona directamente con los objetos reales (no se distingue entre configuración 2D/2D y 3D/2D).
<i>Determinar la altura de una pirámide mediante semejanza de triángulos.</i>	1 A	Los objetos que menciona son <u>pirámide y su altura</u> , para determinar la altura de un bastón. En la pizarra <u>representa la pirámide (3D/2D)</u> mediante el dibujo de un triángulo rectángulo (a mano alzada), no usa artefactos de manipulación, muestra dos triángulos rectángulos (sin indicarlo) donde los catetos corresponden a la sombra (ver intervención 1 de estudiantes) y altura de una pirámide y un bastón, respectivamente. <i>Observación 1: no indica por qué esa configuración 2D/2D corresponde a la de una pirámide y además, no hace relación con la noción de semejanza estudiado – según ella- anteriormente.</i> <i>Observación 2: la profesora ante pregunta 2 responde que sí, y que a partir de esta idea nace el teorema.</i>	2: Un estudiante pregunta (8° 30°) si esto permite determinar medidas de otros objetos.
Tarea genérica: <i>Determinar la medida de un cateto mediante la proporcionalidad de triángulos.</i>			

Tabla I: Presentación del teorema de Tales y la circulación en el ETG

Luego de analizar la tarea presentada, podemos afirmar que el profesor se cambia de un marco geométrico a uno algebraico, al proceder con una ecuación cada vez que tiene un segmento desconocido. No la intensidad en esta investigación, hacer un juicio de valor al respecto, sino que, evidenciar el cambio de marco en el *espacio de trabajo matemático* y como hemos afirmado, la tarea geométrica es una excusa para pasar a las ecuaciones, como si fuese una “geometría aritmetizada” perdiendo el horizonte la tarea geométrica en sí. En este sentido, el trabajo está centrado en realizar una algoritmia correcta, los *artefactos* empleados son simbólicos, el profesor no promueve ni realiza trabajo con instrumentos materiales como regla y compás, o bien, un software geométrico. Respecto del trabajo de *visualización*, es más bien de tipo icónico, pues no relaciona propiedades con la figura, se trata de una configuración estática que funciona como apoyo visual que ayuda a desarrollar el trabajo algorítmico. En resumen, el profesor en este caso, centra su trabajo en procedimientos algebraicos, el énfasis en resolución de ecuaciones, dando poca importancia al uso de artefactos para efectuar construcciones, así como a los tratamientos asociados al registro figural requeridos en geometría, perdiendo el sentido en el trabajo geométrico. Además, pensamos que esta forma de trabajar, más bien mecánica, no favorecería al tránsito entre las geometrías.

Conclusiones

La presentación de este avance de investigación, tiene como objetivo principal mostrar cómo es analizado el trabajo geométrico de profesores en situaciones reales de aula de Enseñanza Media, por medio de un caso particular observamos un débil trabajo geométrico (ETM) del debutante que no explota en sus alumnos un trabajo geométrico en toda su dimensión. El estudio se sustenta en un marco teórico que articula la teoría de los Paradigmas Geométricos y ETG desarrollada por Houdement y Kuzniak con el enfoque instrumental de Rabardel y la

visualización según Duval. Esto nos ha permitido contribuir y profundizar en aspectos teóricos a la luz de enriquecer los análisis y mejorar las caracterizaciones.

Esperamos en un futuro, contar con evidencia contundente respecto del trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la Geometría Euclidiana a la Analítica en la Enseñanza Media chilena, a la luz de realizar mejoras en términos de enseñanza y, también, aportes en términos teóricos en esta línea de investigación en Didáctica de la Matemática.

Referencias bibliográficas

- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 10, 5-53.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma*, 44, 25-34.
- Gonseth, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne: Éditions du Griffon.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-321.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Klein, F. (1908). *Matemática elemental: Desde un punto de vista superior. Volumen II. Geometría*. Traducción de R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática.
- Kuhn, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Traducción de Carlos Solís Santos. México: Fondo de Cultura Económica (Breviarios; 213).
- Kuzniak, A. (2008). Personal Geometrical Working Space: a Didactic and Statistical Approach. *Studies in Computational Intelligence (SCI)*, 127, 185–202.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Montoya E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. (Tesis de doctorado no publicada). Université Paris Diderot-Paris 7, Paris, Francia.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Francia: Armand Colin.