SUPERFÍCIES ESFÉRICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM O AUXÍLIO DE UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Monica Karrer, Simone Navas Barreiro
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
mkarrer@uol.com.br, sbarreiro@yahoo.com.br

Resumo. Este trabalho apresenta os resultados da aplicação de uma atividade que compôs um experimento de ensino sobre superfícies esféricas, conteúdo desenvolvido na disciplina de Geometria Analítica dos cursos da área de exatas do ensino superior. O estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas e baseado na metodologia de Design Experiment. Teve-se por objetivo investigar as produções de quatro sujeitos provenientes do curso de Licenciatura em Matemática diante de situações inovadoras que integraram os registros algébrico, gráfico, figural e da língua natural, tendo o software Cabri 3D como ferramenta de auxílio nas conversões que envolveram o registro gráfico. Suas produções revelaram sucesso na construção do objeto e avanços principalmente nas análises das relações entre representações dos registros algébrico e gráfico.

Palavras chave: superfícies esféricas, geometria dinâmica, representações

Abstract. This work presents the results of an activity that composed a teaching experiment on spherical surfaces, content developed in Analytical Geometry discipline, in the exact sciences area, in higher education courses. The study was grounded on theory of semiotic representations registers and based on the Design Experiment methodology. It was intended to investigate the production of four individuals attending to Mathematics course when facing innovative situations that integrated algebraic, graphical, figural and natural language registers using the software Cabri 3D as a tool to aid in conversions involving graphic register. The productions of the involved individuals showed success in building the mathematical object and advancements mainly in the analysis of the relations between representations of algebraic and graphic registers.

Key words: spherical surfaces, dynamic geometry, representations

Introdução

Este trabalho expõe os resultados da aplicação de uma atividade sobre superfícies esféricas, conteúdo normalmente desenvolvido na disciplina de Geometria Analítica de cursos superiores da área de exatas. O estudo, que teve por objetivo elaborar, aplicar e analisar situações integrando representações dos registros algébrico, gráfico, figural e da língua natural, foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995).

Este pesquisador define registro de representação semiótica como o sistema semiótico que permite três atividades cognitivas: a formação de uma representação identificável, o tratamento, que consiste em transformações entre representações no interior de um mesmo registro, e a conversão, que consiste em transformações entre representações de registros distintos. Com relação ao objeto matemático superfícies esféricas, na Figura 1 apresenta-se um exemplo da atividade de tratamento no registro algébrico e outro da atividade de conversão do registro algébrico para o gráfico.

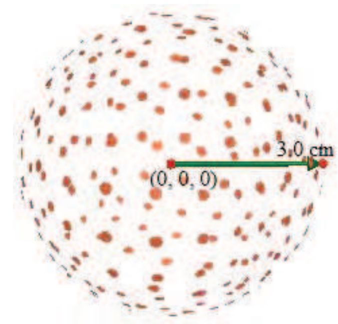
Exemplo de atividade de tratamento	Exemplo de atividade de conversão
$(x-2)^2+(y-3)^2+z^2=3^2$ $x^2-4x+4+y^2-6y+9+z^2=9$	$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3^2$ 

Figura 1. Exemplos das atividades de tratamento e de conversão

Duval (2009) alerta que a atividade de conversão pode ser afetada pelo fenômeno da não congruência, sendo que, para que haja congruência entre duas representações de registros distintos, é necessário que existam a correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, a mesma ordem de apreensão das unidades das duas representações e a conversão de uma unidade significante de representação de partida para uma unidade significante correspondente no registro de chegada. Caso uma dessas condições não seja verificada, a conversão será classificada como não congruente. Ainda, existe o fato de uma conversão ser congruente em um sentido e não congruente no sentido contrário, o que pode levar o estudante a apresentar desempenhos distintos quando uma situação é proposta nos dois sentidos de conversão. Segundo o mesmo autor, os registros podem ser classificados quanto a sua funcionalidade e discursividade. Se o registro permitir tratamentos algoritmizáveis, ele é denominado monofuncional e, se permitir o discurso, é denominado discursivo. Neste caso, o registro algébrico é classificado como monofuncional discursivo, o gráfico como monofuncional não discursivo, a língua natural como multifuncional discursivo e o figural como multifuncional não discursivo. Duval (1995) revela que, em geral, no ensino de Matemática, os registros monofuncionais discursivos são priorizados em relação aos demais, fato atribuído, dentre outros aspectos, à influência da formação do matemático, cuja atividade valoriza um trabalho envolvendo sobretudo tratamentos neste tipo de registro. Surge, então, a necessidade de conceber as especificidades de se tratar a Matemática do ponto de vista do matemático e do ponto de vista da aprendizagem matemática.

