



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

**Ciclo de Conferencias
en Educación Matemática**

GEMAD

Universidad de los Andes

Junio 21 de 2014

Relación entre representaciones de objetos matemáticos y sentidos asignados por estudiantes

Pedro Javier Rojas Garzón
Profesor LEBEM y Maestría en Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Director
Grupo de Investigación MESCUUD





Relación entre representaciones de objetos matemáticos y sentidos asignados por estudiantes

CONTENIDO

- 1. Contextualización***
- 2. Interés investigativo***
- 3. Objetos matemáticos, representaciones y sentidos***
- 4. Instrumentos de Indagación***
- 5. Desarrollo***
- 6. Resultados y Conclusiones***



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación

1. CONTEXTUALIZACIÓN





A manera de contextualización

Ejemplo 1 [Estudiantes de grado 5º, Italia]

Calcular la probabilidad del siguiente evento:
Lanzando un dado se obtenga un número par.

➤ Dan como respuesta $3/6$:

... resultados que hacen verdadero el evento (el numerador) sobre resultados posibles al lanzar un dado (el denominador).

➤ Reconocen que dicha probabilidad se puede expresar como 50%:

[aceptan la equivalencia entre $3/6$ y $50/100$].

Caso reportado por D'AMORE (2006)



Ejemplo 1(Continuación ...)

... También validan como respuesta la expresión $\frac{1}{2}$, propuesta por uno de los estudiantes.

- Investigador:

... dado que la fracción $\frac{4}{8}$ también es equivalente a $\frac{3}{6}$, entonces $\frac{4}{8}$ sería una respuesta adecuada.

... *Respuesta unánime: ¡No!*

El profesor del curso, quien dirigió la actividad anterior, afirma:

«*[... La fracción $\frac{4}{8}$] no puede representar el evento porque **las caras de un dado son 6 y no 8**».*



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

DADO DE 8 CARAS





Ejemplo 2

[Estudiantes Universitarios, Italia]

➤ El sentido asignado por algunos a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ es el de una “**circunferencia**”.

➤ Realizan las transformaciones requeridas para verificar que las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y , $x + y = \frac{1}{x + y}$ son equivalentes.

¿ $x + y = \frac{1}{x + y}$ también es una circunferencia?

○ **Estudiante A:**

“Absolutamente no, una circunferencia debe tener $x^2 + y^2$ ”

○ **Estudiante B:** “Si se simplifica, ¡sí!”



Al respecto, ¿qué pasa en Colombia?

Exploraciones con estudiantes de diferentes grados de escolaridad (grados 9° y 11°), estudiantes universitarios y profesores en ejercicio.

*... Necesidad de documentar el fenómeno e indagar sobre la complejidad y dificultad para articular sentidos asignados a los objetos matemáticos, asociadas a la pareja:
(representaciones semióticas, objeto).*



Algunas preguntas

- ¿Qué origina y qué caracteriza estos cambios de sentido?
- ¿Se trata simplemente del desconocimiento por parte del sujeto de las reglas propias de un sistema de representación (numérico o algebraico), lo cual le dificulta realizar transformaciones al interior de estos?



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación

2. INTERÉS INVESTIGATIVO





- *¿Qué explica los cambios del sentido asignado a un objeto matemático en situaciones de transformación de tratamiento entre representaciones semióticas?*



- **Documentar el fenómeno** relacionado con la dificultad para articular los sentidos asignados a los objetos matemáticos en situaciones de tratamiento entre representaciones semióticas.
- **Describir y explicitar diferentes procesos de asignación de sentido** logrados por estudiantes en relación con tareas específicas de tratamiento entre representaciones semióticas de objetos matemáticos.



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación

3. OBJETOS MATEMÁTICOS, REPRESENTACIONES Y SENTIDOS





Registros: Sistemas de representación semiótica que posibilitan tres actividades cognitivas:

- (1) Constitución de una representación,
- (2) Transformación de una representación *al interior del sistema (tratamiento)* y
- (3) Transformación de una representación *de un sistema a otro (conversión)*.



