CONSTRUCCIÓN ESQUEMA DEL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL

Marcela Parraguez, Asuman Oktaç
PUCV — Chile
CICATA-IPN — México
CINVESTAV-IPN — México
marcela.parraguez@ucv.cl, oktac@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado — Nivel: Superior

Resumen. *Nuestra investigación se sitúa en el estudio del concepto de espacio vectorial, que concierne al álgebra lineal, bajo un enfoque cognitivo donde se utiliza la teoría APOE como marco teórico y metodológico. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación determinan la estructura general de nuestro estudio. En la parte empírica de esta investigación se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 10 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes. Esta investigación ha sido financiada parcialmente por el proyecto Conacyt 60763-H.*
Palabras clave: teoría APOE y espacio vectorial

Introducción

En investigaciones anteriores el álgebra lineal ha recibido la atención de investigadores en diferentes países. Investigadores franceses (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 1997) hablan acerca del obstáculo del formalismo. Estos autores concluyen que "para la mayoría de los estudiantes, el Álgebra Lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas que nunca pueden ellos imaginarse", y sugieren una aproximación alternativa llamada "meta-lever" para introducir y desarrollar conceptos abstractos de Álgebra Lineal. Otra investigación apunta a las dificultades que los estudiantes tienen cuando están aprendiendo el concepto de espacio vectorial (Maracci, 2008).

En nuestra investigación tomamos un enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE. El proceso de investigación en esta teoría conlleva el realizar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir el concepto matemático en cuestión (en este caso el de espacio vectorial), llamado descomposición genética (Dubinsky, 1991). La realización de este modelo forma la primera componente de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996). En la descomposición genética que preparamos para el concepto espacio vectorial, describimos: las construcciones mentales que consideramos prerrequisitos, las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y asimilación) que determinan un camino mediante el cual un estudiante puede construir de manera adecuada dicho concepto y los niveles de la triada de la construcción de un esquema: *intra*, *inter* y *trans*. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de enseñanza y colección, análisis y verificación de datos, determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de nuestra descomposición genética se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 10 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes. Algunos hallazgos de nuestra investigación dan información respecto a: el cero vector, operaciones binarias y coordinación entre las operaciones de un espacio vectorial.

Marco Teórico: Teoría APOE

En nuestra investigación tomamos el enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE, como marco teórico. El uso de la Teoría APOE para explicar la construcción de los conceptos de Álgebra Lineal es reciente (Trigueros y Oktaç, 2005; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006), aunque este acercamiento teórico ha sido usado con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos en Cálculo, Análisis, Álgebra Abstracta, Matemática Discreta y Lógica. La Teoría APOE está interesada en las construcciones mentales que los estudiantes hacen cuando ellos están aprendiendo un concepto matemático.

Nuestra principal pregunta de investigación fue:

¿Cómo construyen los estudiantes el concepto de espacio vectorial?

Particularmente una pregunta que sirvió de guía en este trabajo de investigación fue: ¿Qué papel juegan algunas nociones del álgebra lineal específicas para que los estudiantes logren una comprensión profunda del concepto de espacio vectorial? En la pregunta inmediatamente anterior, cuando decimos *"comprensión profunda", e*stamos pensando que las siguientes construcciones estarían involucradas: interiorizar acciones para llegar a una concepción proceso; coordinar dos o más procesos y encapsular varios procesos para construir nuevos objetos.

Con esta investigación buscamos aportar desde nuestra perspectiva, un análisis cognitivo de la evolución de uno de los conceptos básicos del álgebra lineal: el concepto de espacio vectorial. Nuestra posición en esta investigación fue abordar el concepto de espacio vectorial desde su definición matemática formal como una estructura formada por un conjunto con una operación binaria, que satisface axiomas, junto a otro conjunto llamado cuerpo que tiene otras dos operaciones binarias (Nosotros estamos usando la expresión "operación binaria" en un sentido general; estamos conscientes que en una multiplicación por un escalar los elementos operados no provienen del mismo conjunto), que agregado con el conjunto anterior definen otra operación entre ellos y satisfacen otros axiomas. Cabe aclarar que las descripciones que hacemos de la construcción de conceptos involucrados son en términos cognitivos. Para dar respuesta a esta pregunta de investigación nos propusimos los siguientes objetivos particulares: identificar y analizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes de álgebra lineal al construir el concepto de espacio vectorial, mediante la metodología de investigación planteada por la teoría APOE.

