

## LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES SOBRE EL CONCEPTO FUNCIÓN EN SITUACIONES VARIACIONALES

Víctor Javier Pech Pech, María Guadalupe Ordaz Arjona  
Universidad Autónoma de Yucatán. Facultad de Matemáticas  
azul021281@hotmail.com, oarjona@uady.mx  
Campo de investigación: Pensamiento variacional

México

Nivel: Medio

**Resumen.** *El tratamiento otorgado al concepto función en bachillerato hoy en día, lejos de favorecer la comprensión del concepto, propicia la memorización y algoritmia, desembocando esto en una serie de errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Es por ello que consideramos importante desarrollar actividades que incorporen variación y cambio, y enfrentar a los estudiantes a una situación no típicamente escolar. Es por ello, que nos planteamos como objetivo analizar las producciones de los estudiantes al presentarles a la función en situación variacional y explorar si las actividades diseñadas favorecen el surgimiento de argumentaciones de tipo variacional. Como metodología de investigación consideramos la ingeniería didáctica. Entre los resultados obtenidos después de experimentar las actividades, encontramos que los estudiantes sí logran dar argumentos de tipo variacional, sin embargo, dichos argumentos se ven limitados por el discurso escolar bajo el cual se han enfrentado a dicho concepto con anterioridad.*

**Palabras clave:** función, variación, producciones

### Introducción

El tratamiento dado al concepto función predominante en las clases de matemáticas hoy día es el que hace referencia a una regla de correspondencia, al respecto Tall (1992, citado en Escobedo y Montiel, 2007) menciona que, pese a ser buen fundamento matemático, puede no ser una buena raíz cognoscitiva y Freudenthal (1983, citado en Escobedo y Montiel, 2007) señala que aunque está constituida de una manera lógicamente formalizada, ésta ha oscurecido su significado como acción de asignación de variables y perdido su carácter dinámico para convertirse en algo puramente estático.

Como parte de un estudio sobre el Discurso Matemático Escolar en los colegios de bachilleres del estado de Yucatán (COBAY) Jarero y Ordaz (2009) reportan que en los libros utilizados por los profesores de precálculo del COBAY el concepto función se presenta como una correspondencia entre dos conjuntos, planteando representaciones numéricas, gráficas y algebraicas y por otra parte, que estudiantes y profesores, muestran dificultad conceptual al trabajar con el concepto función, particularmente, no distinguen apropiadamente función de ecuación.

Nicholas (1996, Citado en Hitt, 1996) sugiere como definición más apropiada para efectos de enseñanza preuniversitaria aquella en términos de relación entre variables, con lo cual coincidimos, ya que el actual tratamiento otorgado al concepto función no propicia ideas de variación y cambio en los estudiantes, sino que favorece la memorización y algoritmia, desembocando esto en una serie de errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Es por ello que consideramos importante desarrollar actividades que incorporen variación y cambio, y experimentarlas en un grupo de estudiantes.

En este trabajo nos planteamos como objetivo analizar las producciones de los estudiantes al presentarles a la función en situación variacional y explorar si las actividades diseñadas favorecen el surgimiento de argumentaciones de tipo variacional.

### Marco teórico

Enmarcamos este trabajo en la Socioepistemología, entendiéndola una aproximación teórica que permite reconocer al conocimiento matemático como de naturaleza social, en particular, al tratar con la matemática dentro de los sistemas didácticos, la relación entre la actividad que desarrolla el alumno y la generación de conocimiento (Cordero, 2001).

La socioepistemología, en tanto aproximación teórica que aborda desde una perspectiva sociocultural el problema de estudio de las matemáticas así como los fenómenos didácticos asociados a la misma, permite explicar la naturaleza de un discurso y mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento. Pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en las prácticas sociales, entre ellas podemos señalar la práctica social de la predicción la cual está íntimamente relacionada con la variación y el cambio, ya que para predecir es necesario cuantificar y analizar los cambios, es decir la variación es una herramienta de análisis necesaria para la predicción Zatti y Montiel (2007, citado en López, 2009).

Para el diseño de las actividades que conformaron la situación exploratoria consideramos elementos del pensamiento y lenguaje variacional, tomamos como referencia a Cantoral (2000): *“El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos*

*cognitivos y culturales con las que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales”.*

De esta forma, decimos que un estudiante utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejen y expresen el reconocimiento cuantitativo de cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (Cantoral 2000, citado en López 2009).

Los elementos del pensamiento y lenguaje variacional pretenden de alguna manera modificar lo establecido, es decir, requiere que los alumnos modifiquen, validen y construyan argumentos y esto sólo se puede hacer con situaciones que permiten que el alumno construya la respuesta y no simplemente recurra a la memoria.

