

ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES AL RESOLVER ACTIVIDADES DE CORTE GEOMÉTRICO PARA EL CONCEPTO DE COMBINACIÓN LINEAL

Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andolón

CICATA-IPN.

carlos_oropezamx@yahoo.es, jlezamaipn@gmail.com

México.

Resumen: En este documento presentamos la estructura general del proyecto de investigación, el cual centra su atención en el estudio del concepto de combinación lineal. Reportamos algunas experiencias de clase con estudiantes de un curso de álgebra lineal, a partir de la elaboración de situaciones didácticas tomando a la ingeniería didáctica como fundamento teórico y la visualización como una herramienta didáctica, considerando que recientes investigaciones didácticas reconocen generalmente que tales conceptos representan una especial complejidad, debido a su carácter abstracto. Además se incluyen exploraciones basadas en cuestionarios, análisis de algunos resultados parciales de diversas actividades, ejemplos resueltos con el apoyo de software matemático. Finalmente se reportan observaciones de regularidades observadas.

Palabras clave: Álgebra lineal, visualización, situación didáctica

Abstract: This paper shows the general structure of the investigation project, which focus its attention on the study of the linear combination concept. Some student class experiences in a linear algebra course were reported starting from the making of didactic situations taking the didactic engineering as a theoretical basis and visualization as a didactic tool, considering that recent didactic investigations generally recognize that such concepts represent a special complexity, due to its abstract nature. Explorations based on questionnaires are included, also analysis of partial results of several activities and of solved examples with the mathematical software support. Finally several views of observed regularities are observed.

Key words: Linear algebra, visualization, didactic situation

Introducción

Existen algunas asignaturas que utilizan como apoyo para su estudio la asociación de conocimientos basados en propiedades físicas, propiedades observadas en la naturaleza, situaciones relacionadas con el desarrollo económico de un país, crecimiento de una población, fenómenos periódicos, etc. Sin embargo, en el estudio del álgebra lineal la mayor parte de los conceptos que se abordan en los libros de texto (recomendados como bibliografía de consulta para escuelas de ingeniería en México) es presentada a partir de definiciones formales. Dichas definiciones en la mayoría de los casos, no parten de conocimientos previos, ni de argumentos provenientes de la física o geometría, sino que se construyen preferentemente con formalidad axiomática. Esto hace entre otras cosas que muchos estudiantes perciban al álgebra lineal como demasiado abstracta y declaran que sus conceptos carecen de aplicación en la realidad. Por otra parte, el álgebra lineal es generalmente considerada uno de los prerrequisitos más importantes para muchos campos de matemáticas, ciencia e ingeniería. Consistentemente, los cursos de álgebra lineal están provistos de una gran

variedad de disciplinas a nivel licenciatura. En nuestro caso se prevé que la investigación tendrá lugar en escuelas de ingeniería y considera dos aspectos que la soportan, el primero relacionado con la experiencia docente adquirida en el transcurso de un poco más de una década trabajando precisamente con estudiantes de ingeniería y el segundo tiene que ver con los estudios que diversos teóricos han realizado.

En diversos cursos que he impartido durante poco mas de diez años en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM, he observado algunas regularidades entre las cuales se pueden mencionar el hecho de que los estudiantes no pueden dar evidencias tangibles de un significado distinto a los desarrollos analíticos en la solución de un problema; es decir, tienen dificultades con el empleo de las propiedades de los números reales, con el uso de algunos conceptos básicos de álgebra y las gráficas de vectores en tercera dimensión entre otras.

Sierpinska, Nnadozie & Oktaç (2002) realizan una investigación que desarrollan teniendo como antecedentes los trabajos que han estudiado las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra lineal.

Por otra parte en su libro de Álgebra Lineal en la página 32, Hoffman & Kunze (1973) afirman que:

“Ciertas partes del álgebra lineal están íntimamente relacionadas con la geometría. La misma palabra <<espacio>> sugiere algo geométrico, como lo hace el vocablo <<vector>> para muchos. Cuando se avance en el estudio de los espacios vectoriales, el lector observará que mucha de la terminología tiene una connotación geométrica. Para concluir esta sección introductoria sobre espacios vectoriales, se considerará la relación de los espacios vectoriales con la geometría, hasta un grado que indicará al menos el origen del nombre <<espacio vectorial>>”.

