DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS. APLICACIONES DE LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Patricia Mayo[1], Pedro Castañeda[2], Sergio Abraham[1], Pedro Fernández de Córdoba[1,] , Juan Pérez[2]
1. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia, 2. España, Cuba.
Departamento de Matemáticas. Universidad de Pinar del Río.
pmayo@mat.upv.es, pcasta@mat.upr.edu.cu, sabraham@mat.upv.es, pfernandez@mat.upv.es, jperez@mat.upr.edu.cu.

Resumen: En este trabajo trataremos el proceso de diagonalización de endomorfismos y las aplicaciones que tiene en la resolución de problemas de álgebra lineal. Dicho trabajo se enmarca en un proyecto de colaboración entre la Universidad Politécnica de Valencia (España) y la de Pinar del Río (Cuba), relativo a la enseñanza de las matemáticas en carreras de ingeniería. El proceso de diagonalización de la matriz A consiste en encontrar la matriz diagonal D (que contiene a los autovalores) y la matriz de cambio de base P no singular (que contiene a los autovectores) y que cumplen la igualdad siguiente: A = PDP^{-1}

Siendo la matriz A diagonalizable, veremos cómo utilizar la diagonalización de matrices en modelos donde se tenga que calcular potencias, raíces y exponencial de una matriz mediante el asistente matemático DERIVE.

Palabras clave: Diagonalización, valor y vector propio.

Abstract: In this work we will have to do with process endomorfismos's diagonalization and the applications that have in the resolution of problems of linear algebra. Such work is delimited in a project of collaboration among the Polytechnic University from Valencia (Spain) and the one belonging to Pinar of the River relative to the teaching of mathematics in racing of engineering (Cuba). The process of diagonalization of the womb A the D consists in finding the diagonal womb (that he contains to the moral values) and the womb of base change nonsingular P (that he contains to the vectors) and the fact that they obey equality following: $A = PDP^{-1}$

Being the womb A diagonalizable, we will see how utilizing the diagonalization of wombs in models where it be had to calculate potencies, roots and exponential of an intervening womb the mathematical assistant DERIVE.

Key words: Diagonalization, value and own vector.

Introducción

Este trabajo se enmarca en una práctica de ordenador que se desarrolla con estudiantes de ingeniería de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, de la Universidad Politécnica de Valencia y a la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica de la Universidad de Pinar del Río, Cuba. Según la experiencia de los profesores de esta disciplina se conoce que a pesar de que los estudiantes recibieron durante cursos precedentes formación en temas del Álgebra y después un curso introductorio universitario, algunos presentan obstáculos que aún perduran en el conocimiento del Álgebra. A través de la teoría del obstáculo epistemológico de Bachelard y de la experiencia en la enseñanza del Álgebra por muchos años auxiliados en el uso del asistente matemático DERIVE se logró que los estudiantes hicieran una correcta apropiación de los conocimientos y su aplicación al campo de desarrollo de su perfil profesional.

Marco teórico conceptual

> ¨Un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar” (Bachelard, 1976, p.20). “Uno de los grandes aportes que realizó Bachelard a la moderna teoría del conocimiento fue sin duda alguna el de obstáculo epistemológico; estos son dificultades psicológicas que no permiten una correcta apropiación del conocimiento objetivo” (Villamil, 2008).

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problema, pero que falla cuando se aplica a otro. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones (Godino, citado en Ruiz, 2006).

Tomando como base lo anterior podemos entender que para que el alumno pueda trabajar primero debe comprender lo que se le está solicitando en el problema. Una vez comprendido, el alumno puede aplicar el primer hábito mental para el pensamiento algebraico: HACER-DESHACER, siendo esta la capacidad no solamente para usar un proceso con el fin de llegar a una meta, sino también para entender suficientemente bien el proceso como para regresar desde la respuesta hasta el punto de partida. En la aplicación de la diagonalización de endomorfismo es necesario vencer los obstáculos de resolver, entre otros, sistemas de ecuaciones y obtener raíces de ecuaciones algebraicas. Así el estudiante puede trabajar con formas más simplificadas para facilitar los cálculos en las distintas aplicaciones, como puede ser la exponencial de una matriz (Abraham, Fernández, Isidro y Mayo, 2010). En el proceso de diagonalización son necesarias algunas definiciones: siendo A una matriz cuadrada de dimensión n: un escalar $\lambda \in \Re$ se dice valor propio de la matriz A si existe un vector v no nulo tal que: $A v = \lambda v$. El vector v recibe el nombre de vector propio de la matriz A. (Pérez, 1999).

Como bien se conoce del Álgebra, el objetivo es encontrar la matriz diagonal D (que contiene a los autovalores) y una matriz de cambio de base P no singular (que contiene a los autovectores), que cumplen la igualdad siguiente: $A = PDP^{-1}$.

