ENSEÑAR MATEMÁTICA: UN RETO EN EL NUEVO PARADIGMA TECNOLÓGICO

Agustin De la Villa[1], Alejandro Lois[2], Liliana Milevicich[2], Gerardo Rodrígez Sánchez[3]
[1]Universidad Pontificia Comillas, Escuela Técnica Superior de Ingeniería ICAI España
[2]Escuela Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco Argentina
[3]Escuela Politécnica Superior Zamora, Universidad de Salamanca España
avilla@dmc.icai.upcomillas.es, alelois@hotmail.com, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, gerardo@usal.es

Resumen. Focalizados en la teoría de Situaciones Didácticas, hemos realizado un taller con el propósito de analizar aquellos elementos que concurren para enseñar en situaciones didácticas caracterizadas por los nuevos entornos tecnológicos y de brindar respuestas sobre los modos de abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la Enseñanza Superior, a través de la selección y utilización de programas de uso simbólico más adecuado en cada caso. Los propósitos de este trabajo son: a) analizar las características de nuevos modelos adecuados de intervención didáctica sustentados en nuevos recursos tecnológicos y la transformación en los modos de apropiación del conocimiento, por parte de los alumnos, b) explorar propuestas didácticas para la enseñanza de la Matemática en la enseñanza Superior, a través del material de estudio diseñado sobre diferentes recursos tecnológicos.

Palabras clave: CAS – teoría de situaciones didácticas – recursos tecnológicos

Abstract. Focused on the Didactic Situations Theory, we held a workshop in order to analyze everything that attends to teach in teaching situations characterized by new technological environments and provide answers on ways to address the teaching and learning Mathematics in Higher Education, through the selection and use of more appropriate CAS in each case. The purposes of this work are: a) analyze the characteristics of new suitable educational intervention models supported by new technological resources and the way students learn, b) exploring teaching suggestions for teaching Mathematics in higher education through technological resources study material.

Key words: CAS - didactic situations theory - technological resources

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de CAS (Computer Algebra System) ha tenido un crecimiento exponencial, especialmente en el nivel superior, donde se cuenta, en la actualidad, con la participación activa de un número significativo de profesores que comenzaron a emplear los nuevos recursos para la enseñanza de las matemáticas.

Estamos viviendo las primeras fases de una revolución educativa, aunque, como señalan Benavides y Pedró (2007), se necesita mucha más investigación acerca de los nuevos modelos pedagógicos y de las condiciones bajo las cuales profesores y alumnos encuentran más incentivos para adoptar estrategias que contribuyan a:

a) el desarrollo de modelos adecuados de intervención didáctica,

b) la transformación del rol del docente,

c) la transformación en los modos de apropiación del conocimiento por parte de los alumnos (Milevicich y Lois, 2008).

Desde la perspectiva anteriormente planteada, adoptamos la teoría de Situaciones Didácticas como marco para el estudio de los nuevos entornos tecnológicos y las características de los procesos de enseñanza y aprendizaje que allí tienen lugar.

Brousseau define situación didáctica como:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución"(Brousseau, 1986, p. 35).

La situación didáctica debe crear la necesidad de que el alumno se apropie del conocimiento, pero al mismo tiempo, no debe conducirlo; pues si la respuesta se debe exclusivamente a las virtudes de la situación, entonces nada se debe a las "*virtudes*" o esfuerzo del alumno. Parafraseando al autor, la didáctica no consiste en ofrecer un modelo para la enseñanza, sino en producir un campo de cuestiones que permita poner a prueba cualquier situación de enseñanza, corregir o mejorar las que se han producido y formular interrogantes sobre lo que sucede (Brousseau, 1998).

En ese sentido, la teoría de las situaciones puede concebirse como un recurso privilegiado, tanto para comprender lo que hacen los profesores, como para producir problemas o actividades adaptadas a los saberes, a los alumnos y al medio.

Focalizados en la teoría de *Situaciones Didácticas*, hemos realizado un taller con el propósito de analizar aquellos elementos que concurren para enseñarle al alumno en situaciones didácticas caracterizadas por los nuevos entornos tecnológicos y de brindar a los docentes participantes, respuestas sobre los modos de abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la Enseñanza Superior, a través de la selección y utilización del CAS más adecuado en cada caso.

Específicamente, a través del presente trabajo se pretende:

- ❖ Analizar las características de nuevos modelos adecuados de intervención didáctica sustentados en nuevos recursos tecnológicos y la transformación en los modos de apropiación del conocimiento, por parte de los alumnos (de la Villa, 2010; Milevicich y Lois, 2010).

