

PREPARANDO PARA A APRENDIZAGEM DE CÁLCULO: FUNÇÕES E GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Marcelo André A. Torracal, Geneci Alves de Sousa, Priscila Dias Corrêa, Lilian Nasser

Universidade Veiga de Almeida - UVA

UNIABEU - SME-Rio

Secretaria de Estado de Educação - SEEDUC-RJ

Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

torraca@gmail.com, pfundão@im.ufrj.br

Brasil

Resumo. Professores de instituições de Ensino Superior, públicas e privadas, relatam grandes dificuldades dos alunos na primeira disciplina de Cálculo. Os altos índices de evasão e repetência têm motivado diversas pesquisas, que buscam as causas e as prováveis soluções para esse problema. O objetivo deste trabalho, desenvolvido no âmbito do Projeto Fundação (Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro), é investigar como ocorre a transição do Ensino Médio para o Superior e empreender ações que otimizem esses índices. Foram aplicadas atividades investigativas com calouros de duas universidades particulares para levantar as principais dificuldades. Os resultados indicam a possibilidade de minimizar as dificuldades em Cálculo por meio de uma abordagem adequada dos tópicos de funções e de geometria no Ensino Médio.

Palavras chave: cálculo, transição, funções, gráficos

Abstract. Teachers of public and private institutions of Superior Education report great difficulties of students in the first discipline of Calculus. The high indices of evasion and repetition have motivated various studies, searching for the causes and for probable solutions for this problem. The objective of this work, developed in the scope of Projeto Fundação (Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro), is to investigate how the transition from High School to University occurs, and to undertake actions to optimize these indices. Investigation activities with freshmen of two private universities have been applied to raise the main difficulties. The results indicate the possibility to minimize the difficulties in Calculus, by means of an adequate approach of the topics of functions and geometry at secondary school.

Key words: calculus, transition, functions, graphs

O conceito de função

Esta pesquisa foi motivada pela observação realizada pelos membros do grupo (docentes que ensinam Cálculo em Instituições de Ensino Superior do Rio de Janeiro) em relação às dificuldades, cada vez mais graves, apresentadas pelos alunos ingressantes, no primeiro curso de Cálculo. Os altos índices de evasão e repetência nessa disciplina têm sido tema de estudos nacionais Rezende (2003); Palis (2010); Nasser (2009) e internacionais Even (1990); Robert. e Schwarzenberguer (1991). Para amenizar tal situação, várias estratégias têm sido empreendidas, tal como a inclusão de disciplinas de Matemática Básica (também chamadas de pré-Cálculo ou Cálculo 0). Em alguns casos, são oferecidas atividades concomitantes de monitoria ou mesmo cursos de Fundamentos ou Complementos de Cálculo. Entretanto, a solução para minimizar esse problema ainda está por ser encontrada. Há relatos de que os alunos não sabem calcular o valor de uma função num ponto dado e não têm ideia de como

traçar gráficos simples, nem de completar o quadrado de uma expressão. Estes fatos justificam o baixo rendimento e as dificuldades em raciocínio.

Referencial teórico

Esta investigação se caracteriza como uma “pesquisa sobre a própria prática” (PPP), uma vez que os pesquisadores são os próprios docentes de Cálculo ou do Ensino Médio (rede estadual do RJ ou Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro). De acordo com Ponte (2004), “cada vez mais professores empreendem pesquisas sobre a sua própria prática profissional. Fazem-no porque sentem necessidade de compreender melhor a natureza dos problemas com que se defrontam, para poder transformar a sua prática e as suas condições de trabalho. (Ponte, 2004, p. 1)

De fato, o que motivou o grupo para o desenvolvimento deste estudo foi procurar entender um pouco mais as dificuldades apresentadas por alunos nas disciplinas de Cálculo e as boas perspectivas de um enfoque diferenciado adotado no Ensino Médio do CAP-UFRJ.

