Apoyando el desarrollo del conocimiento matemático y pedagógico de los profesores: la resolución de problemas y el trabajo colaborativo.

César Cristóbal Escalante

Cinvestav - Universidad de Quintana Roo

Planteamiento

En las últimas décadas han ido creciendo las propuestas por realizar reformas en la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles educativos. Estas propuestas se basan en: una concepción de las matemáticas, que además de verlas como un conjunto de conocimientos organizados, formalizados y sistematizados, las considera un producto de la actividad social, realizada por personas en diversos contextos sociales, utilizando diferentes métodos para indagar, para preguntar, para analizar, para buscar respuestas, para justificar y argumentar conjeturas; en que el aprendizaje de las matemáticas debe darse en un ambiente de trabajo centrado en las actividades de los estudiantes, que los impulsen a desarrollar actividades de investigación, a plantear y evaluar conjeturas, a comunicar y discutir sus ideas con sus compañeros, y utilizar diferentes herramientas cognitivas, de forma tal que se desarrolle en el aula una comunidad de aprendizaje, esto es una comunidad en la que sea práctica cotidiana que los estudiantes desarrollen, expongan y evalúen ideas en torno a una situación o problema en forma individual y colectiva, de manera que se desarrollen criterios para la validación colectiva de esas ideas. (Schoenfeld, 2003; Lesh y Doerr, 2003; Manoucherhi, 2003).

Las reformas en la instrucción matemática demandan que los profesores enseñen un currículo muy diferente a aquel en el que fueron formados, por lo que es necesario establecer programas de formación y actualización de profesores, que basados en los resultados de investigaciones y estudios, los capaciten para diseñar, seleccionar y apoyar las actividades de instrucción adecuadas para llevar a cabo estas y futuras reformas, y lograr que los estudiantes adquieran los conocimientos matemáticos, las habilidades, actitudes y valores que ellas promueven (Lingefjärd, 2002). En este contexto surgen varias preguntas asociadas al qué, como y porqué del contenido de esos programas de formación de profesores, entre ellas: ¿Cómo es el proceso de aprendizaje de las matemáticas de los profesores? ¿Qué tipo de tareas los ayudan a desarrollar formas de razonamiento consistentes con las prácticas matemáticas? ¿Cómo un grupo de estudiantes se transforma en una comunidad de aprendizaje? ¿Cómo influyen las actividades de modelación y aplicación de las matemáticas, y el trabajo colaborativo en el conocimiento matemático de los profesores? Ellas guían esta investigación.

Marco Teórico.

La actividad de resolver problemas en contextos de la vida real, en un ambiente de colaboración en el aula, y utilizando diversas herramientas permite el desarrollo y la afinación de modelos y conceptos matemáticos utilizados para describir, analizar, comunicar y evaluar las diferentes propuestas de solución que surgen en los episodios del proceso de solución conjunta al problema. Este tipo de actividades permite el desarrollo del conocimiento del individuo en diversas dimensiones, por ejemplo: simple – complejo, concreto - abstracto, situado – descontextualizado. El conocimiento es más parecido a un organismo vivo, que cambia, se transforma a través de las experiencias del sujeto. Los sistemas de conocimientos de un individuo son gradualmente refinados. En este sentido, al conocer los caminos que utilizan los estudiantes para aprender las matemáticas, puede proporcionar elementos para entender la naturaleza del conocimiento que requieren los profesores y de las formas en que lo pueden desarrollar. Para interpretar las trayectorias en que los estudiantes pueden aprender, se debe proporcionar a los profesores formas para interpretar las matemáticas y analizar sus aspectos lógicos y pedagógicos, para desarrollar materiales curriculares y para analizar secuencias de actividades de aprendizaje (Lesh y Doerr, 2003).