Registro semiótico: Lenguaje aritmético:

- Rep. 1: Escritura fraccionaria: $\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{15}{30}, \dots$
- Rep. 2: Escritura decimal: $0,5 ; 0,4\bar{9}$
- Rep. 3: Escritura exponencial: 5×10^{-1}
- Rep. 4: Escritura porcentual: 50%

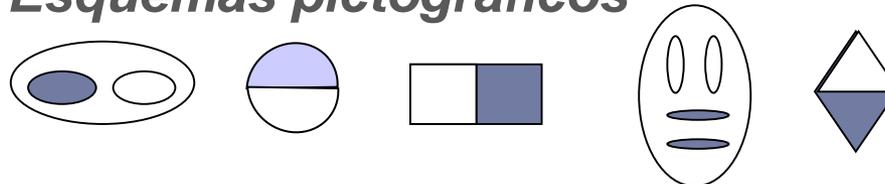
Transformación
tipo
Tratamiento

Registro semiótico: Lenguaje algebraico:

- Escritura conjuntista: $\{x \in \mathbb{Q}^+ / 2x - 1 = 0\}$
- Escritura funcional: $\{(x, y), \text{ con } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = x/2\}$

Transformación tipo
Conversión

Registro semiótico: Esquemas pictográficos



Registro semiótico: Lenguaje común: mitad, un medio, ...



ALGUNOS REFERENTES GENERALES

Enfoque pragmatista (RORTY, 1991)

- La validez e importancia de las ideas se derivan de la utilidad y eficacia en una situación o problema dado.
- Las descripciones de mundo y la verdad no pueden ser independientes del ser humano.
- Las realidades nacen, adquieren sentido, se van configurando y se desarrollan usando lenguajes.



ALGUNOS REFERENTES GENERALES

BAGNI (2009)

- La relación de los seres humanos con el mundo, en general, no tiene un carácter cognitivo-observacional, sino que tiene un carácter práctico-comprensivo.
- Los aprendices deben moverse en el plano de la interpretación activa de los signos.



Posibilidad de análisis de la Cognición humana)

- *Sistemas de prácticas.*

- *Entidades primarias:*

- | | |
|-----------------------------|---------------------|
| (1) Lenguaje, | (4) Procedimientos |
| (2) Situación-problema, | (5) Proposiciones y |
| (3) Definiciones-conceptos, | (6) Argumentos. |

- *Facetas duales:*

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| (1) Personal-institucional, | (4) Ostensivo-no ostensivo y |
| (2) Elemental-sistémico, | (5) Extensivo-intensivo. |
| (3) Expresión-contenido, | |

- *Función Semiótica.*



Enfoque Ontosemiótico (EOS)

(Godino, Batanero & Font, 2007)

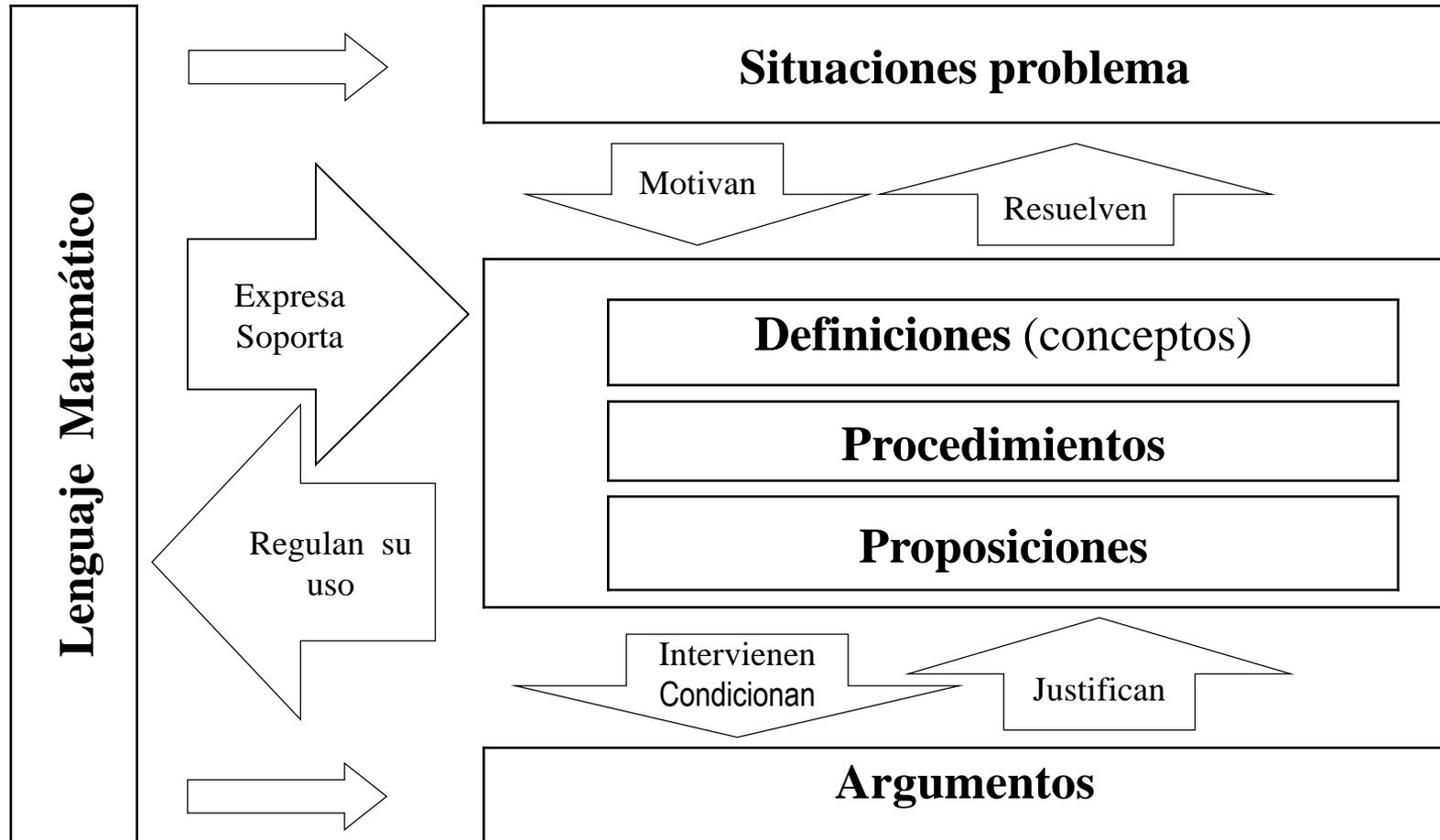
- Las prácticas matemáticas personales activan una red de objetos intervinientes y emergentes, es decir, una *configuración cognitiva* que es puesta en juego.
- *Transformación semiótica*. Emergente de una función semiótica en la pareja:

Sistema de prácticas/Configuración de objetos.



Configuración cognitiva de objetos primarios

(Godino, Batanero & Font, 2007)





SENTIDO Y SIGNIFICADO

IDEAS GENERALES

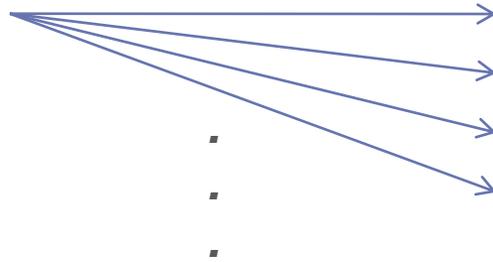
- El **sentido** atribuido a un objeto matemático depende tanto del sujeto como del contexto en el que se aborde y, por tanto, es algo flexible, dinámico, en movimiento.
- El **significado** de un objeto es atribuido por la cultura y tiene una existencia que trasciende al sujeto, es más estable; podría decirse que el significado es más descontextualizado y general.
- El **sentido** de un objeto puede considerarse como un significado contextual de dicho objeto.



Funciones semióticas y sentidos

Expresión

$3n$



Contenido

Una multiplicación

3 veces n

$n+n+n$

Triple de un número

$(n-1)+n+(n+1)$

...

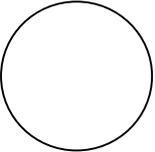
El **sentido** asignado por un sujeto a un objeto primario (expresión) es el valor (contenido) de la función semiótica que tiene a dicho objeto como expresión de la función semiótica .



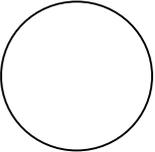
UNA DEFINICIÓN DE SENTIDO

Objeto Primario - Sentidos

Expresión	Contenido
Objeto primario	Sentido del objeto primario

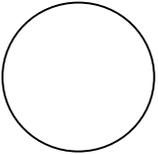
Expresión	Contenido
	Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro

Sentido
1

Expresión	Contenido
	Puntos que satisfacen una ecuación del tipo $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Sentido
2



Expresión		Contenido	
		Puntos que satisfacen una ecuación del tipo $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$	
Expresión	Contenido	← Sentido 1	← Sentido 2
	Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro		



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación

4. INSTRUMENTOS DE INDAGACIÓN





- Enfoque cualitativa, investigación de tipo descriptivo-interpretativo.
- Se realizó un análisis en contexto real del fenómeno descrito.
- Instrumentos de recolección de información:
 - Cuestionarios (Tareas)
 - Entrevistas basadas en tareas (Goldin, 2000):



- Cuestionarios:

[Tareas: *Dado, Triple y Ec. cuadrática*]

- Producción Individual y
- Producción en pequeños grupos.

- Entrevistas basadas en tareas (Goldin, 2000):

- Transcripciones de entrevistas a pequeños grupos y
- Notas del entrevistador.