- Explorar propuestas didácticas para la enseñanza de la Matemática en la enseñanza Superior, a través del material de estudio diseñado sobre diferentes recursos tecnológicos, (Alonso *et al*., 2001; García, García, Rodríguez, Rodríguez y de la Villa, 2009, 2010; de la Villa, 2010)

Desarrollo

El presente trabajo tiene su origen en el taller dictado durante RELME 26, del cual conservamos su nombre. El mismo estuvo centrado en diferentes presentaciones y posteriores análisis, referidas al uso de los *programas de cálculo simbólico* (CAS) dentro de los cursos de nivel superior, mediante el uso de material electrónico basado en las producciones (libros, artículos científicos, etc) que, a lo largo de más de 20 años, los autores han desarrollado dentro de diferentes Proyectos de Investigación Educativa.

La utilización de los distintos CAS en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las Escuelas de Ingeniería tiene, como es natural, ventajas e inconvenientes.

Podemos resumir las ventajas de la utilización de estos recursos tecnológicos de la siguiente forma:

- Libera del trabajo rutinario de cálculo.
- Contribuye a la comprensión, a partir de la exploración de conceptos y propiedades (de manera visual o numérica)
- Posibilita la implementación de distintos algoritmos, independientemente de que sean largos o engorrosos.
- Permite el modelado eficaz de problemas físicos, económicos y técnicos de la vida real.
- Permite la simulación de diferentes fenómenos.
- Fomenta el espíritu crítico.

En cuanto a las desventajas, creemos que las que merecen más atención, son:

- El uso de los CAS puede suponer una pérdida de la habilidad y destreza en los cálculos manuales (Milevicich, 2012).
- Los CAS pueden hacer olvidar la necesidad de analizar críticamente los resultados obtenidos. Existe una colección de resultados inesperados que pueden presentarse en situaciones cotidianas y que deben alertar a nuestros alumnos sobre el peligro de aceptar sin más el resultado proporcionado por la máquina (Milevicich, 2012).

En ese sentido, la propuesta pretende contribuir a reforzar las ventajas y disminuir los inconvenientes.

Durante el desarrollo del taller se analizaron varios ejemplos vinculados a diferentes situaciones didácticas. Por una parte, los resultados incorrectos que devuelven algunos CAS, originados frecuentemente en un número limitado de interacciones, requieren de los alumnos un análisis profundo sobre los conceptos puestos en juego a la hora de resolver el problema. Por la otra, el caso de la devolución de resultados inesperados, también requiere un análisis profundo.

Una situación didáctica construida ex profeso con el propósito de que los alumnos realicen un análisis previo para determinar si la función es integrable, previo al estudio de la convergencia de las integrales impropias, consiste en proponer el cálculo de una integral definida para una función discontinua en el intervalo de integración, tal como se observa en la figura 1.

Sadovsky (2005) sostiene la posibilidad de una devolución a través de un retorno reflexivo sobre las acciones desplegadas a raíz de los problemas propuestos para configurar la situación a-didáctica, para aquellos alumnos que han funcionado de manera no científica frente a dichos problemas. Tal es el caso de los alumnos que intentan resolver mecánicamente las integrales, prestando sólo atención a los procesos algebraicos.

Retomando el problema, es oportuno proponer los límites de integración como variable didáctica. De ese modo la función puede resultar o no integrable dependiendo del intervalo en cuestión.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)\,\hat{}\,2}\, dx$$

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{(-1+x)^2}$ does not converge on $\{0, 2\}$.

Figura 1.Resultado proporcionado por el CAS Mathematica® versión 4.0 o superior

Algunos ejemplos presentados en el taller requieren un trabajo más dedicado. Debido a las limitaciones en el número de páginas del presente documento, presentamos sólo dos de ellos.

Problema 1

Encuentre los extremos de la función $f(x, y) = x^3 + y^3$ *sobre la circunferencia* $x^2 + y^2 = 1$

La estrategia consiste en llevar a cabo la secuencia de resolución de problema comenzando por definir la función de dos variables, la restricción y la función que vincula ambas fórmulas, tal como se observa en la figura 2.