La transferencia del aprendizaje se refiere a la *aplicación* que hace una persona del conocimiento aprendido, por estudio o por entrenamiento, a contextos o situaciones diferentes a aquellos en los que el conocimiento fue inicialmente aprendido, aunque también se refiere a la *habilidad* del individuo para aplicar esos conocimientos en otras situaciones (habilidad para transferir). Entre los factores que inciden para desarrollar la habilidad para transferir el conocimiento aprendido se encuentran: los conocimientos previos y su nivel de dominio (un aprendizaje con comprensión aumenta la capacidad para transferirlo), los ambientes en el que se aprenden los conocimientos iniciales, y el contexto de las diferentes situaciones usadas en las actividades de instrucción (Mestre, 2002; Boaler, 2002; van Gelder, 2005).

La interacción de cada estudiante con la comunidad en el aula es considerada como un factor esencial para su aprendizaje, pues mediante la interacción, la negociación y la colaboración con otros miembros de la comunidad, es como el individuo construye su conocimiento. Este proceso es en sí una negociación de significados, en la cual no necesariamente se adopta la concepción más adecuada. El papel del profesor es importante para plantear las preguntas o situaciones adecuadas que permitan que los estudiantes realicen actividades cognitivas que los lleven a avanzar en la dirección correcta respecto a lo que se desea que aprendan. La resolución de problemas situados en contextos reales, por lo general demandan plantear y responder preguntas que surgen de las formas en que se interpretan las situaciones. No tienen una respuesta única, como la mayoría de los problemas en los textos usuales de matemáticas, tienen varias respuestas, de acuerdo a las condiciones y supuestos que se adopten. Resolver estos problemas requieren de los estudiantes varias aproximaciones, en los que gradualmente se van elaborando y refinando las interpretaciones y explicaciones burdas y desarticuladas iniciales a otras más estructuradas y organizadas. La documentación de las diferentes aproximaciones elaboradas por cada estudiante son útiles para conocer y analizar los episodios de entendimiento de la situación que siguen los estudiantes al dar respuesta a las preguntas planteadas, proporcionando así elementos que permiten identificar aspectos del proceso de su desarrollo cognitivo (Lesh y Doerr, 2003).

Metodología y participantes.

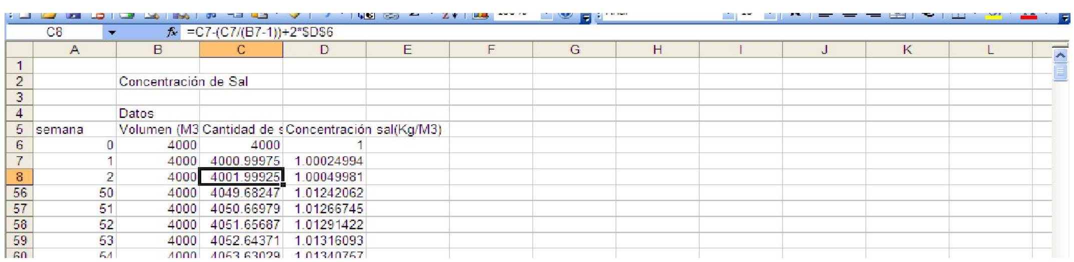
Las observaciones se realizaron durante un curso cuyo propósito fue desarrollar las habilidades de los estudiantes para solucionar problemas, mejorar su comprensión de conceptos y procesos matemáticos, e incidir en su concepción de las matemáticas. Se realizó en 16 sesiones de 3 horas semanales. Participaron 7 estudiantes de maestría en educación matemática orientada al nivel de bachillerato. La instrucción se basó en la resolución de problemas, la mayoría de los cuales no tenía solución única. Los contextos en los problemas fueron situaciones sobre poblaciones, créditos, concentraciones, desplazamiento, cálculos volumétricos y elaboración de mezclas. Al resolverlos los estudiantes podían usar computadoras, calculadoras o cualquier otro recurso. Se trabajó de manera individual, en parejas, y con exposiciones de las parejas ante el grupo completo. Los estudiantes realizaban sus aproximaciones en la computadora o en sus cuadernos, y elaboraron reportes, estos productos fueron recopilados en cada fase. Se audio grabaron las exposiciones y discusiones en el grupo.

Resultados.

La información utilizada proviene de los reportes elaborados por los estudiantes al enfrentar los diferentes problemas. Se analizó tratando de identificar aspectos característicos de los episodios seguidos por los participantes al resolver cada problema. Ilustro con un ejemplo los resultados que emergen durante las actividades de resolución de una de ellas.