La teoría APOE está basada en la epistemología de Piaget. Toma de ella la abstracción reflexiva como mecanismo de construcción de conocimiento que se activa a través de la acción del sujeto sobre objetos matemáticos (Dubinsky, 1991). A su vez, considera su acción a través de mecanismos mentales: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión que son fundamentales en la construcción de conceptos matemáticos.

Los objetos procesos y acciones relacionados al concepto espacio vectorial forman una estructura coherente llamada un *esquema* que puede ser evocada para resolver situaciones problema. Un nuevo objeto puede ser *asimilado* por un esquema existente; de esta manera se tiene un esquema ampliado para incluir nuevos objetos. De acuerdo a Piaget y García (1989) el desarrollo de un esquema pasa a través de tres niveles: *Intra, Inter y Trans*. En el nivel *Intra* el nuevo objeto construido está presente, junto a otros objetos y procesos, pero en esta etapa el individuo no está consciente de las relaciones que pueden existir entre ellos. En el nivel *Inter* estas relaciones empiezan a estar presente y el nivel *Trans* está caracterizado por estar consciente de la estructura completa y el individuo puede decidir si es que una situación dada puede ser resuelta por ese esquema en particular.

Descomposición genética del concepto espacio vectorial

Siendo el espacio vectorial nuestro tema de interés en este estudio, propusimos en Parraguez & Oktaç (2010), una descomposición genética (ver *Figura 1*) basada en nuestra experiencia como profesores y aprendices de este tema, y resultados de investigaciones previas que están disponibles.