Propuesta Metodológica

Después de orientar la teoría sobre la diagonalización, el estudiante está en condiciones de subsanar los obstáculos presentados al inicio del curso haciendo un resumen o algoritmo, si es posible, sobre el problema de la diagonalización.

Paso 1: Calculamos el polinomio característico p (λ).

Paso 2: Descomponemos p (λ) calculando sus raíces. Una vez hecho esto, tenemos calculados los valores propios y sus multiplicidades algebraicas.

Paso 3: Calculamos las multiplicidades geométricas, $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$

Paso 4: Aplicamos el teorema anterior (criterio de diagonalización).

Paso 5: Obtenemos bases de los subespacios propios $V_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i I)$.

Paso 6: Uniendo estas bases se obtiene una base de V para la cual la matriz asociada es D. Así pues la matriz de cambio de base, cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores propios, es la matriz de paso P que verifica $D = P^{-1}AP$.

Paso 7: Se orientan actividades que se resuelven dentro de un marco computacional con el uso de un Asistente Matemático, en este caso utilizamos el DERIVE.

Diagonalización de una matriz cualquiera

Teorema:

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea diagonalizable es que exista una base del espacio vectorial formada por vectores propios del endomorfismo asociado a la matriz dada.

Se le recuerda al estudiante cuando los valores propios se repiten.

Teorema: **(**Condición de orden y rango)

La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea diagonalizable es que para cada valor propio λ_i de orden de multiplicidad r_i se verifique rango $(A - \lambda_i I) = n - r_i$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n, f un endomorfismo de V y sea A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Dado $\lambda \in K$, se verifica:

1. $V_\lambda = Ker(f - \lambda I)$.

2. V_λ es un subespacio vectorial de V.

3. dim(V_λ) = n - rg(A - λI).

4. λ es autovalor de f $\Leftrightarrow$ det(A - λI)=0.

Al subespacio V_λ recibe el nombre de *subespacio propio* de λ.

Polinomio Característico

Según hemos visto, para un endomorfismo f de matriz asociada A, un escalar λ es un valor propio de f si, y solo si, det(A - λI) =0; ahora bien, considerando el escalar λ como indeterminada, este determinante

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

Es un polinomio en λ, p(λ), de grado n que recibe el nombre de *polinomio característico* de f.

Llamaremos *multiplicidad geométrica* de λ_i a la dimensión d_i del subespacio propio V_{λ_i}, esto es: d_i = dim(V_{λ_i}) = n - rg(A-V_{λ_i} I)

La relación entre las multiplicidades algebraicas y geométricas viene dada por el siguiente resultado.

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n y sea f: V $\rightarrow$ V un endomorfismo de V de matriz asociada A y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sus valores propios distintos. Entonces para cada i=1,..., r se tiene $1 \le d_i \le \alpha_i$.

Aplicaciones de la Diagonalización

En cuanto al cálculo de la *exponencial de una matriz*, en analogía con el desarrollo de Taylor en serie de potencias de e^x para $x \in R$, según Taylor:

$$\text{TAYLOR(EXP(x), x, 0, 7)} = \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$,

definimos la exponencial de una matriz cuadrada $A \in M_{nxn}(K)$ como la siguiente serie matricial.

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + .. + \frac{A^n}{n!}$$

Del hecho que la matriz A sea diagonalizable, es cierto que $A^k = PD^kP^{-1}$ tal como se ha comentado anteriormente y podemos escribir que:

$$e^{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(PDP^{-1})^{k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{PD^{k}P^{-1}}{k!}=P\left\{\frac{\sum_{k=0}^{\infty}D^{k}}{k!}\right\}P^{-1}=P\left\{\sum_{k=}^{\infty}\frac{\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & 0\\ 0 & \lambda_2^k & 0\\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}}{k!}\right\}P^{-1}$$

$$=P\left\{\sum_{k=}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0...0\\ 0 & \frac{\lambda_2^k}{k!} & 0 & 0...0\\ \multicolumn{4}{c}{........................}\\ 0 & 0 & ...\ 0 & \frac{\lambda_n^k}{k!}\end{pmatrix}\right\}P^{-1}=P\left\{\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0...0\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^k}{k!} & 0...0\\ \multicolumn{3}{c}{........................}\\ 0 & 0\ ... & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\end{pmatrix}\right\}P^{-1}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & 0...\ 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & 0\ ...\ 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3}...0\\ \multicolumn{3}{c}{..................}\\ 0 & 0 & 0...\ e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$$

Siendo $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ los autovalores de la matriz A. Hemos de mencionar que el cálculo de e^A también se puede llevar a cabo computacionalmente mediante una serie matricial que se implementa como $s(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$ y se obtienen distintos valores s(20),s(50),..., s(100) hasta que la serie converja.