***Concentración de sal en un estanque**. Un acuario contiene n unidades de agua. Cada semana se evapora una unidad de agua y debe ser reemplazada con agua fresca. El agua fresca contiene de manera uniforme cierta cantidad de sal, existiendo la posibilidad de que la concentración de sal en el acuario llegue a ser peligrosa para los peces. Para evitar este riesgo, al final de la semana, cuando el acuario tiene n – 1 unidades de agua, se saca una unidad más (dejando n-2 unidades de agua) y se adicionan 2 nuevas unidades de agua fresca. Esto no resuelve el problema, ya que sigue presentándose un incremento en la concentración de sal, pero menos que la que habría si no se removiera una unidad adicional. Describa la* *concentración de sal en el acuario de acuerdo con el tiempo. ¿En qué momento hay el doble de la concentración inicial?*

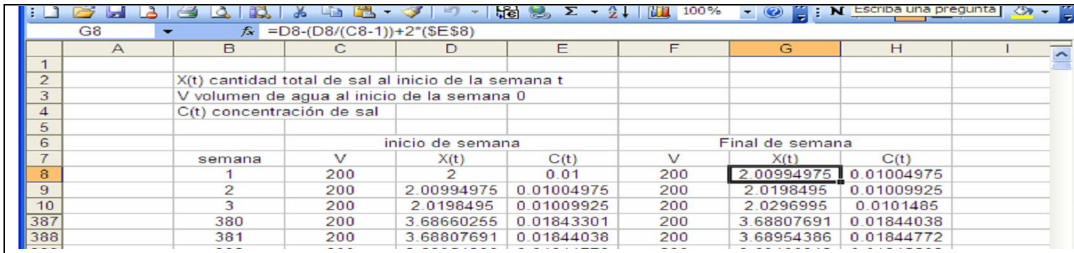
Las aproximaciones individuales iniciales se caracterizan porque los estudiantes analizan casos particulares, asignando valores numéricos al volumen de agua y a la concentración (o a la cantidad) de sal iniciales en el estanque, y por utilizar procedimientos recursivos en Excel, para determinar la concentración de sal al final de cada semana (fig. 1). En esta fase solo la estudiante I uso una aproximación algebraica. La comprensión del problema implica para los estudiantes responder preguntas relacionadas con la concentración de sal, con entender los factores y procesos que la modifican. El procedimiento recursivo es dado implícitamente en Excel, como el realizado por el estudiante G (fig. 1) que le permite obtener la cantidad de sal al final de una semana en términos de la cantidad de sal existente al final de la semana anterior, C7, del volumen de agua en el estanque B7, y de la concentración de sal inicial D6. Se obtiene la concentración de sal al final de la semana, considerando el cociente entre la cantidad de sal y el volumen de agua, al final de la semana. Obteniendo la concentración de sal al final de las siguientes semanas, repitiendo el procedimiento.


C8 =C7-(C7/(B7-1))+2*D6

	A	B	C	D
1				
2		Concentración de Sal		
3				
4		Datos		
5	semana	Volumen (M3	Cantidad de s	Concentración sal(Kg/M3)
6	0	4000	4000	1
7	1	4000	4000.99975	1.00024994
8	2	4000	4001.99925	1.00049981
56	50	4000	4049.68247	1.01242062
57	51	4000	4050.66979	1.01266745
58	52	4000	4051.65687	1.01291422
59	53	4000	4052.64371	1.01316093
60	54	4000	4053.63029	1.01340757

Figura 1. Fragmento del reporte del estudiante G después del trabajo individual, en el que supone un V de 400 m^3 y una concentración de 1kg/m^3.

El trabajo en parejas, permitió superar algunas dificultades, y mejorar la representación del proceso en Excel y de la algebraica. Los estudiantes hicieran explícitas los cambios en las variables volumen de agua, cantidad y concentración de sal, en las diferentes etapas del proceso, al inicio y al final de cada semana. Se observa que trabajar en parejas, implica explicar y clarificar el proceso de solución desarrollado en forma individual (figuras 2 y 3).