Analisando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991) apontam mudanças quantitativas:

mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. (1991, p. 133)

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) afirma que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem nessa disciplina.

A pesquisa desenvolvida por Palis (2010) utiliza a tecnologia como ferramenta que pode auxiliar no domínio de funções e seus gráficos o enfoque foi nos cursos de pré-Cálculo da PUC-Rio.

Nasser (2009) investigou o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos, constatando que as dificuldades enfrentadas devem-se, principalmente, à falta de preparação prévia e sugere ações que podem ajudar a superá-las, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos (p. 54). A pesquisadora relata como em Cálculo III o mesmo

procedimento facilitou a identificação de parabolóides, cones, cilindros e esferas por meio de transformações de superfícies centrais básicas (p.52).

De acordo com Sierpiska (1992), há 16 obstáculos a se transpor para a aquisição do conceito de função. Um desses obstáculos é a concepção ingênua de que “o gráfico de uma função não precisa ser exato”. Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de

alunos de Cálculo I ao traçar gráficos de funções simples como $f(x) = \frac{1}{x}$ ou das funções

seno e cosseno, como $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Outro obstáculo apontado por Sierpiska é a

concepção de que “apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções”. De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar

com funções definidas por várias sentenças, como $f(x) = \begin{cases} -4, & \text{para } x \leq -3 \\ -x^2 + 5, & \text{para } -3 < x \leq 2. \\ x - 2, & \text{para } x > 2 \end{cases}$.

Even (1990) também observou essas concepções em sua pesquisa. Ela relata a dificuldade de

futuros professores em decidir se $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ é ou não uma

função. Checando com a definição de função, um sujeito da pesquisa afirmou que é uma função, já que “há uma imagem única para cada número” (p. 528). No entanto, na tentativa de

traçar o gráfico dessa função, esse futuro professor marcou alguns números irracionais no eixo

dos x : π , $\sqrt{3}$, $\frac{7}{4}$ (considerando uma fração imprópria como um número irracional) e

esboçou uma parte da reta $y = x$ com buracos, conforme os números irracionais escolhidos.

Even (1990) afirma ainda que

essa situação é compreensível – quase todas as funções encontradas por alunos do Ensino Médio e mesmo de faculdades são do tipo que têm um gráfico “simples” e podem ser descritas por uma fórmula, de modo que o seu conceito imagem de uma função é determinado pelas funções que eles vivenciam, e não pela definição moderna de uma função, que enfatiza a sua natureza arbitrária. (p. 529)

Observa-se que a maioria das dificuldades dos alunos é na representação gráfica ou geométrica adequada e na identificação de relações entre os elementos da figura, como os problemas

típicos de “máximos e mínimos”, de “taxas relacionadas” e de “área entre curvas”. Em geral, o aluno não tem dificuldade na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas em modelar o problema adequadamente.

Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) afirmam que muitos professores não percebem a ligação da geometria do Ensino Médio com a matemática do Curso Superior. Geralmente os professores não fazem essa ligação devido à sua formação acadêmica, muitos são bacharéis com pós-graduação em Matemática Pura ou Aplicada, poucos têm mestrado e doutorado em Educação Matemática, dominando o saber pedagógico do conteúdo a ser ensinado. Vários conceitos fundamentais de Cálculo são introduzidos por meio de figuras, como os conceitos de integral definida, derivada, área entre curvas, máximos e mínimos, e os problemas de taxas relacionadas. Esses pesquisadores observaram que “apesar da predileção dos professores de Cálculo por diagramas, nossa pesquisa indica que o aluno resiste ao uso de estratégias geométricas e espaciais na resolução efetiva de problemas de Cálculo”. (Balomenos, Ferrini_Mundy e Dick, 1994, p. 241)

Essa resistência se deve, com certeza, à falta de domínio dos conceitos geométricos por parte dos alunos de Cálculo, já que “o verdadeiro desafio está na habilidade de desenvolver uma representação geométrica de situações físicas a partir de uma descrição verbal complicada. Muitas vezes, a chave da solução consiste em resolver um problema geométrico em que o tempo é “congelado””. (Balomenos et al., 1994, p. 247).