Definición de la función y de la restricción

```
f[x_, y_] := x^3 + y^3;
const = x^2 + y^2 - 1;

F[x_, y_] := f[x, y] + λ*const
```

Figura 2. Definición de los elementos requeridos para la resolución del problema mediante el CAS Mathematica® versión 4.0 o superior

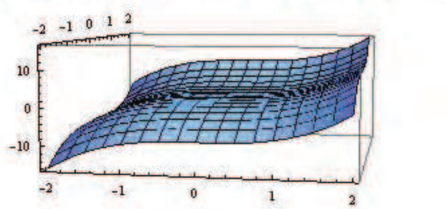
Aquí es necesario que el alumno tenga presente la base geométrica del método Multiplicadores de Lagrange. Esto es: se deberán buscar los valores extremos de f(x,y) cuando el punto (x,y) está restringido a encontrarse en la curva de nivel dada por la circunferencia de centro (0,0) y radio 1.

Se debe tener presente que los vectores gradientes a las curvas de nivel respecto de f(x,y) y respecto de la función restricción son paralelos. Este concepto es necesario para definir f. En los términos de la teoría de Brousseau, el uso de restricciones en el problema favorece las *interacciones efectivas* del sujeto con los conceptos teóricos.

Luego, es conveniente un análisis gráfico a efectos de inspeccionar las características de la superficie y de la restricción (figura 3).

Grafica de la función y la restricción

```
a = Plot3D[x^3 + y^3, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



```
b = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

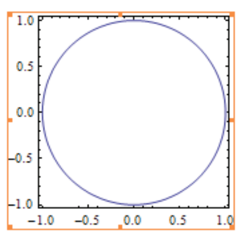


Figura 3. Gráfica de f(x,y) y la restricción sobre los puntos críticos proporcionados por Mathematica® versión 4.0 o superior.

La siguiente etapa consiste en obtener las derivadas parciales y la determinación de los puntos críticos (figura 4). Como se puede observar, el CAS devuelve 6 puntos críticos.

Determinación de los puntos críticos

```
Solve[{Fx == 0, Fy == 0, const == 0}, {x, y, λ}]
```

$$\left\{\left\{\lambda \to -\frac{3}{2},\ x \to 0,\ y \to 1\right\},\ \left\{\lambda \to -\frac{3}{2},\ x \to 1,\ y \to 0\right\},\ \left\{\lambda \to \frac{3}{2},\ x \to -1,\ y \to 0\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\lambda \to \frac{3}{2},\ x \to 0,\ y \to -1\right\},\ \left\{\lambda \to -\frac{3}{2\sqrt{2}},\ x \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \left\{\lambda \to \frac{3}{2\sqrt{2}},\ x \to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

Figura 4. Puntos críticos encontrados con el CAS Mathematica® versión 4.0 o superior

Resulta necesario clasificar dichos puntos críticos.

Los valores extremos de f corresponden a las curvas de nivel tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 1$ La existencia de máximos y mínimos para la función se sustenta en el teorema de existencia de los valores extremos absolutos dado que f es una función continua sobre un dominio cerrado y acotado. Aquí el carácter de necesidad del conocimiento juega un papel fundamental al momento de justificar la existencia de máximos y mínimos y su vinculación con los puntos críticos encontrados.

Finalmente la evaluación de tales puntos permiten concluir que f(0,1) y f(1,0) corresponden a máximos locales de la función y f(-1,0) y f(0,-1) corresponden a mínimos locales de la función. Recordemos que no se ha realizado un análisis en el interior del dominio debido a los requerimientos del problema.

Evaluación de los puntos críticos

$$\left\{f[0,1],\ f[1,0],\ f[-1,0],\ f[0,-1],\ f\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ f\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{1,\ 1,\ -1,\ -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

Figura 5. Evaluación de los puntos críticos en la función original

Problema 2

Encuentre el volumen encerrado entre las superficies $x^2 + y^2 = r^2$ *y* $y^2 + z^2 = r^2$

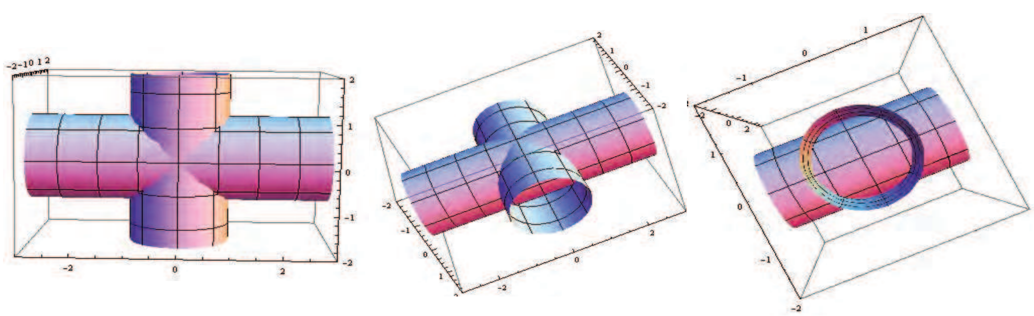


Figura 6. Distintos puntos de vista de las superficies

Esta situación didáctica fue construida para que los alumnos logren identificar la intersección entre dos sólidos sencillos (tal es caso de dos cilindros paralelos a los ejes coordenados), expresen el problema adecuadamente mediante integrales dobles y calculen el volumen. Es esencial la manipulación del gráfico (ver figura 6), de tal modo que los distintos puntos de vista permitan identificar el sólido intersección entre ambos cilindros. La figura 7 muestra un sólido limitado por –r y r (se reemplazó numéricamente r = 1 a los efectos de producir los gráficos).