G8 =D8-(D8/(C8-1))+2*(E8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		X(t) cantidad total de sal al inicio de la semana t							
3		V volumen de agua al inicio de la semana 0							
4		C(t) concentración de sal							
5									
6				inicio de semana			Final de semana		
7		semana	V	X(t)	C(t)	V	X(t)	C(t)	
8		1	200	2	0.01	200	2.00994975	0.01004975	
9		2	200	2.00994975	0.01004975	200	2.0198495	0.01009925	
10		3	200	2.0198495	0.01009925	200	2.0296995	0.0101485	
387		380	200	3.68660255	0.01843301	200	3.68807691	0.01844038	
388		381	200	3.68807691	0.01844038	200	3.68954386	0.01844772	

Figura 2. Fragmento del reporte elaborado por los estudiantes C y G, mostrando la tabla en Excel modificada, respecto a la elaborada antes por G, incluyendo valores al inicio y al final de la semana. (Concentración de sal)

Durante esta fase de trabajo, la pareja formada por los estudiantes F e I, mejoran la representación algebraica del proceso iniciada por I. El estudiante F abandona la aproximación usando Excel, de manera que ellos no la utilizan para compararla con lo desarrollado algebraicamente. El proceso para obtener la expresión funcional se hace más sistemático, quizá debido a la necesidad de aclararse entre ellos cada paso del proceso de transformación en el estanque. Los errores algebraicos debidos a operaciones y simplificaciones indebidas son subsanados, permitiendo identificar un patrón y proponer una expresión general (Fig. 3). Se observa el cuidado puesto en identificar los pasos o eventos que se presentan cada semana en el estanque y que tienen que ver con la concentración de sal (pasos 1, 2 y 3). Otro aspecto relevante es el hecho de considerar el proceso recursivo. A pesar de ese interés en el proceso, no identifican en el proceso la etapa inicial y la etapa final, como las otras parejas. Esto los lleva a tener imprecisiones, como al señalar en el segundo párrafo la concentración y la cantidad de sal en la segunda semana, y luego pasar a la tercera, cuando se estarían refiriendo al inicio de la segunda semana, considerar el proceso y establecer cual sería la cantidad de sal y la concentración al finalizar la segunda semana y al inicio de la tercer semana (que son las mismas).

La exposición de los estudiantes ante el grupo propició la evaluación de lo realizado en parejas, en términos de responder a las preguntas y dudas de los otros participantes. Después de la presentación de las aproximaciones en Excel (dos parejas), se expuso la aproximación algebraica. Esta atrajo la atención hacia los aspectos estructurales del procedimiento y a considerar criterios para evaluar la relación entre los datos iniciales y los resultados obtenidos. Presentándose algunos problemas con la representación utilizada pues no les permitía identificar las fases del proceso. Así se incorporaron a esta aproximación elementos utilizados en el desarrollo del procedimiento en Excel, como son la identificación de estados inicial y final de las variables en el proceso semanal y la representación de la concentración de sal como una función del tiempo.

Para resolver el problema, primero identifiquemos nuestras variables:
x es la cantidad de sal en el agua, V es el volumen de agua inicialmente.

Paso 1. En la primera semana tenemos que la concentración de sal es $\frac{x}{V}$

Paso 2. Al final de la primera semana la concentración cambia a $\frac{x}{V-1}$ ya que se evapora una unidad de agua.

Paso 3. Cuando se saca una unidad más de agua de la pecera la concentración es $\frac{x-\frac{x}{V-1}}{V-2}$.

Paso 4. Al reponer las 2 unidades de agua al acuario nos queda la concentración: $\frac{x-\frac{x}{V-1}+\frac{2x}{V}}{V}$

………..