Resultados

A continuación se les plantea una situación problemática a los estudiantes de ingeniería que contenga temas básicos del Álgebra Lineal y al mismo tiempo se orienta hacia actividades que se resuelvan dentro de un marco computacional con el uso de un Asistente Matemático, en este caso utilizamos el DERIVE. Es interesante también motivar a los estudiantes en otros conceptos del Álgebra como es el cálculo de valores propios complejos para el trabajo con las ecuaciones diferenciales que estudiarán en el segundo año de su carrera e incluso que se motiven cuando el endomorfismo no es diagonalizable, estas son interrogantes que se resolverán en otros proyectos.

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Dada la matriz A, diagonalizarla y calcular e^A.

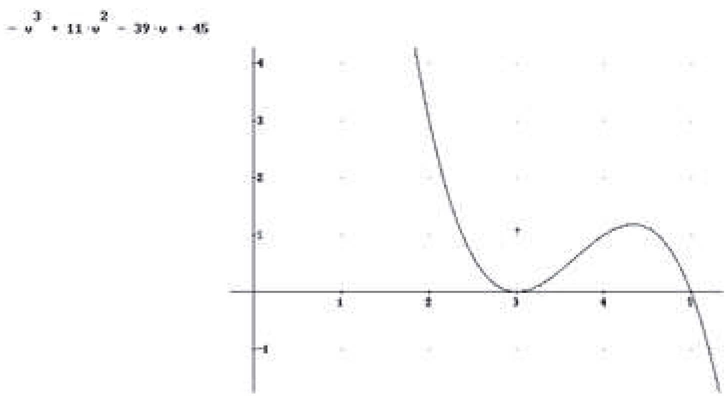
Teniendo en cuenta el uso de las TICs, compartimos el criterio:

> El asistente matemático como herramienta de trabajo en la Disciplina Matemática actuará como un nuevo elemento Didáctico Integrador en las carreras de Ciencias Técnicas. El uso del asistente matemático se ha ido incrementando paulatinamente y actualmente se hace una necesidad como un elemento más dentro del proceso Enseñanza – Aprendizaje. (Castañeda, 2001, p. 523).

El asistente que proponemos es el DERIVE, que ya es conocido por los estudiantes, este tiene ficheros y un tratamiento gráfico que nos proporciona un ambiente muy amigable y capaz de resolver la diagonalización y sus aplicaciones en un tiempo razonable.

El fichero para encontrar el polinomio característico es:

$\text{CHARPOLY}(A,\ v) = -v^3 + 11\cdot v^2 - 39\cdot v + 45$, seguidamente graficamos el polinomio para localizar sus raíces, este nos da un ambiente visual muy claro.



El asistente nos brinda ficheros para calcular los valores propios y sus vectores propios correspondientes.

```
EIGENVALUES(A, v) = [v = 3, v = 5]
EXACT_EIGENVECTOR(A, 3) = [[@2, @1, -@2]]
EXACT_EIGENVECTOR(A, 5) = [[@3, 2·@3, @3]]
```

Inmediatamente se obtiene la matriz diagonal D, de tal forma que se cumpla $D = P^{-1}AP$

Se obtiene la matriz P que es inversible, pues $\text{DET}(P) = -2$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P\cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar la matriz P cumple con sus propiedades de inversible y los estudiantes pueden corroborar todos estos cálculos con el asistente, como también veremos que se cumple $D = P^{-1}AP$.

$$A = P\cdot D\cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ya una vez obtenida la matriz diagonal, podemos operar con ella en diferentes cálculos ya que:

Una matriz A es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal, D, es decir, si existe P regular tal que $D = P^{-1}AP$.

El proceso de cálculo de la matriz diagonal y de la matriz de paso se denomina diagonalización de A.

Recordar que:

Dos matrices cuadradas de orden n, A y B, son *semejantes* si existe una matriz cuadrada, P, con determinante distinto de cero, que satisfaga $B = P^{-1}AP$.

A la matriz B se le llama transformada de A mediante la matriz de paso P.

Propiedades:

1. Si A y B son semejantes, entonces son equivalentes.
2. Si A y B son semejantes, tienen el mismo rango.
3. Si (A,B) y (C, D) son semejantes con la misma matriz de paso, entonces A+C es semejante a B+D con matriz de paso P.
4. Si A y B son semejantes con matriz de paso P, y n es un número natural, $A^n \, y \, B^n$ son semejantes con matriz de paso P.