Os estudos relatados aqui sugerem o debate sobre a investigação de estratégias de ensino que tornem mais amena a transição para o ensino superior, em especial, na disciplina de Cálculo. Por exemplo, nos problemas de taxas relacionadas e máximos e mínimos do Cálculo, a representação gráfica pode ser antecipada no Ensino Médio, como nos exemplos que são apresentados mais adiante.

Atividades de investigação

As atividades preliminares de investigação foram divididas em duas etapas e aplicadas a alunos de duas universidades particulares do estado do Rio de Janeiro, a calouros da UFRJ e, a alunos egressos ou não, do Ensino Médio do CAP-UFRJ. Este último grupo foi escolhido devido ao trabalho diferenciado desenvolvido no CAP-UFRJ no Ensino Médio, cujos alunos egressos têm mostrado bom desempenho no vestibular e nas disciplinas de Cálculo.

Inicialmente, 98 alunos de duas universidades particulares e 18 alunos egressos do CAP-UFRJ responderam a um questionário que buscou identificar as dificuldades encontradas por eles na

disciplina de Cálculo I, quais os tópicos de Matemática do Ensino Médio que facilitaram sua aprendizagem, e quais deveriam ser inseridos para contribuir nesse processo. Além disso, resolveram três questões sobre funções. A primeira delas envolvia a análise de duas funções do tipo afim, a segunda abordava o domínio de uma função e, por fim, a última pedia o gráfico de uma função definida por três sentenças.

Na análise dos resultados os alunos egressos do CAp-UFRJ, responderam que o conceito de funções e a análise de gráficos foram tópicos facilitadores. Os demais alunos citaram como tópicos que gostariam de ter estudado para facilitar a aprendizagem de Cálculo: funções, conteúdos do Ensino Superior e maior aprofundamento do conteúdo em geral.

Na resolução das questões propostas, identificamos, nos alunos calouros, uma deficiência na análise de funções afim e quadrática definidas por uma ou mais sentenças. Em geral, demonstram conhecimento superficial de funções e seus gráficos. Eles conseguem marcar alguns pontos no plano cartesiano, que unem por segmentos de reta, deixando de considerar a lei de formação da função. A maior parte dos alunos egressos do CAp-UFRJ que respondeu a essa atividade não apresentou esse tipo de erro.

A segunda etapa da investigação consistiu na aplicação de outra atividade a 153 alunos de duas universidades particulares, dos cursos de Engenharia e Licenciatura em Matemática, cursando o 1º período e a 28 alunos do 2º ano do Ensino Médio do CAp-UFRJ. Nesse caso, os exercícios propostos envolveram os conceitos de função par e ímpar, a translação de gráficos e a identificação, a partir de um gráfico apresentado, do domínio, da imagem, dos intervalos de crescimento e decréscimo e dos pontos de máximo e mínimo locais da função dada. Os alunos do CAp-UFRJ testados demonstraram mais familiaridade com o conceito de função.

Foi possível perceber nesse grupo de alunos que a identificação de funções pares ocorre com mais facilidade do que a de funções ímpares. Em particular, foi observada a dificuldade em completar o gráfico de uma função ímpar, quando esta não passa pela origem (função descontínua).

Pela observação dos professores deste grupo de pesquisa que dão aula de Cálculo, as dificuldades dos alunos estão localizadas no trato com funções, principalmente quando estas são definidas por mais de uma sentença, e no traçado de gráficos, até mesmo de retas e parábolas. Por outro lado, a professora do grupo que leciona no CAp-UFRJ descreve como bons resultados o enfoque diferenciado adotado para o ensino de funções nessa instituição, que indica ideias que podem ser facilitadoras no processo de ensino e de aprendizagem no curso de Cálculo. Os primeiros resultados desta investigação apontam para a possibilidade de

diminuição das dificuldades em Cálculo I por meio de uma abordagem apropriada no Ensino Médio.