Diversos pesquisadores que trataram da análise de conteúdos de Geometria Analítica e Álgebra Linear e que se fundamentaram na teoria dos registros de representações semióticas, dentre eles, Pavlopoulou (1993), Bittar (1998) e Karrer (2006) evidenciaram, dentre outros resultados, dificuldades dos estudantes em conversões envolvendo o registro gráfico. Pavlopoulou (1993) e Barreiro (2012), na análise de livros didáticos dessas disciplinas, também observaram o predomínio de registros monofuncionais discursivos em relação aos multifuncionais e aos não discursivos, confirmando a afirmação exposta anteriormente por Duval (1995).

Com relação à utilização de ferramentas computacionais no ensino de Matemática, Noss e Hoyles (1996) defendem a inserção desses recursos de forma a favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático, trazendo benefícios que não seriam possíveis em outros ambientes de ensino. Em coerência com esta visão e com a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009), no presente estudo foi utilizado o *software Cabri* 3D, dada a possibilidade de exploração da análise dinâmica e simultânea das relações entre representações dos registros gráfico e algébrico.

Desta forma, partindo da problemática e das evidências detectadas na literatura, neste trabalho teve-se a intenção de propor um experimento de ensino sobre superfícies esféricas, elaborado com a preocupação de se sugerir uma entrada experimental no ambiente *Cabri* 3D, explorando o registro gráfico e suas relações com os registros algébrico e da língua natural. A metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003) norteou tanto a construção do experimento como a sua condução, dado que um desenho inicial foi elaborado, contando com a previsão de adaptações e novas inserções durante sua execução, caso as produções dos estudantes apontassem para tal necessidade. Neste sentido, este tipo de metodologia possuiu caráter flexível, iterativo e cíclico. Participaram do estudo quatro sujeitos do curso de Licenciatura em Matemática, que estudaram em uma instituição privada do estado de São Paulo. Eles já haviam tido contato com o conteúdo de vetores no R^3, mas não com o de superfícies esféricas. O experimento global foi composto de dez atividades, desenvolvidas nos ambientes papel e lápis e *Cabri 3D*, que trataram inicialmente da construção do objeto matemático "superfícies esféricas" e depois da análise de intersecções entre superfícies esféricas e planos e entre superfícies esféricas e retas. Neste artigo são apresentados apenas os resultados da primeira atividade, que objetivou fornecer uma entrada experimental para a construção do objeto matemático "superfície esférica", representando um ambiente favorável para o estabelecimento de relações entre representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural.

Apresentação do estudo

A seguir, são apresentadas as tarefas propostas na primeira atividade.