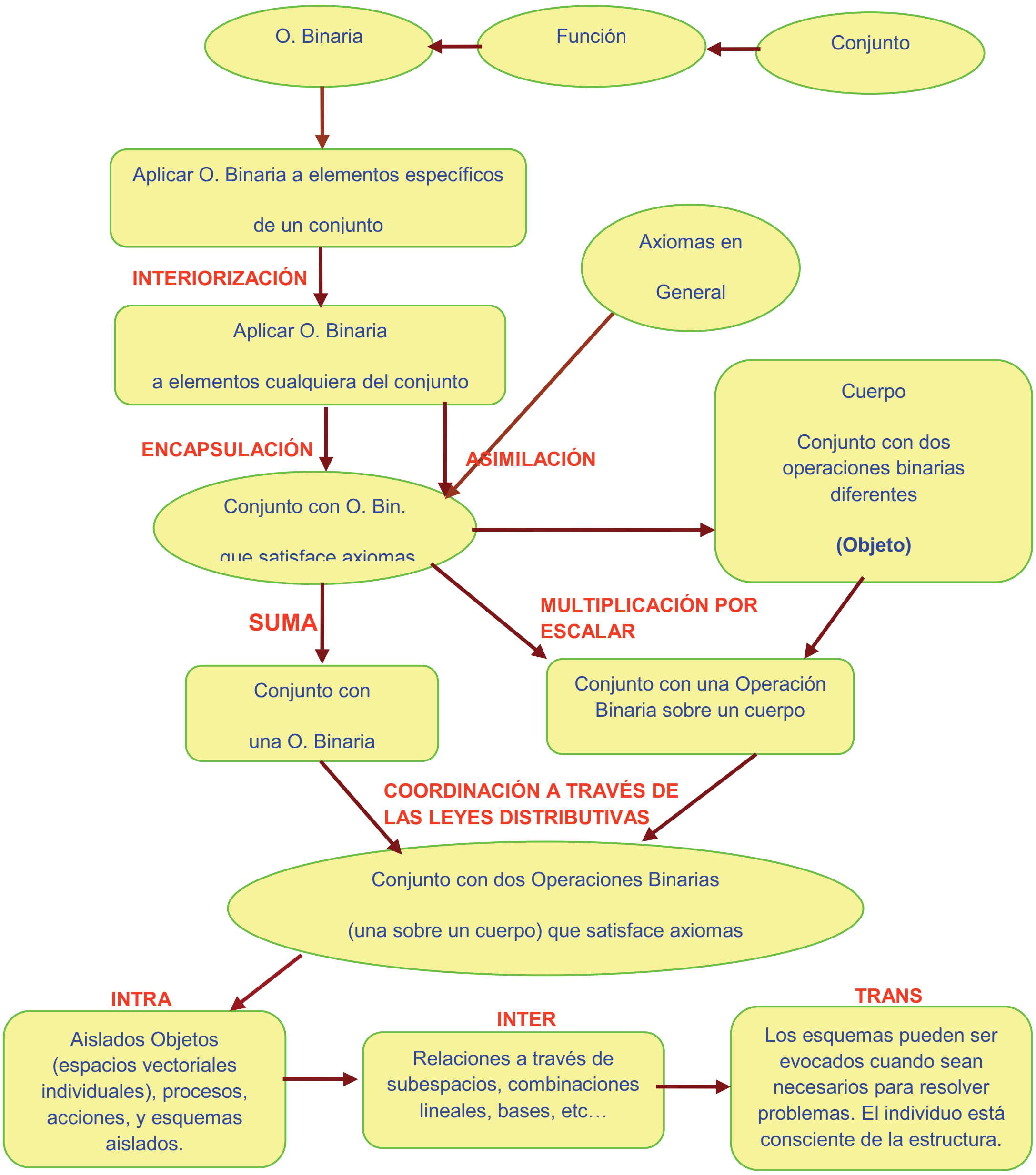

Figura 1. *Descomposición genética del concepto espacio vectorial* (Parraguez & Oktaç, 2010)

De acuerdo a la descomposición genética presentada en Parraguez & Oktaç (2010), el concepto espacio vectorial es un esquema que es construido fundamentalmente por la relación de tres esquemas: *conjunto, operación binaria y axioma*. La coordinación de los procesos relacionados con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalar juega un papel importante para que emerja un nuevo objeto que puede ser llamado un espacio vectorial, y que evoluciona en tres niveles: Intra, Inter y Trans.

A continuación mostramos algunos de los criterios que caracterizaron en nuestro estudio, cada uno de los niveles de esquema de espacio vectorial.

Consideramos que un estudiante se encuentra en un *nivel de esquema INTRA* del concepto espacio vectorial, cuando por ejemplo en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Para chequear que una estructura $(K, V, +, \cdot)$ no es un espacio vectorial recurren a averiguar uno por uno los axiomas que definen un espacio vectorial, sin mostrar una visión global.
- La averiguación de vectores linealmente independiente/dependiente se realiza mediante una combinación lineal igual al cero vector de Rn.
- La operación suma y multiplicación por escalar son consideradas como las usuales en la estructura CuerpoConjunto: $+$ y $\cdot$. No hay consciencia que una misma estructura CuerpoConjunto puede tener asociada un sin número de operaciones Suma y Ponderación.

En un *nivel de esquema INTER* del concepto espacio vectorial, el estudiante en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Hay aceptación que una estructura CuerpoConjunto pueda tener definidas operaciones Suma y Ponderación diferentes a las usuales: $\oplus, \odot$.
- Reconoce que todos los espacios vectoriales tienen un cero vector, tienen bases, tienen dimensión, entre otros.
- Reconoce que el cero vector no siempre es un objeto con ceros y acepta la posibilidad que el cero vector de algún espacio vectorial sea un elemento del espacio que no tenga ceros.

Finalmente un estudiante se encuentra en un *nivel de esquema TRANS* del concepto espacio vectorial, cuando por ejemplo en sus argumentaciones se muestran algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Reconoce adecuadamente todas las relaciones entre el espacio vectorial y las nociones del álgebra lineal.
- Trabaja con ejemplos nuevos para él y más complicados de espacios vectoriales.

Ejemplo de la entrevista:

Con el fin de mostrar un ejemplo del nivel de esquema Intra del concepto espacio vectorial, a continuación presentamos una parte del trabajo realizado por un estudiante durante la entrevista.

El estudiante 7 (ES7) trabaja los problemas como si las operaciones suma y multiplicación por escalar fueran las usuales y/o el vector nulo fuera la n-upla (0,0,…,0). Miremos para ello la argumentación que realizó en la pregunta 8, inciso 4:

Pregunta 8 de la entrevista

Sea $V = \{(x,y,z) \in R3 \,/\, x,y,z > 0\}$ *un espacio vectorial con las operaciones:*

SUMA: $u \oplus v = (xa, yb, zc)$ *donde* $u = (x,y,z)$, $v = (a,b,c)$ $\in V$

MULTIPLICACION POR UN ESCALAR:

$\lambda \otimes u = (x^{\lambda}, y^{\lambda}, z^{\lambda})$ *donde* $u = (x,y,z) \in V$ *y* $\lambda \in R$.

