

ANÁLISIS DE LAS CONCEPTUALIZACIONES ERRÓNEAS EN CONCEPTOS DE ÁLGEBRA: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE PRIMER INGRESO

Greivin Ramírez, Jeffry Chavarría, Marianela Mora

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Costa Rica

Liceo Occidental de Cartago

gramirez@itcr.ac.cr, jchavarría@itcr.ac.cr, mmcnela@gmail.com

Campo de investigación: Pensamiento algebraico

Nivel: Medio

Resumen. *En el presente artículo se reportan los resultados de una investigación que clasifica las conceptualizaciones que poseen estudiantes de primer ingreso universitarios de Costa Rica en temas de álgebra elemental, tales como simplificación de expresiones algebraicas y factorización. El estudio está apoyado en el modelo SOLO Taxonómico propuesto por Biggs & Collis, 1982.*

Palabras clave: formas de razonamiento, errores, álgebra

Introducción

En este artículo se exponen los resultados de una investigación, realizada en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, en la que se analizan y clasifican las formas de razonamientos mostradas por algunos estudiantes de primer ingreso universitarios en ejercicios de álgebra. A pesar de que los estudiantes recibieron en secundaria formación en dichos temas y durante un semestre recibieron instrucción básica en un curso universitario, siguen presentando obstáculos epistemológicos que han perdurado durante todo el proceso de instrucción. El concepto de obstáculo epistemológico fue desarrollado por Bachelard quien indica que “un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden a la larga trabar...” (Bachelard, 1982, p. 16).

En esta investigación nos interesa dar respuesta a la pregunta ¿Cómo evolucionan las formas de razonamientos que muestran los estudiantes de primer ingreso universitario al realizar ejercicios de álgebra, tales como la simplificación de expresiones y la factorización?

Marco conceptual

En las últimas tendencias en la investigación acerca del razonamiento, pensamiento y cultura algebraica, el desarrollo de niveles o jerarquías para describir el desarrollo cognitivo de los sujetos de estudio, ha llegado a ser un objetivo importante de investigación.

Adoptamos el interés de Socas por clasificar las formas de razonamiento de los estudiantes para explicar los errores que estos comenten:

El análisis de los errores tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores organizar estrategias generales específicas para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y por otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos. (Socas, 1997, p. 30)

Concordamos con el punto de vista de Godino, Batanero y Font quienes indican que “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 74).

Entre los diversos modelos que se han propuesto para jerarquizar el desarrollo cognitivo se encuentra el modelo taxonómico SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs & Collis (1982). SOLO es un modelo que permite describir procesos involucrados en el aprendizaje, estableciendo categorías por orden de complejidad.

El modelo consta de cuatro categorías o niveles, las cuales se describen a continuación:

1. *Preestructural*: La tarea no es abordada adecuadamente, ya que los estudiantes poseen información aislada que no tiene organización ni sentido.
2. *Uniestructura*: Los estudiantes se enfocan en un aspecto relevante, realizan conexiones simples y obvias pero no tienen una comprensión de lo que hacen.
3. *Multiestructural*: Los estudiantes se enfocan en más de un aspecto de la tarea, pero son tratados en forma independiente, ya que no los relacionan entre sí.
4. *Relacional*: Los estudiantes integran diversos aspectos como un todo coherente con estructura y significado.

Metodología

La investigación es cualitativa y corresponde a un estudio de caso aplicado a estudiantes universitarios de distintas carreras y de nuevo ingreso que matricularon un curso introductorio de matemática durante el primer semestre de 2008.

Los principales instrumentos, de recolección de información fueron: un examen de diagnóstico, que consta de 9 ítems abiertos, diseñado para explorar la comprensión que tienen los estudiantes sobre conceptos algebraicos y geométricos. Además de entrevistas grabadas en formato de video.

El examen fue aplicado a 1102 estudiantes. Se analizaron dos ítems a un 10% de la población (seleccionados aleatoriamente) con el fin de evaluar los errores cometidos. De estos, se analizaron a algunos estudiantes por ítem (seleccionados por conveniencia) una vez que finalizaron el curso introductorio para comparar las conceptualizaciones mostradas después de la instrucción.

Resultados

Los resultados serán discutidos en dos niveles: un nivel descriptivo y un segundo nivel, donde los sujetos son ubicados en categorías determinadas por las formas de razonamiento que exhibieron después de un semestre de instrucción. Se presenta el análisis completo de dos ítems correspondientes a los temas de simplificación de expresiones algebraicas.

Análisis del ítem 1

1. Simplifique al máximo la expresión $(a^{-2} - 2b^{-1}) \cdot (b - 2a^2)^{-1}$

Esta pregunta tiene como objetivo indagar si los estudiantes son capaces de interpretar las notaciones matemáticas empleadas para la representación de expresiones algebraicas para luego poder utilizar las propiedades de los números reales para simplificar la expresión.