Además en su el libro de texto Matrix Algebra, Winter (1992) menciona en el prefacio lo siguiente:

“El álgebra de matrices es vitalmente importante como una herramienta para las materias tales como: química, economía, ingeniería, matemáticas, física y computación científica. Los problemas importantes en estos campos pueden ser reducidos a problemas en álgebra de matrices, los cuales pueden ser resueltos precisamente con la alta velocidad de las computadoras. Por esta razón, los estudiantes suelen tener un primer curso de álgebra lineal en los inicios de su plan de estudios. Una desventaja de esto es que los aspectos geométricos del álgebra

lineal frecuentemente consiguen poca atención. Esto es desafortunado, por mucho el álgebra lineal debe su existencia a las intuiciones geométricas de sus creadores, y muchos de sus métodos pueden ser mejor entendidos en conexión con sus interpretaciones geométricas”.

La estructura del proyecto a desarrollar, tiene como objetivos: la elaboración de situaciones didácticas tomando como fundamento a la ingeniería didáctica, para la construcción del concepto de combinación lineal haciendo uso de la visualización como una herramienta didáctica. Además de aportar diversos cuestionamientos que permitan continuar nuevos estudios relacionados a potenciar el uso de la visualización en álgebra lineal. Se puede esperar entonces que para un estudiante las aportaciones que se deriven de la investigación puedan representar un beneficio, puesto que sería un planteamiento alternativo que les proporcionaría cierta flexibilidad al estudiar álgebra lineal. Y la exploración del funcionamiento y efecto del uso de aquellos elementos de carácter visual que se ponen en juego en el momento de trabajar la ingeniería didáctica y su conexión con las características específicas del concepto de combinación lineal. En los supuestos se estructura la hipótesis, misma que afirma que: “Un estudiante alcanza una idea clara y precisa del concepto de combinación lineal cuando es conducido a escenarios de representación geométrica, vía el diseño de una ingeniería didáctica”.

La pregunta de investigación por resolver es: ¿Cómo caracterizar la forma en que los estudiantes estructuran el concepto de combinación lineal, después de resolver situaciones didácticas de corte geométrico? Algunos investigadores afirman que los vínculos que matemáticamente parecen claros y sencillos pueden presentar una red compleja para los estudiantes; sus aproximaciones al resolver problemas pueden ser la señal de que no utilizan totalmente las conexiones adecuadas de los conceptos involucrados. Sugieren que teorías como Apos (acción-proceso-objeto-esquema) podrían servir como perspectiva teórica para clasificar el reaprendizaje, así como para dar forma a la noción de vínculo y su papel en el aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, el estudio puede ser útil para aportar información a otras aproximaciones, por ejemplo las que centran su atención en el uso del software que es una propuesta de la cual frecuentemente hacen uso los libros de texto.

La Teoría de Situaciones Didácticas es utilizada como marco teórico y la Visualización como herramienta didáctica en la investigación. La Teoría de Situaciones Didácticas fue formulada inicialmente por Guy Brousseau y retomada, reformulada y enriquecida por una amplia comunidad de investigadores, fundamentalmente de la comunidad francesa de la Didáctica de las Matemáticas. Como metodología de investigación la ingeniería didáctica se caracteriza: Por

un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Y por el registro de los estudios de caso y la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

1) Análisis preliminares, los mas frecuentes son:

El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.

El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

2) Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas: El investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. Se distinguen dos tipos de variables de comandos:

Variables macro-didácticas o globales, Concernientes a la organización global de la ingeniería

Variables micro-didácticas o locales, Concernientes a la organización local de la ingeniería, o sea, la organización de una secuencia o fase.

3) Experimentación, esta supone hacer explícitos los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación, el establecimiento del contrato didáctico, la aplicación de los instrumentos de investigación, el registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

4) Análisis a posteriori y evaluación: es la ultima fase de la ingeniería didáctica, Los datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc.

En contraste, la visualización tiene diversas acepciones por los investigadores que se han encargado de estudiarla, sin embargo, en este trabajo será considerada como: “La capacidad, el proceso, el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas

desconocidas y anticipando el entendimiento” (Arcavi, 1999). En el trabajo además de reportar algunas exploraciones.

La propuesta de hacer uso de la visualización como una herramienta didáctica tiene como finalidad presentar aspectos que justifican la importancia de implementar estrategias alternativas que propicien en los estudiantes la conformación de ideas estructuradas de forma diferente al transcurrir de una clase convencional.

Desarrollo

A continuación se reportan parte de los Resultados obtenidos por los Profesores que resolvieron la Propuesta Didáctica.