### **Metodología**

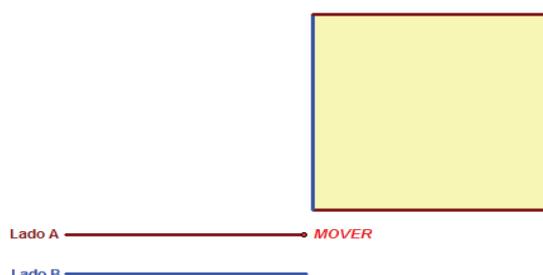
Nuestra investigación fue de carácter cualitativa y como metodología consideramos a la ingeniería didáctica, la cual se caracteriza como un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, las cuales implican realizar la planeación, el desarrollo, la observación y el análisis de las mismas (Artigue, 1995). Considera cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y evaluación.

El análisis preliminar, constó de un análisis epistemológico del concepto función, análisis de la enseñanza tradicional de dicho concepto y sus efectos, y un análisis de las concepciones, obstáculos y dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del concepto. En la concepción y análisis a priori diseñamos la secuencia exploratoria y realizamos el análisis de las posibles respuestas de los estudiantes. Posteriormente, seleccionamos la muestra de estudiantes y se procedió a trabajar con ellos durante dos sesiones de dos horas cada una, los seis estudiantes eran de cuarto semestre del COBAY que ya habían visto el tema de funciones en un curso de precálculo que cursaban en ese momento. Trabajaron dos equipos cada uno conformado por tres personas, dos hombres y una mujer en cada equipo.

En la fase de análisis a posteriori y evaluación, se realiza el análisis de los resultados obtenidos después de experimentar la secuencia exploratoria, éstos, se contrastaron con los obtenidos en el análisis a priori y se obtienen las conclusiones del trabajo.

La secuencia exploratoria constó de cuatro actividades diseñadas en el software Sketchpad en donde los estudiantes podían realizar lo que se les indicaba, por la extensión del trabajo, sólo daremos muestra de la primera actividad.

*Actividad 1. Mueve el punto rojo y describe el efecto que produce en la figura*



Esta actividad se dividió en dos partes:

- 1) Se les pidió a los alumnos que describieran todo lo que observarían que ocurría al mover el punto rojo, esto con la finalidad de que los estudiantes empezaran a hablar de cambios, qué pudieran observar qué cambia, cómo cambia, etc.
- 2) Se les pedía que encontrarán “la gráfica” que describe la manera en la que cambia el área de la figura al cambiar el tamaño del lado A.

### Resultados

A continuación presentamos algunos de los resultados obtenidos en la Actividad 1.

El lado A tiene cierta proporción con el lado B: Si el lado A aumenta, si lado B disminuye, Si el lado B aumenta, el lado A disminuye. Si A llega a su punto límite,  $B=0$ , Si B llega a su punto límite,  $A=0$ . En cualquier punto donde A y B se muevan, forman un cuadrilátero, excepto en sus puntos límites

Si A esta en el punto limite izquierdo la figura desaparece (o no hay)

Si B esta en el punto limite derecho la figura desaparece (o no hay)

Si A esta en el punto limite derecho, se convierte en una línea

Si B esta en el punto limite izquierdo, se convierte en una línea.

Independiente en donde movamos un punto, si esta se mueve cierta distancia a la izquierda, esa misma distancia la hace a la derecha.

*Las areas respectivas formadas en los puntos donde se mueve a la misma distacia es la misma Si  $a=1$   
 $b=1$       Si  $a=2$   $b=1$       Si  $a=3$   $b=0$  donde  $a=base$ ,  $b=altura$*

*en el punto medio en un punto    en un punto maximo*

Cuadro 1. Transcripción de la respuesta del estudiante A del equipo 1 a la Actividad 1

El lado A y el lado B tienen cierta *proporción*, van a la par los dos.

- Pusimos que si el lado A *aumenta* el lado B *disminuye* y si el lado B *aumenta* es lo contrario, el lado A *disminuye*;

- También pusimos que si A llega a su punto límite entonces B es igual a cero y si B llega a su punto límite A es igual a cero, luego pusimos que *en cualquier punto donde A y B se muevan forman un cuadrilátero excepto en sus puntos límites que es cuando pasa que A está en su punto límite izquierdo entonces la figura desaparece y es lo que va a pasar lo contrario con el B que si está en su punto límite derecho, entonces la figura también desaparece.*

Cuadro 2. Transcripción de la respuesta del equipo 1 a la Actividad 1

En la respuesta de equipo podemos observar que logran identificar qué varía y cómo varía, pero por otra, en la parte dos de la actividad, se les pedía obtener la gráfica que describía la función, es decir, no se le pidió una expresión algebraica o fórmula, pese a ello, los estudiantes se centraron en hallar una fórmula para posteriormente poder graficar.

Su altura se va haciendo más grande es decir se va alargando y *de acuerdo con su base* se va siendo más estrecho, hasta que desaparece.