Análise de livros textos

Na tentativa de entender as dificuldades apresentadas no curso de Cálculo, foi necessária a análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio e de livros de Cálculo do Ensino Superior. Dessa forma, foi possível avaliar alguns exemplos de como é feita a transição entre esses níveis de ensino nos conteúdos que geram maior dificuldade para os alunos na prática. Foram analisados seis autores de livros do Ensino Médio e nove autores de livros de Cálculo. Os livros analisados do Ensino Médio e de Cálculo já não definem função a partir do conceito de relação, e não existe mais uma ênfase em diagramas de flechas. A introdução de funções por meio do diagrama de flechas limita a visão mais abrangente do conceito de função, além de restringir o domínio a um conjunto finito.

O enfoque ao gráfico de funções usando transformações, como translação, reflexão, rotação e homotetia, usado no curso de Cálculo, já tem sido incluído em livros do Ensino Médio. Dois autores desse nível de ensino abordam transformações, analisando a função quadrática na forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + p$, e outros dois usam translações para obter gráficos de funções modulares e trigonométricas.

Surpreendentemente, dos nove livros de Cálculo analisados, apenas três autores abordam transformações de gráficos. A princípio, os autores usam as ferramentas de Cálculo para fazer análises gráficas e dois destes trabalham o Cálculo com Geometria Analítica.

Todos os autores do Ensino Médio e do Ensino Superior enfatizam a análise gráfica, incluindo crescimento e decréscimo, domínio e imagem, pontos críticos, zeros da função, mas dos livros do Ensino Médio, somente um aborda o conceito de assíntotas, que é focado por todos os autores do Ensino Superior.

Quanto ao conceito de função par e ímpar, apenas um autor de Ensino Superior não apresenta esse conceito no capítulo de funções, mas o apresenta em exercícios de cálculo de áreas e volumes. No Ensino Médio, dois autores abordam a definição e as representações gráficas de funções pares e ímpares, inclusive enfatizando a simetria em cada caso. Os conteúdos analisados acima devem ser cuidadosamente explorados no Ensino Médio, a fim de promover uma transição amena para a aprendizagem de Cálculo no Ensino Superior.

Representações geométricas

Em sua pesquisa, Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) apresentam diversos exemplos de problemas do Cálculo que poderiam ser facilitados, por uma abordagem adequada da geometria ensinada no Ensino Médio, desenvolvendo a prontidão para o Cálculo.

Por exemplo, para resolver o problema de Cálculo:

Uma esfera de raio 4 é inscrita num cone circular reto.
Determinar as dimensões do cone de volume mínimo

é preciso exprimir o volume do cone como uma função de uma variável para depois aplicar a derivada. Essa etapa do problema pode ser explorada na geometria do Ensino Médio, por meio da seguinte tarefa:

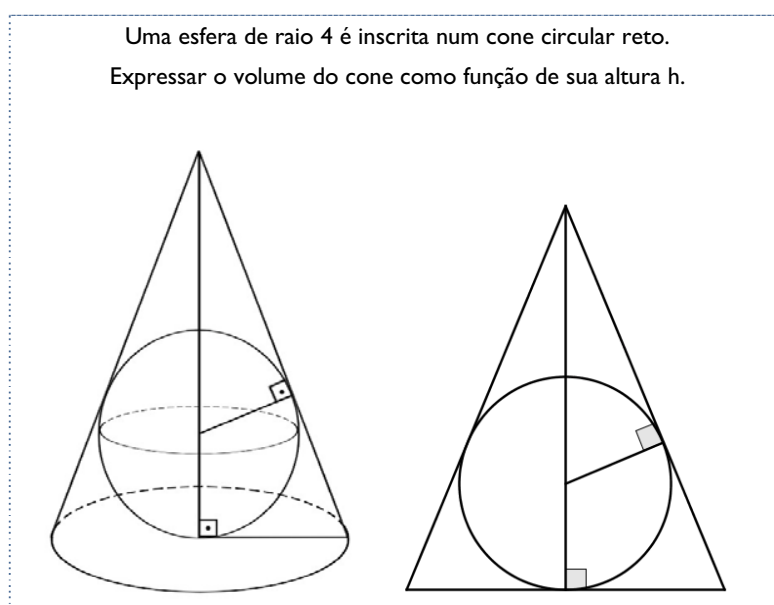


Figura 1: Seção transversal de uma esfera inscrita em em cone

A representação gráfica desse problema requer a identificação de triângulos semelhantes na seção transversal de uma esfera inscrita num cone, que pode ser vista na figura ao lado. (Balomenos et al., 1994, p. 245).

A representação gráfica também é fundamental no cálculo de área entre duas curvas. Consideremos, por exemplo, o problema:

Determine a área compreendida pelos gráficos de $y = x^3$ e $y = x$, entre $x = -1$ e $x = 1$

Os alunos normalmente utilizam a integral definida $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx$ ou $\int_{-1}^1 (x - x^3)dx$ para resolver este problema, não percebendo que essa fórmula só é válida no caso em que é possível comparar as funções do integrando em todo o intervalo de integração. Neste caso, como a função é ímpar, há simetria em relação à origem, e essa integral tem zero como resultado, que certamente não pode ser o valor da área requerida.

O aluno que faz os gráficos das funções envolvidas atenta para a necessidade de calcular $\int_{-1}^0 (x^3 - x)dx + \int_0^1 (x - x^3)dx$ ou $2\int_0^1 (x - x^3)dx$ para obter dessa expressão o resultado correto.

Observações finais

As considerações e os resultados desta pesquisa recomendam dois desdobramentos. O primeiro é desenvolver uma proposta alternativa para as aulas de Matemática no Ensino Médio, que antecipe situações e problemas do Cálculo, gerando o que chamamos de prontidão para o estudo de Cálculo. Tal proposta deve incluir um estudo mais aprofundado de domínio e imagem de funções, traçado de gráficos, inclusive com recursos tecnológicos, funções pares e ímpares, funções definidas por várias sentenças e translação de gráficos. Em relação à Geometria, a proposta deve contemplar representações gráficas de figuras bi e tridimensionais, típicas de problemas de taxas relacionadas e de máximos e mínimos, como os exemplos mostrados neste trabalho. Essa proposta não pretende introduzir mudanças no currículo de Matemática no Ensino Médio, mas apenas sugerir um outro enfoque. O segundo desdobramento é incentivar atividades de Matemática básica com os calouros das Universidades, visando preencher lacunas de aprendizagem e auxiliando na abstração necessária para o domínio do pensamento matemático avançado.

Referências bibliográficas

- Balomenos, R., Ferrini-mundy, J. e Dick, T. (1994). Geometria: prontidão para o Cálculo. In M. Lindquist e A. Shulte (Org.), *Aprendendo e Ensinando Geometria*. (pp. 240-257). São Paulo: Atual Editora.
- Even, R. (1990, Dezembro). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 521-544.
- Nasser, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In M.C. R. Frota e L. Nasser (Org.), *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates* (pp. 43-58). Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

- Palis, G. (2010, julho). *A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, 4*. Recuperado em 07 abril, 2013 de <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra4.pdf>.
- Ponte, J. P. (2004, Dezembro). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. *Educar em revista, 24* (pp. 37-66), Curitiba: Editora UFPR.
- Rezende, W. M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutorado não publicada. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, Brasil.
- Sierpiska, A.(1992). On understanding the notion of function. In Dubinsky, E; Harel, G (Ed.), *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. (pp. 25-58). MAA Notes.