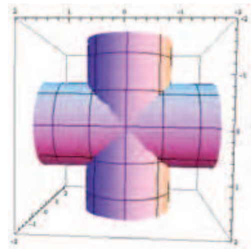


Figura 7. Gráfica de la intersección entre las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$

Si se tiene en cuenta la simetría del sólido respecto del origen de coordenadas, se puede plantear el problema de manera más sencilla y el volumen es 8 veces el obtenido en el primer octante (ver figura 8)

$$\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2-y^2}\, dx\, dy$$

$$\frac{2 r^3}{3}$$

Figura 8. Resolución analítica del problema utilizando Mathematica® versión 4.0 o superior

Es posible modificar la variable didáctica referida al sistema de coordenadas y solicitar la resolución del problema en coordenadas polares, con el propósito de transformar la integral en otra más sencilla de resolver.

Conclusiones

Retomando los principios de la Teoría de Brousseau, el *saber* se estructura y organiza a partir de sucesivas interpelaciones, generalizaciones, puestas a punto, interrelaciones y descontextualizaciones de las elaboraciones que son producto de situaciones específicas. En ese sentido, el uso de un CAS es decisivo.

La selección del CAS más adecuado, de acuerdo a la materia, unidad y tema que se está estudiando, debe ser responsabilidad del docente, competente en el uso de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Es importante fomentar en los alumnos la elaboración de sus propias cajas de herramientas en los distintos CAS para ser utilizadas dentro de sus tareas matemáticas.

La necesidad de los conocimientos para resolver una situación que sólo puede ser dominada adecuadamente mediante la puesta en práctica de los conocimientos o práctica que se pretende está vinculada a la situación didáctica propuesta y a la selección de las variables didácticas adecuadas. El uso de un CAS nuevamente juega un papel decisivo: en la configuración de la situación y en la modificación de las condiciones para provocar un cambio de estrategia en el alumno y que pueda llegar al saber deseado.

Referencias bibliográficas

Alonso, F, García, A, García, F, Hoya, S, Rodriguez, G, de la Villa, A (2001) Some unexpected results using computer algebra systems. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, *8 (3),* 239-252.

Benavides, F Y Pedró, F (2007) Políticas educativas sobre Nuevas tecnologías en los países iberoamericanos. *Revista Iberoamericana de Educación, 45,* 19-69

Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques,* (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). UNC, Córdoba, 7 *(2),* 33-115.

Brousseau, G. (1998) Los diferentes roles del maestro. En C. Parra, C. y I. Saiz, I. comps.), *Didáctica de matemáticas – Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

de la Villa, A. (2010) *Problemas de Álgebra.* Madrid: CLAGSA.

García, A., García, F., Rodríguez, G., Rodríguez, V., de la Villa, A. (2009) A toolbox with DERIVE*, Proceedings of ACA 2009, 15th International Conference on Application of Computer Algebra,* Montreal, Canada.

García, A., García, F., Rodríguez, G., Rodríguez, V., de la Villa, A. (2010) Una caja informática de herramientas matemáticas. *Revista de la Sociedad Puig Adam de profesores de Matemáticas*, *84*, 52-62.

Milevicich, L. Y Lois, A. (2008). E-multimedia test to explore the backgroud of students, *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education.*

Recuperado el 6/12/2008 de: http:// educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/wg7-c.pdf

Milevicich, L. Y Lois, A. (2010) La incorporación de la educación a distancia a la enseñanza superior de la matemática. Elementos a favor y en contra. *Congreso Mundial de Ingeniería 2010,* Buenos Aires, 17 al 20 de octubre de 2010.

M*ilevicich*, L. (2012) Enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. Una propuesta para cursos iniciales en la universidad. Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española. Sadovsky, P. (2005), La Teoría las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar en la enseñanza de la matemática, en Alagia H. Y Otros, *Reflexiones para la Educación Matemática,* Buenos Aires: Libros del Zorzal.