Sea W el subespacio de todos los puntos de V situados sobre el plano $z = 1$.

8.1 Escriba dos vectores de W.

8.2 ¿Cuál es el vector nulo de W?

8.3 Si $v = (3,2,1) \in W$ *, ¿Quién es* $-v$ *?*

8.4 ¿Los vectores $(2,2,1)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ *de W son linealmente independientes?*

8.5 ¿El conjunto $\left\{(3,3,1),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ *es una base para W?*

La argumentación del ES7 en la pregunta 8.4 (ver *Figura 2*) nos da evidencias que el esquema

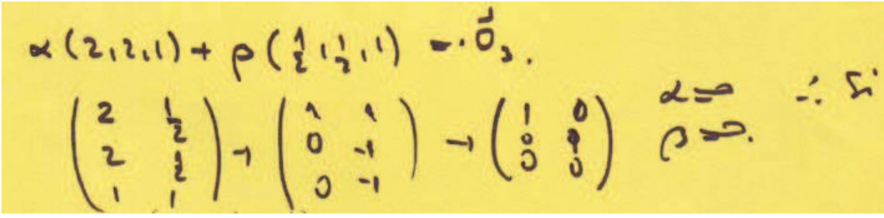

Figura 2. *Escrito del ES7 frente a la pregunta 8.4 de la entrevista.*

de espacio vectorial no se ha desarrollado en su mente más que a un nivel Intra, entonces es difícil para ES7 hacer las conexiones necesarias, entre el objeto del concepto espacio vectorial, las operaciones binarias no usuales y los elementos de la estructura algebraica propiamente tal definida en un espacio vectorial (elemento neutro) y el concepto de dependencia lineal.

Una interpretación de estos resultados, es que la evolución cognitiva del esquema espacio vectorial no es algo que esté necesariamente vinculado a conocer muchos elementos adicionales del concepto, sino que la coherencia del esquema, distingue claramente lo que es un espacio vectorial con todas sus propiedades de aquello que no lo es.

A manera de conclusión

En esta investigación documentamos cómo los estudiantes conciben el cero vector y las operaciones suma (+) y producto por escalar (*) involucradas en estructura de espacio vectorial: (K,V,+,*), donde K es un cuerpo y (V,+) es un grupo abeliano.

Además un resultado importante que arrojó esta investigación es que el espacio vectorial evoluciona en la medida que los estudiantes acepten vectores nulos distintos del usual, así como también, operaciones suma de vectores y multiplicación por escalar no usuales que lo definen.

El paso de un nivel a otro lo hemos caracterizado a través de las relaciones entre diferentes tipos de construcciones que los estudiantes establecen y de los elementos matemáticos del álgebra lineal que ellos utilizan. Entre estos elementos destacamos los siguientes: Elemento neutro, Combinaciones lineales, Conjuntos linealmente independiente/dependiente, Base, Conjunto generador, Dimensión; que son algunas nociones del álgebra lineal, relacionados con el concepto espacio vectorial, que los estudiantes han utilizado en esta investigación, para manifestar la fortaleza de su esquema espacio vectorial, es decir, para justificar, una comprensión profunda de este último.

Hemos descubierto, como resultado de nuestra investigación que un criterio a tomar en cuenta para ampliar la caracterización de los niveles sería lo relacionado con el cero vector. Por ello hemos realizado una modificación a nuestros niveles de esquemas considerando que un estudiante que se encuentra en un nivel de esquema INTRA del concepto espacio vectorial, piensa que el cero vector de un espacio vectorial es la n-upla (0,0,…,0), elemento constituido sólo por el número cero de *R*; y que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema INTER del concepto espacio vectorial, cuando reconoce que el cero vector de un espacio vectorial no siempre es (0,0,…,0), aceptando que el cero vector es un elemento no necesariamente constituido por ceros.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds) Research in collegiate mathematics education, Vol. 2 (pp. 1-32), Providence: American Mathematical Society.

Dorier J.-L., Robert, A., Robinet , R. y Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire : L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question (pp. 105-147), Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Revista Educación Matemática, 20(2), 65-89.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40(2), 265-276.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 157-176.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces: a viewpoint from APOS theory. In D. Hughes-Hallett, I. Vakalis y H. Arikan (Eds) CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics, Estambul, Turquía: John Wiley & Sons Inc.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2112- 2124.

Piaget, J. y García, R. (1989). Psychogenesis and the history of science (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press.