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación

5. DESARROLLO





➤ *Tarea sobre probabilidad (Grado 9°, CHA):*

- ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

➤ *Tarea relacionada con cónicas (Grado 11°, CHA):*

- Diga qué es, qué representa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0.$$



○ Tarea sobre probabilidad (Cuestionario 1)

Situación Problema (Tarea – Cuestionario 1)

1. ¿Cuál es la probabilidad de que *lanzando un dado se obtenga un número par*?
2. ¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?
3. ¿Puede afirmarse que la fracción $4/8$ es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

Lenguaje

Divisor

→ 50%

→ $3/6$

$4/8$

Definición

Casos favorables sobre casos posibles

Procedimiento

Aplicación de definición

Argumento

Tesis: $4/8$ no es la probabilidad

Razón: El dado está dividido en 6 y no en 8 “fracciones”

Configuración cognitiva de objetos primarios (inicial), Daniel (E₅)
Grado 9°, institución CHA.



Rejilla síntesis (inicial)

Grupo 2: Jonathan (E₆), Daniel (E₅) y Pablo (E₄)

	Pablo (E ₄)	Daniel (E ₅)	Jonathan (E ₆)	Grupo 2
Reconoce diversas maneras de representar la probabilidad	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados	No	No	No	No

Tarea Probabilidad (Caso del dado)
Grado 9º - Institución CHA.



Entrevista Grupal (Tarea Probabilidad-Caso del dado) Grupo 2: Jonathan (E6), Daniel (E5) y Pablo (E4)

- [1] P Jonathan ... ¿Jonathan qué dice?
- [2] E₆ Pues, ... como el tema principal es un dado... tiene seis caras
- [3] Si sacamos los pares serían tres, ... $4/8$ pues no, no es tan representativo del dado, ya que **el dado no tiene ni ocho caras, ni cuatro números pares.**
- [4] Mirándolo desde la forma en que yo lo veo, no es exacto el cuatro octavos ...
- [5] P Entiendo ... ¿qué dice Daniel?
- [6] E₅ Pues... si es un dado de 6 caras, la división da tres, tres de la probabilidad [se refiere a la fracción $3/6$], **no puede tomarse el número de referencia cuatro** [se refiere a la fracción $4/8$].
- [7] P Listo, ... ¿y Pablo?
- [8] E₄ Pues a mí me parece que no está ... no, no serviría porque me parece que **la fracción estaría mal planteada**, para cómo se debería resolver el problema, en base de las caras del dado
- [9] ... **Un dado nunca va a tener ocho caras** ... me parece eso.



Entrevista Grupal (Tarea Probabilidad-Caso del dado)

Grupo 2: Jonathan (E6), Daniel (E5) y Pablo (E4)

- [13] E₄ Mejor dicho, la fracción sirve pero no está bien especificada ¿por qué? Porque ... **4/8 es básicamente lo mismo que 3/6** ¿Sí?
- [14] P **Umjú** [*Entiendo, continúe*].
- [15] E₄ ... Pero entonces **para ser la fracción del dado no serviría** porque no se especifica bien lo que se busca ... el 3 a los números pares y el 6 a las caras del dado, en cambio en 4/8 eso no estaría claro.
- ...

- [21] E₅ Mejor dicho no sería lógico que a uno le dijeran ... eh, **hay un dado de seis caras, que se divide en cuatro octavos.**
- [22] P **Umjú...** [*Entiendo, continúe*].
- [23] E₅ A menos que se pueda partir, pues ... es un dado.
- [24] E₅ Pues por ejemplo, pues sí, **físico es muy fácil, se hace un dado de ocho caras**, pero ... tirando hacía los números decimales que a uno la suma de todos los números le de 8 ... y que a la vez pueda ser 6 ¿sí?
... imagínese ese dado, la suma de ocho pero las caras sigan siendo seis.



¿“Anclaje” a la situación inicial? (Caso del dado)

Grupo 2: Jonathan (E6), Daniel (E5) y Pablo (E4)

Un estudiante afirmó que las fracciones como $3/6$, $4/8$ ó $15/30$ son equivalentes a la mitad, y por tanto cualquiera de ellas podría representar dicha probabilidad, así como también lo haría, por ejemplo, $10/20$. ¿Qué piensan ustedes de esto?

- [29] E₆ Yo sí estaría de acuerdo.
- [30] P Daniel,... lo veo pensativo [Daniel sonrío].
- [31] E₅ No exactamente en cuanto ... **no contradigo que es la mitad y que sería lo mismo** ... [en sus gestos y en su tono de voz se evidencia duda].
- [32] ... Pero si se busca una precisión, **si es un dado de seis caras, yo trabajaría con los números que son, 3 de 6.**
- [33] P **Tres de seis** ... [continúe]
- [34] E₅ ... Porque a uno no le va a quedar claro que, por ejemplo, le diga $4/8$ en un dado de 6 caras, no pensaría ¡no! ... **entonces es un dado de ocho caras** ¿sí?