Por lo tanto la concentración de sal en el agua en la segunda semana es: $\frac{x(V^2-2)}{V^2(V-1)}$, y la cantidad de sal en la segunda semana es $\frac{x(V^2-2)}{V(V-1)}$

Para analizar que pasa en la tercera semana, sustituyamos

$$\frac{x(V^2-2)}{V(V-1)} \text{ por } x$$

y efectuemos los pasos 1,2,3 y 4 descritos anteriormente, la expresión de la concentración a la que debemos llegar es:

$$\frac{x(V^2-2)}{V^2(V-1)} \ldots(1),$$

si sustituimos la cantidad de sal, la concentración a la tercera semana nos queda:

$$\frac{\frac{x(V^2-2)}{V(V-1)}\bullet\frac{V^2-2}{1}}{V^2(V-1)}=\frac{\frac{x(V^2-2)^2}{V(V-1)}}{\frac{V^2(V-1)}{1}}=\frac{x(V^2-2)^2}{V^3(V-1)^2}$$

La cantidad de sal en este caso es $\frac{x(V^2-2)^2}{V^2(V-1)^2}$

Si sustituimos esta cantidad de sal en la expresión (1), la concentración de sal en el agua para la cuarta semana es:

$$\frac{\frac{x(V^2-2)^2}{V^2(V-1)^2}\bullet\frac{V^2-2}{1}}{V^2(V-1)}=\frac{\frac{x(V^2-2)^3}{V^2(V-1)^2}}{\frac{V^2(V-1)}{1}}=\frac{x(V^2-2)^3}{V^4(V-1)^3}$$

Si observamos las concentraciones de sal en las semanas 2,3 y 4 podemos proponer la siguiente expresión para la concentración de sal.

$$C_n=\frac{x(V^2-2)^{n-1}}{V^n(V-1)^{n-1}}$$

Figura 3 Fragmentos del reporte del trabajo en parejas realizado por los estudiantes F e I.

Las aportaciones expuestas en el grupo se analizaron en forma individual y se elaboró un nuevo reporte en forma individual, que se discutió con su pareja y se elaboró y realizó una nueva presentación al grupo. En ésta, todos los estudiantes aceptaron la expresión y los argumentos alcanzados por una de las parejas, quienes resaltaron la naturaleza recursiva del proceso, y utilizando este hecho, aunque en forma incorrecta, obtiene en forma simple una expresión algebraica, que los lleva a establecer que el proceso en la semana 2 se repite salvo por que la cantidad inicial de sal es X_1, y que así sucede con las siguientes semanas (figura 4).

Ya que al iniciar la primera semana hay $X_0 = nc$ cantidad de sal en el acuario.
Al final de cada una de las siguientes semanas habrá:

$$X_1 = X_0 - \frac{X_0}{n-1} + 2c = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)X_0 + 2\frac{X_0}{n} = X_0\frac{(n^2-2)}{n(n-1)}$$

si consideramos que al inicio de la semana 2 hay X_1 de sal:

$$X_2 = X_1\frac{(n^2-2)}{n(n-1)} = X_0\frac{(n^2-2)^2}{n^2(n-1)^2} \quad ,\ldots y\ tambien \quad X_k = X_0\frac{(n^2-2)^k}{n^k(n-1)^k}$$

la concentración en la semana k es: $C(k) = X_0\frac{(n^2-2)^k}{n^{k+1}(n-1)^k}$

Figura 4 Segmento del reporte del estudiante G que muestra la identificación de un proceso recursivo incorrecto.

Continuando con el proceso de responder las preguntas del problema, usan esta expresión para determinar el tiempo en el que la concentración alcanzaría un valor igual al doble de la concentración inicial, resolviendo la ecuación $2\frac{X_0}{n}=\frac{X_0(n^2-2)^k}{n^{k+1}(n-1)^k}$ usando un procedimiento numérico en Excel, que les proporciona k=15 como resultado.

En la discusión en grupo nadie puso en duda los resultados obtenidos, y no consideraron el procedimiento desarrollado en Excel durante la primera y segunda fase de trabajo en el que se observa un crecimiento lento de la concentración de sal. El instructor intervino para propiciar la identificación de esta discrepancia por los estudiantes y llevarlos a reflexionar sobre lo realizado, los conceptos de modelo y las representaciones de una situación o fenómeno. Planteó preguntas del tipo: ¿Cuál de los dos procedimientos proporciona la respuesta correcta? ¿Cuál de ellos proporciona una descripción adecuada del proceso? ¿Cómo lo podemos saber? ¿Qué criterio podemos utilizar para evaluar cada procedimiento?