Considere o sistema de coordenadas ortonormais $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.*Tarefa a)* No arquivo *1a* é dado o representante de um vetor com módulo 3, cuja origem coincide com a origem do sistema. Usando o comando trajetória do *software*, mexa na extremidade desse representante. Com o botão direito, mude a posição do plano de referência, para obter outras vistas do objeto. Que objeto gráfico você acha que é definido nesta situação? Ao realizar estas alterações, houve mudança no valor do módulo do vetor? *Tarefa b)* Utilizando um comando do *Cabri*, construa o objeto gráfico que você acha que esta trajetória definiu. *Tarefa c)* Verifique se o objeto gráfico fornecido pelo *software* coincide com o objeto que você achou que os pontos da trajetória definiriam. Escreva suas conclusões. *Tarefa d)* Registre, com suas palavras, o que observou e como você definiria uma superfície esférica. *Tarefa e)* Denominando qualquer um dos pontos obtidos na trajetória por (x,y,z), qual seria a equação dessa superfície esférica? *Tarefa f)* Expresse a equação desta superfície esférica por meio do *software* e verifique se coincide com o que você obteve no item anterior. Como você relaciona a equação dessa superfície com a sua representação gráfica? *Tarefa g)* Abra o arquivo *1b* do *Cabri 3D*. Na tela é dado o representante de um vetor cuja origem coincide com a origem do sistema. Construa a superfície esférica com raio igual ao módulo deste representante e solicite sua equação. Altere a extremidade dele e observe o que ocorre no gráfico e na equação. *Tarefa h*) Abra o arquivo *1c* do *Cabri 3D*. Na tela é dado o representante de um vetor cuja origem não coincide com a origem do sistema. Determine as coordenadas de sua origem. Construa a superfície esférica com raio igual ao módulo deste vetor e centro na sua origem. Solicite sua equação. Comparando a equação obtida com a equação $x^2+y^2+z^2=r^2$ $x^2+y^2+z^2=r^2$, o que você observa? *Tarefa i)* Com o botão esquerdo, selecione a superfície esférica para deslocá-la. Descreva o que você observou no gráfico e na equação. *Tarefa j)* Agora altere o módulo do vetor "esticando-o" pela sua extremidade. O que ocorre com o gráfico e com a equação?

Na tarefa a, pretendia-se que os sujeitos observassem que, movimentando o representante de um vetor com módulo fixo e origem na origem do sistema de coordenadas $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, seria obtida uma superfície esférica, conforme ilustrado na Figura 2.

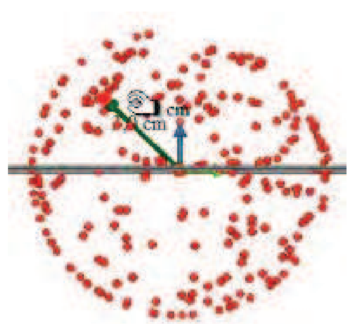


Figura 2. Trajetória definida pela movimentação do representante do vetor

Nas tarefas b e c, pretendia-se que os sujeitos verificassem, utilizando recursos do *software*, se a conjectura obtida na tarefa anterior estava correta. Na tarefa d, intencionava-se observar se os sujeitos conseguiriam relatar a questão da equidistância dos pontos da superfície esférica ao seu centro e expressar, partindo da experimentação realizada e utilizando o registro da língua natural escrita, suas conclusões no ambiente papel e lápis. Na tarefa e, pretendia-se verificar se os sujeitos efetuariam uma conversão para o registro algébrico, determinando a equação reduzida da superfície esférica construída. Na tarefa f, eles poderiam observar se o que determinaram coincidia com o fornecido pelo comando do *software*. Na tarefa g, pretendia-se, por meio da experimentação no ambiente computacional, que os sujeitos observassem o impacto que a alteração no módulo do vetor geraria nos registros algébrico e gráfico de uma superfície esférica com centro na origem do sistema $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dado o dinamismo do *software*, era possível alterar a extremidade do representante do vetor e observar, de forma simultânea, a alteração no registro algébrico, conforme ilustrado na Figura 3.

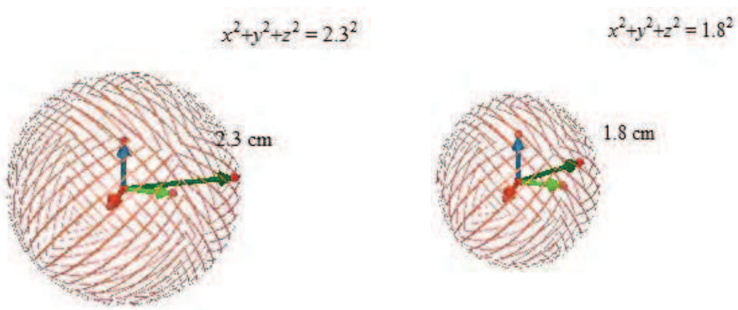


Figura 3. Experimentação da influência do raio nos registros algébrico e gráfico

Na tarefa h, pretendia-se que os sujeitos observassem a influência do centro da superfície esférica na suas representações algébrica e gráfica, por meio do aspecto dinâmico do *software*, especificamente na situação em que o centro da superfície esférica não coincidia com a origem do sistema $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, conforme ilustrado na Figura 4.