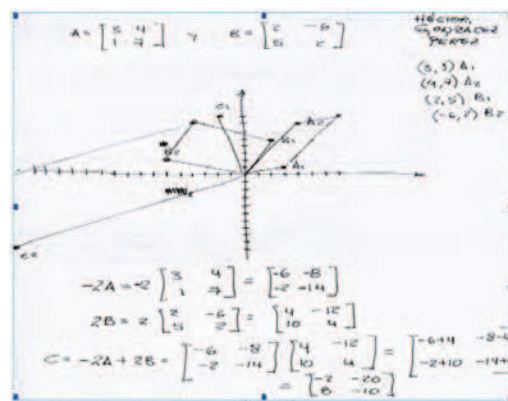


Figura 1

La razón de mostrar este extracto del trabajo es porque las imágenes nos proporcionan evidencias de algunos rasgos característicos que se encontraron en el grupo de trabajo.

Se puede apreciar que el profesor resuelve con claridad la parte algebraica haciendo uso de las operaciones básicas entre matrices, sin cometer errores en procedimiento realizado.

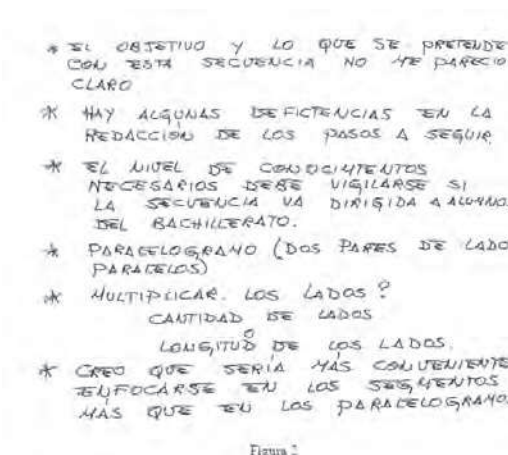


Figura 2

Observe cómo trata de responder de alguna manera al desarrollo preferentemente algebraico que predominó en sus respuestas. La parte rescatable es: aportar observaciones y recomendaciones sobre el diseño mismo de la secuencia.

En contraste a continuación se muestran tres ejemplos, en los cuales la estrategia de visualización fue preferentemente más estructurada de acuerdo con los desarrollos realizados por parte de los profesores que participaron en la puesta en escena de la situación.

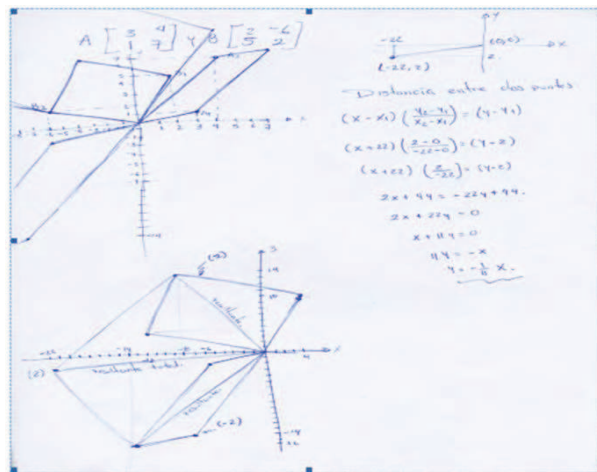


Figura 3

La Figura 3 esta compuesta de dos diagramas principales, en los que en principio se pueden identificar dos momentos.

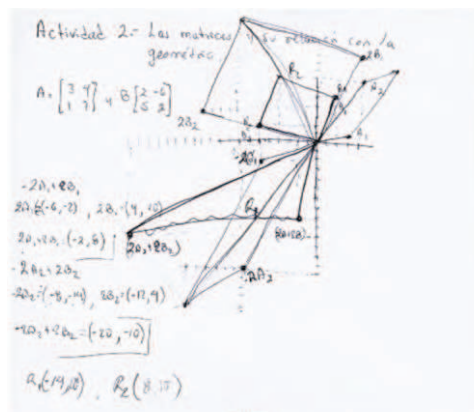


Figura 4

El profesor al resolver la situación trata de manejar los dos enfoques tanto el analítico como el geométrico... (Figura 4)

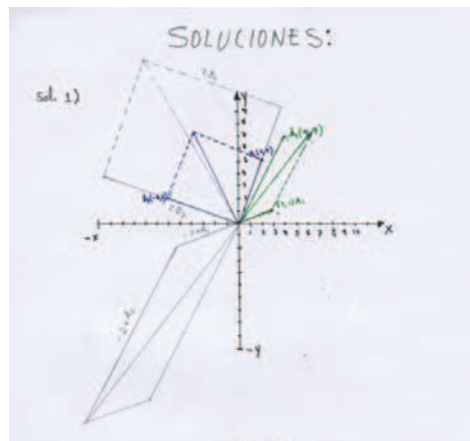


Figura 5

Lo sobresaliente de la solución incluida en la Figura 5 es que centra su atención en aspectos geométricos, es decir en consecuencia hace uso de la visualización y no muestra rasgos de las operaciones con las matrices en forma algebraica.