¿Anclaje a la situación inicial? (Caso del dado)

¿Serviría la fracción $10/20$?

Grupo 2: Jonathan (E6), Daniel (E5) y Pablo (E4)

[35] P ¿Qué dice Pablo?

[36] E₄ Pues **yo estoy de acuerdo también en que diez veinte [la fracción $10/20$] es lo mismo que $3/6$.**

[37] ... **Pero no si se formulara ... la pregunta...** , si por ejemplo a usted le preguntan ¿Puede afirmarse que la fracción $10/20$ es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga número par? Usted quedaría como nulo, porque

[38] ... ¿cómo así que $10/20$? **¿Desde cuándo acá un dado tiene 20 caras?** ¿sí?, entonces [ese es] el pedacito que a mí no me cuadra [ríe un poco] ...

[39] Lo que pasa es que en el sentido común de la población ... de la ... de todo el mundo eso no se entendería.



Entrevista Grupal (Tarea Probabilidad-Caso del dado)

Grupo 2: Jonathan (E6), Daniel (E5) y Pablo (E4)

¿Anclaje a la situación inicial? (Caso del dado)

Finalmente, el entrevistador pregunta de nuevo a Daniel (E₅), quien en silencio ha estado escuchando atentamente a sus compañeros, si ahora él aceptaría el argumento del estudiante:

- | | | |
|------|----------------|---|
| [40] | E ₅ | En este momento sí ... Después de hablar ya, todo eso. O sea, para alguien común no, pero... |
| [41] | P | ¿Y qué lo hizo cambiar de opinión? |
| [42] | E ₅ | Porque..., yo por ejemplo acá, puse en la primera pregunta 50% [señala el primer ítem del cuestionario] ... De cien daría lo mismo, mitad [se refiere a que 50 es la mitad de 100]. |
| [43] | P | Lo que usted dice, es que como 4/8 sería la mitad entonces da lo mismo ... |
| [44] | E ₅ | Equivalente ... no mirándolo hacia las caras, ni hacia el dado, sino a la mitad. |



Entrevista Grupal (Tarea Probabilidad-Caso del dado)

Grupo 2: Jonathan (E₆), Daniel (E₅) y Pablo (E₄)

Problema (Tarea – Cuestionario 1)

1. ¿Cuál es la probabilidad de que *lanzando un dado se obtenga un número par*?
2. ¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?
3. ¿Puede afirmarse que la fracción $4/8$ es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

Lenguaje

Divisor

50%

$3/6$

$4/8$

Definición

Casos favorables sobre casos posibles

Procedimiento

Aplicación de definición

Argumento

Tesis: $4/8$ es la probabilidad

Razón: Mirándolo como la mitad, no desde las caras

**Configuración cognitiva de
objetos primarios (final), Daniel (E₅)**

Grado 9°, Colegio CHA.



○ A manera de síntesis

- **Proceso de interacción.** Cambios en interpretaciones.
- **Reconocimiento explícito de la equivalencia.** Fracciones $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{8}$.
- **“Anclaje” al objeto: dado-número de caras.** Les impide articular los sentidos asignados a expresiones,
- **“Separación” de la situación concreta.** Posibilita articular los sentidos asignados a las diferentes expresiones.



Rejilla síntesis (final)

Grupo 2: Jonathan (E6), Daniel (E5) y Pablo (E4)

	Pablo (E ₄)	Daniel (E ₅)	Jonathan. (E ₆)	Grupo 2
Reconoce diversas maneras de representar la probabilidad	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados	No	Sí	No	No
Cambio (reconocimiento de equivalencia entre 3/6 y 4/8)	✓	✓	✓	✓
Cambio (articulación de sentidos)		✓		

Tarea Probabilidad (Caso del dado)
Grado 9^o (Colegio CHA).



Problema (Tarea – Cuestionario 3)

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$
2. ¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$?
3. ¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es una ... [circunferencia]?

Lenguaje

Circunferencia

Variables

Ecuación

$$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$$

$$x + y = \frac{1}{x + y}$$

Definición

Una circunferencia

Procedimiento

Aplicación de propiedades

Propiedades

Inverso multiplicativo e inverso aditivo
(implícito)

Argumento

Tesis: La ecuación no es una “circunferencia”

Razón: Las variables *deben ser* cuadradas

**Configuración cognitiva de
objetos primarios (inicial), Daniel D. (E₃)**

Grado 11°, Colegio CHA.