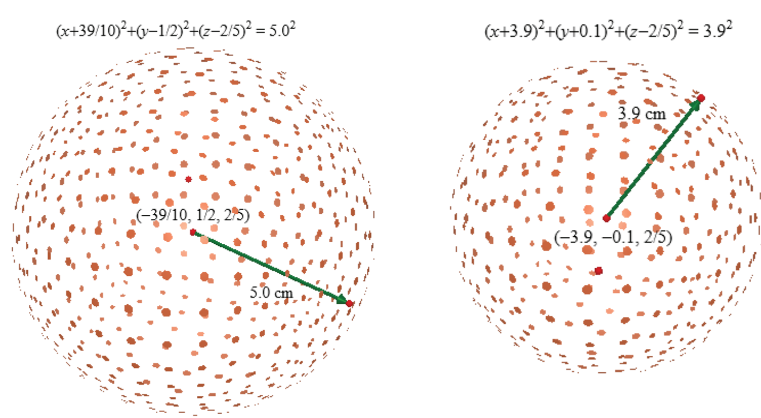


Figura 4. Experimentação da influência do centro nos registros algébrico e gráfico

Nas tarefas i e j, eram sugeridas outras manipulações para a análise das relações entre os registros algébrico e gráfico da superfície esférica. A seguir, são apresentados e discutidos os resultados da aplicação dessa atividade.

Apresentação e análise dos resultados da aplicação da atividade

Nesta seção, apresenta-se a análise da aplicação desta atividade a duas duplas de sujeitos provenientes do curso de Licenciatura em Matemática. Os estudantes não apresentaram dificuldades na resolução das tarefas a,b e c. Na tarefa a, as duas duplas conjecturaram que a trajetória definiria uma superfície esférica e observaram, utilizando comandos do *software*, que a hipótese estabelecida estava correta. No item d, notamos que as duas duplas observaram a questão da equidistância entre qualquer ponto da superfície esférica e seu centro, apesar de a dupla 2 fornecer uma produção na língua natural mais elaborada, conforme ilustrado nas Figuras 5 e 6.

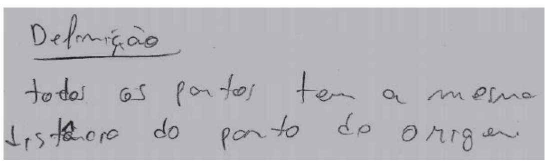

Definição
todos os pontos tem a mesma distância do ponto de origem

Figura 5. Descrição da Dupla 1 - Tarefa d

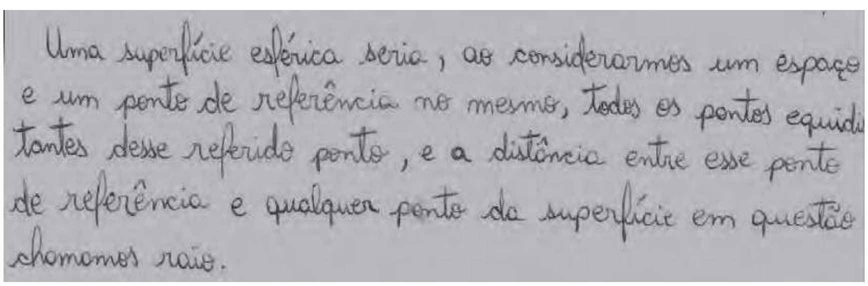

Uma superfície esférica seria, ao considerarmos um espaço e um ponto de referência no mesmo, todos os pontos equidistantes desse referido ponto, e a distância entre esse ponto de referência e qualquer ponto da superfície em questão chamamos raio.