Esto llevó a los estudiantes a considerar que las dos aproximaciones deberían proporcionar los mismos resultados, o muy parecidos, y el mismo comportamiento en lo general. Algunos revisaron el procedimiento en Excel y volvieron a considerar el carácter recursivo del mismo, lo cual utilizaron para obtener una nueva expresión algebraica, pero no detectaron el error cometido al deducir las expresiones algebraicas anteriores. Solo el estudiante G elaboró por escrito un nuevo reporte donde verificó la nueva expresión algebraica para la concentración de sal mediante un procedimiento en Excel para evaluarla.

Al ser entrevistado, se le preguntó sobre los resultados obtenidos y sobre lo que quería mostrar con la tabla:

> *Profesor (P): ¿Para que elaboraste la tabla?*
>
> *Estudiante G: Para ver que la concentración de sal tardaba en duplicarse. Esta es muy parecida a la primera tabla que elaboré.*
>
> *P: ¿Por qué no usaste las mismas cantidades? En tu primera tabla utilizaste un volumen y una concentración diferentes.*
>
> *G: es cierto, no se me ocurrió. Si los uso puedo ver que tan igual son los valores.*
>
> *P. ¿Tienes el procedimiento en Excel?*
>
> *G: No. Pero lo voy a hacer. De seguro deben ser muy parecidos. Pues aquí también la concentración crece muy lentamente.*

Conclusiones.

Es importante reflexionar sobre las conductas relevantes que exhibieron los participantes durante el desarrollo de las sesiones. Los acercamientos iniciales a los problemas, en general, fueron de tipo numérico, y parecían buscar una representación algebraica al problema. Esos primeros intentos, son parte fundamental para visualizar y comprender los datos relevantes y las relaciones particulares asociadas con la tarea. En este contexto, los participantes reconocen que podría haber varias formas para acercarse al problema y aunque con ciertas limitaciones, ellas son importantes para discutir significados y propiedades matemáticas incluidas en el proceso de resolución. El trabajo en parejas y la exposición ante el grupo, permiten el análisis y discusión de ellos. Así, los participantes conceptualizan el aprendizaje como un proceso continuo en el que sus ideas y acercamientos a las tareas son refinadas como resultado de un examen abierto en el que no solo piensan sobre el problema, sino que también discuten y critican las ideas y aproximaciones de otros participantes. En este contexto, la estructura y el desarrollo de las sesiones parece ser un ingrediente fundamental para generar una comunidad de aprendizaje que valore y acepte que el aprendizaje toma lugar dentro de un ambiente de indagación que refleja principios que son consistentes con la práctica y el desarrollo de la disciplina. En particular, los participantes reconocen que los intentos iniciales incoherentes para resolver los problemas pueden ser transformados en aproximaciones más robustas cuando el ambiente de aprendizaje valora y promueve la participación activa de los estudiantes.

Boaler, J. (2002). The development of disciplinary relationships: knowledge, practice and identity in mathematics classrooms (1). For the Learning of Mathematics 22(1), pp.42 - 47

Lesh, R. and Doerr, H. M. (Eds.) (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, NJ

Lingefjard, T. (2002). Mathematical modeling for preservices teachers: a problem from anesthesiology. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7.

Manouchehri, A. (2003). Patterns of reasoning about mathematical models: a case study of high school mathematics teachers. Focus on learning problems in mathematics. 25(2).

Mestre, J. (2002). Transfer of Learning: Issues and research agenda. National Science Foundation. National Academy Press, Washington, DC.

Schoenfeld, A. (2003). Math Wars. Educational Policy, Vol. 18, No. 1, 253-286 (2004) Tomado de http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Math_Wars.pdf el 26.01.2005

van Gelder, T. J. (2005). Teaching critical thinking: some lessons from cognitive science. College Teaching, 45, 1-6. Tomado el 12.01.06 de http://www.philosophy.unimelb.edu.au/tgelder/Publications.html

Palabras clave: profesores, problemas, instrucción.