Rejilla síntesis (inicial)

Grupo 1: MA. ELVIRA, DANIEL A. Y DANIEL D

	Ma. Elvira (E ₁)	Daniel A. (E ₂)	Daniel D. (E ₃)	Grupo
Reconoce Equivalencia sintáctica	Sí	No	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a ecuaciones	Sí	No	No	No

Tarea sobre Cónicas
Grado 11^o, Colegio CHA



Entrevista Grupal (Tarea Cónicas)

Grupo 1: MA. ELVIRA (E_1), DANIEL A. (E_2) Y DANIEL D (E_3)

- [45] P ¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es una circunferencia? Había que decir sí o no, ustedes dijeron no. Me gustaría conocer los argumentos, ¿Cuáles son las razones por las cuales ustedes dicen que no es una circunferencia?, no sé quién quiera empezar ... ¿Ma. Elvira?
- [46] E_1 No, pues no, **yo no diría que es una circunferencia**, porque es que yo cuando lo relaciono es cuando está la..., cuando ehh... $x+y$ está dividiendo o cuando está multiplicando, o sea cuando está dos veces, porque cuando esta sumando dos veces pues sería $2x$, entonces no, no quedaría y **cuando las dos variables están elevadas al cuadrado, pues eso es lo principal para que sea una circunferencia ...**
- [47] P ¿Y en el caso de Daniel A.?
- [48] E_2 Yo digo que no es una circunferencia, porque si uno le plantean esta ecuación tal como está, $x + y = \frac{1}{x+y}$ pues **uno no la ve como una circunferencia**
- [49] ... porque **uno parte de que la circunferencia como ecuación básica es ehhh ... cuando ambas variables están al cuadrado ¿cierto?**



Entrevista Grupal (Tarea Cónicas)

Grupo 1: MA. ELVIRA (E₁), DANIEL A. (E₂) Y DANIEL D (E₃)

- [50] P ¿Umjú ... [sí, entiendo, continúe].
- [51] E₂ ... Si uno encuentra eso, uno puede realizar el procedimiento para, para... es posible que uno pueda determinar a partir de esto ... es decir, si yo, **si yo muevo los valores**, cambio los valores, unos por otros, **es posible que me dé la ... la ecuación para una circunferencia, pero ...**
- [52] P Pero, en principio lo ... lo que usted mira para decidir si es o no [una circunferencia] ¿Qué es?
- [53] E₂ Que, digamos, **que las variables estén elevadas al cuadrado.**
- [54] P ... Que estén elevadas al cuadrado ... Daniel D., ¿qué dice usted?
- [55] E₃ Que es lo mismo que dijo Ma. Elvira, si uno lo ve de esta forma [señala la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$], lo ve como una ecuación normal, pero si se pone a pensar en pasar esto [señala el denominador al lado derecho de la igualdad] al otro lado quedan las dos variables al cuadrado, entonces uno así lo ve como si no fuera una circunferencia.
- [56] **Pero lo principal de una circunferencia es que las dos variables estén al cuadrado.**



Entrevista Grupal (Tarea Cónicas)

Problema (Tarea – Cuestionario 3)

Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación:

2. ¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$?

3. ¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es una ... [circunferencia] ?

Lenguaje

Circunferencia

Ecuación

$$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$$

$$x + y = \frac{1}{x + y}$$

Definición : Una circunferencia

Procedimiento:

Aplicación de propiedades

Propiedades: Inverso multiplicativo e inverso aditivo (implícito)

Argumento

Tesis: La ecuación es una circunferencia

Razón: Al multiplicar, queda en la forma de la circunferencia (variables al cuadrado)

Configuración cognitiva de objetos primarios (final), Daniel D. (E₃)

Grado 11°, Colegio CHA.



Caso de cónicas (expresiones algebraicas)

○ *A manera de síntesis*

- **Trabajo individual:** Sólo Ma. Elvira pudo asignar el mismo sentido a las dos ecuaciones.
- **Trabajo en pequeño grupo.** Se generan dos cambios:
 - ✓ Daniel A. acepta la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones.
 - ✓ Ma. Elvira, inicialmente acoge los argumentos de sus dos compañeros ... descarta la opción de “verla” como una «circunferencia».



○ *A manera de síntesis*

➤ **Interacción en Entrevista:**

- ✓ Comparten el sentido asignado inicialmente por Ma. Elvira a la ecuación.
- ✓ Para dos de los estudiantes sigue primando una imagen icónica de la ecuación de la circunferencia, según la cual ambas variables deberían estar elevadas al cuadrado.
- ✓ Cambios en cuanto al reconocimiento de la equivalencia sintáctica y posteriormente a la articulación de los sentidos asignados a las ecuaciones.