Exploraciones con uso de tecnología

Se han realizado también exploraciones basadas en el uso de software matemático. A continuación se muestran dos ejemplos.



Figura 6.

La Figura 6 muestra una interpretación en el software Mathematica de la gráfica de una matriz. Se puede observar que se consideran tres parámetros: fila, columna y valor de cada uno de los componentes de la matriz (son valores que se usan convencionalmente)

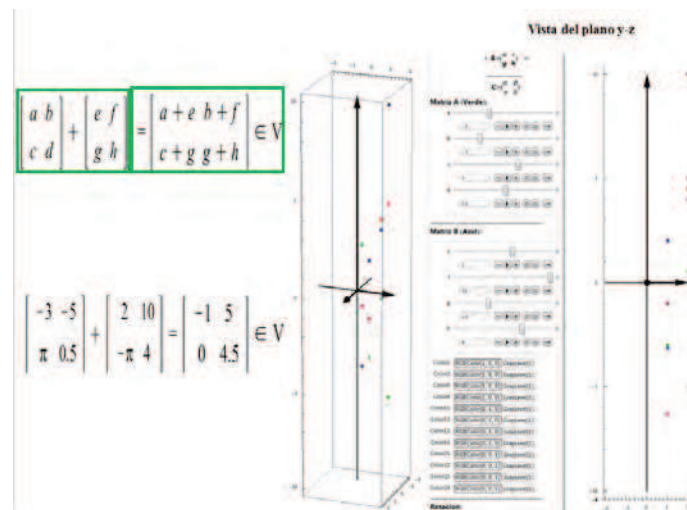


Figura 7.

En la Figura 7 se representa una suma de matrices, se incluyen valores no convencionales, como el de π , y que constituyen las bases para representar la combinación lineal entre

matrices. Se puede apreciar que, en términos generales, se trata de una sumatoria de alturas con respecto a un plano.

Observaciones

El diseño de situaciones orientadas a la construcción de un concepto algebraico no resulta sencillo, debido a las características propias del álgebra lineal en el discurso matemático escolar. El uso del software matemático puede favorecer en algunos casos al esclarecimiento del concepto estudiado y estimula la intención en la adquisición del mismo. La dependencia e independencia lineal de polinomios de segundo grado no se relaciona con los puntos de intersección entre las parábolas asociadas a los correspondientes polinomios.

Recomendaciones

Replantear el diseño de la situación didáctica. Aplicar la puesta en escena de la situación didáctica en diversos sistemas educativos ya sean privados y públicos para fortalecer las regularidades observadas y poder contrastar la hipótesis propuesta.

Comentarios

Resolvieron la actividad en forma individual e identificaron las dificultades presentadas al manejar aspectos de carácter geométrico.

El grupo de participantes identificó los objetivos de la actividad en estudio, estrategias y formas de resolver la actividad didáctica en estudio, es decir todos terminan por comprender el concepto.

Finalmente el grupo examinado dejó evidencias verbales de la motivación y diversidad de propuestas que se generan al resolver actividades de esta naturaleza.

El diseño de situaciones orientadas a la construcción de un concepto algebraico no resulta sencillo, debido a las características propias del álgebra lineal en el discurso matemático escolar.

El uso del software matemático puede favorecer en algunos casos al esclarecimiento del concepto estudiado y estimula la intención en la adquisición del mismo.

La dependencia e independencia lineal de polinomios de segundo grado no se relaciona con los puntos de intersección entre las parábolas asociadas a los correspondientes polinomios.

A los antecedentes de geometría analítica que deben cubrir los estudiantes de licenciatura previos al curso de álgebra lineal. Ello permite que los estudiantes puedan resolver situaciones en este contexto

Se relaciona con las propuestas de algunos textos y en forma inicial de la experiencia que adquirí en un diplomado de didáctica de las matemáticas que centraba su atención en el análisis de los polinomios desde una perspectiva visual.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52(3), 215-241.

Dorier, J. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K & Kunze, R. (1973) *Álgebra Lineal*. Printece-Hall Interamericana, S.A., México.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. Research Report, Concordia University, Montreal, Canadá.

Winter, D. J. (1992). *Matrix Algebra*. Macmillan Publishing Company, U.S.A.