Figura 6. Descrição da Dupla 2 - Tarefa d

Ao serem questionados, os alunos da dupla 1 relataram que o ponto de origem presente em sua descrição representava o centro da superfície esférica. A dupla 2 relatou que a descrição fornecida foi influenciada pelo conhecimento da definição de circunferência, incluindo as devidas adaptações. Na tarefa e, as duas duplas deduziram, sem dificuldades e partindo da fórmula de distância entre dois pontos, a equação da superfície esférica presente na tela. Na tarefa f, elas puderam constatar, por meio de um comando do *software*, que as deduções estavam corretas. As duas duplas concluíram que o módulo do vetor representava a medida do raio da superfície esférica e que, naquele caso, o seu centro era dado por (0,0,0). Nas tarefas seguintes, graças ao aspecto dinâmico da ferramenta, os estudantes puderam verificar experimentalmente as relações entre as representações gráfica e algébrica da superfície esférica. Esse tipo de abordagem permitiu que os estudantes identificassem, em atividades posteriores, se uma dada equação era ou não de uma superfície esférica e determinassem o centro e o raio partindo de sua representação algébrica, conforme ilustrado na Figura 7.

Produções da Dupla I	**Produções da Dupla 2**
A equação seguinte é de uma superfície esférica? c) $x^2 + y + z^2 = 9$ → não; porquê o y não está ao quadrado Determinar o centro e o raio das superfícies esféricas: c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 32$ → $x^2+y^2+z^2=16$ Centro = (0,0,0) raio = 4 Tarefa b. $(x- 1/2)^2 + y^2 + (z+3/4)^2 = 7$ centro → (1/2, 0, -3/4) raio → $\sqrt{7}$	Determinar o centro e o raio das superfícies esféricas b) $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ centro (0;0;0) raio $\sqrt{7}$ Tarefa a. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ CENTRO (1;-2;3) RAIO 4 Tarefa c. $3(x-0,2)^2 + 3(y-1)^2 + 3(z+0,7)^2 = 27$ CENTRO (0,2; 1; -0,7) RAIO 3

Figura 7. Produções das duplas I e 2

Na aplicação desta primeira atividade do experimento, não foram necessárias adaptações ou inserções de propostas adicionais ao desenho inicial, conforme previsto na metodologia adotada, uma vez que as produções dos estudantes indicaram compreensões satisfatórias. A partir dessa primeira experimentação, os alunos, em conjunto com o professor-pesquisador, discutiram sobre a representação algébrica de uma superfície esférica genérica de centro C= (a,b,c) e raio r. Partindo das observações realizadas no *software*, das atividades experimentais e da conclusão da manutenção da distância entre os pontos da superfície esférica e o seu centro, os sujeitos não tiveram dificuldades em deduzir e compreender o significado da equação $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$. As demais atividades do experimento trataram da equação geral da superfície esférica e de interseções envolvendo esse objeto matemático, sendo que, principalmente no trabalho com as intersecções, os aspectos inerentes à metodologia adotada se tornaram mais evidentes, dada a necessidade de se propor situações não previstas no desenho inicial, para que os estudantes atingissem o objetivo esperado.

Conclusão

Este estudo permitiu uma entrada experimental antes da formalização do conceito de superfície esférica. Os alunos puderam observar no *software* as condições matemáticas para a determinação desse objeto matemático, bem como as relações entre representações dos registros algébrico e gráfico. Essa experimentação auxiliou na identificação da equação de superfícies esféricas, na determinação do centro e do raio e também na construção da equação da superfície esférica, tanto no seu formato reduzido como no geral. O *software* favoreceu a visualização simultânea das relações entre representações dos registros algébrico e gráfico e permitiu que as conjecturas experimentais fossem validadas no próprio ambiente.

Referências bibliográficas

Barreiro, S. N. (2012). *Superfícies esféricas: uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com auxílio do software Cabri 3D*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Bandeirante de São Paulo. Brasil.

Bittar, M. (1998). *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire*. Tese de Doutorado não publicada, Université Joseph Fourier. França.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher 32(1)*, 9-13.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (2009). *Semiósis* e *Pensamento Humano: registros semióticos* e *aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física.

Karrer, M. (2006). *Articulação entre Álgebra Linear* e *Geometria*: *um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica.* Tese de Doutorado não publicada, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Noss, R.; Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisive pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de didactique et de sciences cognitives 5(1),* 67-93.