Rejilla síntesis (final)

Grupo 1: MA. ELVIRA, DANIEL A. Y DANIEL D

	Ma. Elvira (E ₁)	Daniel A. (E ₂)	Daniel D. (E ₃)	Grupo
Reconoce equivalencia sintáctica	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a ecuaciones	Sí	Sí	Sí	Sí
Cambio (Reconocimiento equivalencia)		✓		
Cambio (Articulación de sentidos)		✓	✓	✓

Tarea sobre Cónicas
Grado 11^o, Colegio CHA.



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación

6. ALGUNOS RESULTADOS





Algunos resultados

- *Estudiantes de grados 9° y 11°*

- Se evidenció la dificultad que encuentran varios estudiantes para articular diversos sentidos asignados a expresiones asociadas con un objeto matemático.
- Si bien reconocen la equivalencia sintáctica obtenida por tratamiento entre dos o más expresiones, no siempre logran articular los sentidos asignados a dichas expresiones e incluso pueden cambiar el sentido inicialmente asignado a una de ellas.
- Las dificultades que los estudiantes encuentran para articular los sentidos asignados a expresiones pueden agruparse fundamentalmente en cuatro:



RESULTADOS Y CONCLUSIONES

○ *Dificultades*

- *Anclaje a situaciones dadas*
- *Reconocimiento icónico de las expresiones*
- *Interacción y cambios en la interpretación*
- *Lenguaje Matemático*



RESULTADOS Y CONCLUSIONES

○ *Anclaje a situaciones dadas*

- Existe una *tendencia a anclarse en situaciones específicas* planteadas en el contexto por la tarea propuesta.

Caso analizado: Se evidencia un fuerte reenvío al objeto concreto “dado”.

- Se reconoce así una problemática de tipo cognitivo asociada con el uso de *modelos concretos* en la construcción de objetos de las matemáticas escolares.



RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Reconocimiento icónico de las expresiones

- El sentido asignado a las expresiones, en algunos casos, se basa en un reconocimiento icónico de las mismas.
 - “Ecuación básica” de una circunferencia: las dos variables están explícitamente elevadas al cuadrado y se encuentran a un lado de la igualdad.
 - Otro ejemplo: $(n-1)+n+(n+1)$ es equivalente a $3n$, en tanto “resultado” del proceso realizado; pero la primera es una suma, no el triple de un número.
- Se refleja así un hecho cultural: *La asignación de sentidos asociados con la forma.*



RESULTADOS Y CONCLUSIONES

○ *Interacción y cambios en la interpretación*

Entrevista a pequeños grupos:

- Dependiendo de los argumentos, los cambios en cuanto interpretaciones pueden darse por periodos relativamente cortos de tiempo.
- Oportunidad de conocer argumentos de otros, posibilitan afianzar o modificar las interpretaciones.
- Posibilidad de establecer nuevas funciones semióticas y articulación de nuevos sentidos.



RESULTADOS Y CONCLUSIONES

- *Dificultades con Lenguaje Matemático*

- Interpretaciones de las expresiones dadas y tratamientos de dichas expresiones, particularmente en el contexto algebraico.
- Generalización a partir de algunos casos particulares, así como dificultades para realizar transformaciones de tratamiento de las expresiones algebraicas.



- ❑ Ambiente menos artificial y tenso para cada uno de los entrevistados.
- ❑ Opciones de interacción entre sí, acoger o poner en discusión las afirmaciones y argumentos presentados por sus pares.
- ❑ Posibilidad de conocer, analizar y contar con elementos adicionales en relación con las tareas propuestas y con los argumentos inicialmente considerados.



Comentario

Entrevistas grupales basadas en tareas

- ❑ Posibilidad de socializar y reconocer los argumentos presentados por unos y otros.
- ❑ Opción de analizar dichos argumentos,... no son asumidos de manera acrítica.
- ❑ Importancia de los procesos de interacción como elemento fundamental para posibilitar la articulación de sentidos.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bagni, G. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. Radford, L. & D'Amore, B. (Eds.). *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. Relime*, 9(4), 177-196.
- D'Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2008). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. *ICMI, Rome, Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, March 2008.
- D'Amore, B., Font, V. y Godino, D.J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Relime*, 38(2), 49-77.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en idioma francés en el 1995).
- Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Font, V. & Ramos, B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-345.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Universidad de Granada.
- Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research”. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey London: LEA.
- León, O. (2005). *Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría*. (Tesis doctoral). Universidad del Valle. Santiago de Cali (Colombia).
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Radford, L. & D’Amore (Eds.). *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*. *Relime*, 9(4), 103-129.
- Rorty, R. (1991). *Contingencia, ironía y solidaridad* (A. Sinnot, Trad.). Barcelona: Paidós (Original publicado en idioma inglés en 1989).



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

... GRACIAS A TODOS!!