Para calcular e^A, procedemos como explicamos anteriormente

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + .. + \frac{A^n}{n!}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PD^k P^{-1}}{k!} = P \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{\infty} D^k}{k!} \right\} P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^k}{k!} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 5^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix}}{k!} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{5^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^k}{k!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^5 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right] =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{e^5}{2}+\frac{e^3}{2} & 0 & \frac{e^5}{2}-\frac{e^3}{2} \\ e^5-e^3 & e^3 & e^5-e^3 \\ \frac{e^5}{2}-\frac{e^3}{2} & 0 & \frac{e^5}{2}+\frac{e^3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84.24934801 & 0 & 64.16381108 \\ 128.3276221 & 20.08553692 & 128.3276221 \\ 64.16381108 & 0 & 84.24934801 \end{bmatrix}$$

Cálculos hecho con DERIVE

Utilizando la expresión $s(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$, podemos observar que mientras más términos usemos más exacto es el resultado, ya que estamos representando a la exp(x) por un desarrollo en series de potencias.

$$S(5) = \begin{bmatrix} 54.90833333 & 0 & 36.50833333 \\ 73.01666666 & 18.4 & 73.01666666 \\ 36.50833333 & 0 & 54.90833333 \end{bmatrix} \qquad S(50) = \begin{bmatrix} 84.24934801 & 0 & 64.16381108 \\ 128.3276221 & 20.08553692 & 128.3276221 \\ 64.16381108 & 0 & 84.24934801 \end{bmatrix}$$

Se les orienta a los estudiantes calcular cos(A), es decir,

$$\text{COS}(A) = R(n) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot A^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$$

Entre otras aplicaciones de la diagonalización podemos destacar:

El cálculo de la *raíz cuadrada de una matriz diagonalizable* A se puede calcular como $PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}$, en la que $D^{\frac{1}{2}}$ es una matriz diagonal que se obtiene hallando la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de la matriz D.

$$A^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{1/2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1.984059392 & 0 & 0.2520085849 \\ 0.5040171699 & 1.732050807 & 0.5040171699 \\ 0.2520085849 & 0 & 1.984059392 \end{bmatrix}$$

Respecto al cálculo *de la potencia de una matriz diagonalizable*, dada una matriz $A \in M_{nxn}(K)$ diagonalizable en K tal que $A = PDP^{-1}$ y $m \in N$ es un exponente, se tiene que $A^m = PD^mP^{-1}$ donde la matriz D^m es diagonal y se obtiene elevando al exponente m los elementos de la diagonal de la matriz *D*.

$$: A^{46} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{46} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 71054273580441487646938677305777 & 0 & 71054273571578549527286176209848 \\ 142108547143157099054572352419696 & 8862938119652501095929 & 142108547143157099054572352419696 \\ 71054273571578549527286176209848 & 0 & 71054273580441487646938677305777 \end{bmatrix}$$

Conclusiones

En la experiencia que acabamos de exponer se ha explicado cómo utilizar los conceptos del Álgebra Lineal en algunas aplicaciones de la diagonalización, como es la exponencial, el cálculo de una potencia y la raíz cuadrada de una matriz. En la misma los estudiantes se sintieron motivados desde el momento que tuvieron que retomar los contenidos de valores y vectores propios. Se resolvieron los obstáculos presentados en cursos precedentes mediante la metodología empleada. Se les motivó explicándoles que en el segundo año de su carrera tendrían que retomar este contenido para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales, por lo que la metodología recibida tendría que ser adaptada a esta nueva situación. Pudieron corroborar las facilidades que les aporta el uso del asistente matemático en el trabajo algebraico, que en ocasiones es engorroso, permitiéndoles defender la idea sobre el rol que deben cumplir las TICs en los procesos formativos.

Referencias bibliográficas

Abraham, S. Fernández De Córdoba, P. Isidro, J.M y Mayo, P. (2010). *Matemáticas Asistidas por Ordenador*. Valencia: Intertech Cooperación.

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.

Castañeda, P. (2001). Necesidad actual del uso del ordenador en el aprendizaje de la Matemática. En S. Abraham, P. Fernández, J. M. San Juan, B. Sáiz y M. Zacarés (Eds) Universidad Politécnica de Valencia (Eds.), *Experiencias Matemáticas y Didácticas en la Universidad de Pinar del Río* (pp. 523-528), España: Universidad Politécnica de Valencia.

Pérez, P. (1999). *Notas de Clase. Álgebra Lineal*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Ruiz, A. (2006). Escuela francesa de didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. Costa Rica: San José. CIMM/UCR.

Villamil, L. E. (2008). *La noción de obstáculo epistemológico en Gastón Bachelard*. Recuperado el 26 de abril de 2012 de http://www.ucm.es/info/especulo/numero38 /obstepis.html.