Cuando el punto tiende a la izquierda su base es la que tiende a desaparecer y su altura (B) va ir disminuyendo (viceversa a la anterior)

\* Su área siempre va ser la misma pero tendiendo a cero su área ya no es igual sino va a ser cero,

\* *Es una función porque su imagen va ser relacionada es decir que cada lado A hay un lado B*



Cuadro 3. Transcripción de la respuesta del estudiante A del equipo 2 a la Actividad 1

En esta actividad, este estudiante afirma que es función ya que cumple con ser una relación entre los elementos de dos conjuntos, a cada elemento de un conjunto A, le asocia, un elemento del conjunto B. Y esto utiliza para plasmarlo en una gráfica.

Otro estudiante también muestra ver la función como relación entre dos conjuntos, ya que afirma que a cada elemento del conjunto A le asocia la de un conjunto B, y para dar la gráfica que

describe la función, halla primero una regla de correspondencia para posteriormente poder graficar, esto lo vemos en el siguiente cuadro.

Podemos observar que asigna a cada elemento de A uno de B.

- \* En la proporción en que se hace más grande la línea (al mover el punto), la otra disminuye.
- \* Cada línea (A y B) representan dos lados que son paralelos entre si y juntos forman un cuadrilátero (excepto en sus puntos límites).
- \* Cuando A y B tienen el mismo tamaño, se forma un cuadrado.
- \* Si el punto B llega al extremo derecho, entonces la figura que forma el punto A desaparece.
- \* Si el punto A llega al extremo derecho, entonces el punto B desaparece y la figura que forma A es una línea horizontal.

- Al mover el punto A, *el área* que forma la figura es igual en todos, excepto en los extremos y cuando la figura formada es un cuadrado.

- *El área mayor es cuando la figura forma un cuadrado*

- *El lado A tiene cierta proporción con el lado B*

*Si a aumenta B disminuye y Si a disminuye B aumenta*

En la segunda parte, *Si  $x=y$  Cuadrado (Área mayor)*

$x+1=y-1$  Rectángulo

$x-y=0$

Cuadro 4. Transcripción de la respuesta del estudiante B del equipo 2 a la Actividad 1

Pusimos que la línea roja representa su longitud y la azul su altura, y cuando la línea roja disminuye de tamaño la azul aumenta y viceversa, la longitud de A se recompensa en B, así la longitud máxima en A es la mínima en B y la mínima en A es la máxima en B, el área siempre es la misma excepto cuando A o B son nulos, es decir, cero.

Cuadro 5. Transcripción de la respuesta del equipo 1 a la Actividad 1

Los resultados de la actividad 1 dan evidencia de que los estudiantes logran observar cambio y argumentar utilizando ideas variacionales, por ejemplo, en términos de proporcionalidad, sin embargo, en la segunda parte, al pedirles una gráfica de la función se centran en la expresión algebraica y hacen a un lado las ideas de variación y cambio que habían observado, esto ya ha sido reportado como un obstáculo en el aprendizaje, ya que los estudiantes consideran que una función tiene que tener una expresión algebraica y que de ésta se obtiene la gráfica.

Las tres restantes actividades nos muestran que los alumnos para justificar sus respuestas recurren a la memoria, a lo algebraico, es decir, a pesar de que logran dar respuesta correcta, primero intentan buscar una expresión o relación algebraica que ya conozcan, posteriormente la comparan con la situación planteada.

### Conclusiones

El analizar las producciones de los estudiantes en la situación exploratoria nos ha permitido observar que los estudiantes si construyen conocimiento matemático en torno al concepto función, al enfrentarse al concepto función en situación variacional logran construir argumentos utilizando ideas variacionales, sin embargo, la práctica docente condiciona dichas argumentaciones, ya que, en algunos casos los hace recurrir a la memoria o centrarse en encontrar expresiones algebraicas, esto es, por el discurso escolar al cual han sido enfrentados los limita y por ellos algunas de sus argumentaciones giran en torno a aspectos algebraicos.

La noción que parecen tener los estudiantes del concepto función aún después de la experimentación queda limitada a una expresión algebraica o fórmula ya que insistentemente trataban de buscar en cada actividad planteada una expresión algebraica aún cuando lo que se les pidiera fuera por ejemplo, la gráfica de la función.

Consideramos que la experimentación de la secuencia exploratoria pudiera tener resultados diferentes y más favorables en estudiantes donde no hubieran tenido conocimiento previo sobre el concepto función, es decir, donde no hayan sido enfrentado un discurso escolar del concepto función basado en la idea de ésta como una fórmula, que tiene una representación la cual es una gráfica.

### Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo*. Bogotá: Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En Cantoral R. (Ed). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 69 – 91). México. Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4 (2)*, 103-128.

Escobedo, A.; Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. G. Buendía (Presidente), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (pp. 568 – 580). Tlaxcala, México.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

López, S. (2009). Un estudio sobre la noción de función constante. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad de Yucatán. México.

Jarero, M.; Ordaz, M. (2009) Un estudio sobre el discurso matemático escolar en el nivel medio superior del estado de Yucatán. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 247-256. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.