Dados de 6, 8, 12 y 20 caras

A-0

PEDRO JAVIER ROJAS GARZÓN



UN CASO ADICIONAL

Interpretación de los símbolos literales (letras)

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

$$B = \{ x / x \text{ es una vocal} \}$$

Esperado por el profesor: $A = B$

... ¿Y qué piensan los estudiantes?

- Por ejemplo, frente a la pregunta sobre el número de elementos de cada conjunto





**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación

o Anexos





Enfoque sociocultural

Teoría Cultural de la Objetivación

Principios (Radford, 2006)

- (1) Los signos nos permiten reflexionar sobre el mundo y*
- (2) El mundo es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que éstos son usados.*



Caracterización del pensamiento:

- Naturaleza semióticamente mediatizada,
- Modo de ser en tanto praxis reflexiva,
- Papel constitutivo de los artefactos culturales.



- *Naturaleza de los objetos matemáticos*
- *Sentido de los objetos matemáticos*

➤ *Objetos matemáticos*

Los objetos no se reducen a definiciones y a relaciones lógicas con otros objetos. Si bien los conceptos son los objetos matemáticos prototípicos, no son estos los únicos objetos de interés.

Un objeto matemático es “cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática” (p. 2).



Práctica matemática

Práctica matemática. Toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1998).

Más que una práctica específica frente a un problema concreto, interesan los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) frente a tipos de problemas.



FACETAS Y CONFIGURACIONES

En las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos (intervinientes y emergentes), según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde cinco facetas o dimensiones duales (atributos contextuales):

- (1) Personal-institucional,
- (2) Elemental-sistémico,
- (3) Expresión-contenido,
- (4) Ostensivo-no ostensivo y
- (5) Extensivo-intensivo

Configuraciones:

Cada uno de los objetos se relacionan entre sí (redes de objetos) formando configuraciones, que pueden ser:

- (1) **Configuraciones epistémicas** (redes de objetos institucionales) ó
- (2) **Configuraciones cognitivas** (redes de objetos personales)



Objetos emergentes

De los sistemas de prácticas matemáticas *emergen* nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, acciones, definiciones, propiedades, argumentaciones).

Los objetos emergentes son cristalizaciones o reificaciones resultantes de los procesos (Comunicación, Problematización, Definición, Enunciación, Elaboración de procedimientos y Argumentación).

Objetos institucionales: Objetos intervinientes o emergentes de sistemas de prácticas compartidos en el seno de una institución.

Objetos personales: Objetos intervinientes o emergentes de sistemas de prácticas de una persona.



SIGNIFICADO

- El **significado** puede verse como una relación establecida a través de la función semiótica entre sistemas de prácticas y configuraciones de objetos.
- **Las transformaciones semióticas** pueden ser vistas como el aspecto emergente de una función semiótica que relaciona una representación R (antecedente) en una pareja *Sistemas de práctica/Configuración de objetos*, con una representación S en otra pareja, *Sistema de prácticas/Configuración de objetos*.



SIGNIFICADO Y SENTIDO

- En el EOS la noción de significado y sentido pueden diferenciarse:
- El **significado** de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo o intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.).
- El **sentido** se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.



En matemáticas no hay referencia; “el objeto” es algo virtual, hay múltiples objetos.

La segregación objeto-representación no sólo se hace por tener dos representaciones del mismo objeto matemático [un objeto muy virtual y poco “claro”].

Lo que encontramos en un primer análisis del trabajo de las respuestas de los estudiantes son objetos primarios, algunos de ellos son básicamente reglas convencionales.

Podemos establecer funciones semióticas y podemos definir estos cambios de sentido o las faltas de sentido en tanto unos establecen unas funciones semióticas que otros no ... esto ofrece una visión más o menos operatoria del sentido y posiblemente una mayor claridad.



- No se trata de ver este tratamiento como si fuera una caja negra entre una expresión inicial y una final ... han pasado muchas cosas (por ejemplo, actividades de ensayo y error para verificar la equivalencia de las expresiones, no necesariamente la solución experta obtenida mediante propiedades asociativa y conmutativa)... el análisis posiblemente se hace más complejo [hay procedimientos de ensayo y error, o de búsqueda de un caso o de casos particulares]... hay una trama de funciones semióticas inmensas.



- Algunas investigaciones relacionadas con este fenómeno:
 - Raymond Duval (1999, 2004, 2006),
 - Olga León (2005).
 - Bruno D'Amore (2006),
 - Vicenç Font, Juan D. Godino & Bruno D'Amore (2007),
 - Juan Godino, Carmen Batanero & Vicenç Font (2007),
 - Bruno D'Amore & Martha Fandiño (2008) y
 - George Santi (2011).