A continuación se presentan los errores cometidos por los estudiantes por orden de incidencia.

- Interpreta $2b^{-1}$ como $(2b)^{-1}$, el estudiante interpreta $2b^{-1} = \frac{1}{2b}$ como correcto.
- Realiza la distribución de un exponente respecto a la sustracción. Realiza $(b - 2a^2)^{-1} = b^{-1} - 2a^{-2}$ como correcto.
- Asume como válida la igualdad $(a^{-2} - 2b^{-1}) = \frac{1}{a^2 - 2b}$.
- Simplifica los sumandos del numerador de una fracción racional con los del denominador como si estos fueran factores.

Tabla 1: Clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO según las respuestas dadas en el ítem 1 del cuestionario de diagnóstico

Nivel	Curso Introdutorio	%
Preestructural	28	33.33%
Uniestructural	24	28.57%
Multiestructural	19	22.61%
Relacional	13	15.47%
Total	84	100%

En cuanto a la clasificación de los niveles de razonamiento utilizando el modelo SOLO, se obtuvieron los resultados que se exponen en la tabla 1.

Al estudiante 50 (en adelante Daniel) y el 822 (en adelante Carlos) por sus errores cometidos durante el examen de diagnóstico fueron ubicados en el nivel Uniestructural, por lo que se les realizó una entrevista la cual tuvo como objetivo comparar sus conceptualizaciones después de haber llevado un curso remedial.

En el examen de diagnóstico Daniel nos brinda como respuesta al ítem 1 lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2b}\right) \cdot \frac{1}{(b-2a^2)^2} = \frac{2b-a^2}{2a^2b} \cdot \frac{1}{b-2a^2} = \frac{2b-a^2}{2a^2b(b-2a^2)} = \frac{1}{b-2a^2}$$

Mientras la respuesta brindada por Carlos, en el mismo ítem, fue:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2b}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2a^2}\right) = \left(\frac{2b \cdot a^2}{2ba^2}\right) \cdot \left(\frac{2a^2 - b}{2ab}\right) = \frac{-a^2 \cdot -b}{a^2b}$$

Ambos estudiantes comenten el error a y el error d de la lista de los más frecuentes mostrados anteriormente. Carlos, además, comete el error b .

Se planeó una entrevista semiestructurada con los siguientes reactivos:

1. Simplifique al máximo la siguiente expresión: $2x^{-2} \cdot x$.
2. Expresar como cocientes las expresiones siguientes: $3t^{-1}$, $(2c)^{-2}$

3. Desarrolle y simplifique, de ser posible, las siguientes expresiones: $(2b-1)^2$, $(2-5b)^{-1}$, $(3x)(3x-1)^{-1}$, $\frac{x+2(x+1)}{x+1}$, $\frac{x+2(x+1)}{x+2}$.

Los objetivos de la entrevista fueron:

1. Indagar si los estudiantes han superado el error *a* cometido durante el examen de diagnóstico.
2. Observar la forma en que los estudiantes trabajan con expresiones simples.
3. Indagar si el estudiante fue capaz de superar el error *b* cometido durante el examen de diagnóstico un semestre atrás.

A continuación se analizará y clasificará lo realizado por los estudiantes durante las entrevistas.

Entrevista de Daniel

En los ejercicios 1 y 2 Daniel nos muestra los siguientes procedimientos:

Es claro que Daniel no ha superado el error *a* cometido durante el examen de diagnóstico hace un semestre.

En el ejercicio 3 Daniel reaccionó de la siguiente manera:

Al cuestionarle y señalarle a Daniel el hecho de que en el numerador hay una suma en lugar de una multiplicación, Daniel duda del procedimiento que realizó e intenta realizarlo de otra manera. Finalmente, Daniel no logra superar el nivel Uniestructural ya que continúa cometiendo los mismos errores que realizó durante el examen de diagnóstico, a pesar de eso Daniel logra aprobar el curso con una nota de 70.

$$2x^{-2} \cdot x = \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x}$$

$$3t^{-1} = \frac{1}{3t}$$

Uniestructural:

Comete el error *a*.

En ambos ejercicios

$$\frac{x+2(x+1)}{(x+1)} = x+2$$

Preestructural:

simplifica un sumando como si fueran factores. Comete el error *d*.

Entrevista de Carlos

En el ejercicio 1 Carlos realizó el siguiente procedimiento.

The image shows two handwritten mathematical expressions. The first is $2x^{-2} \cdot X$ with a small '-2' written above the 'x'. The second is $2(\frac{1}{x})^{1/2} \cdot X$.

Preestructural: Lo que realiza no tiene ningún sentido matemático.

Carlos expresa su intención diciendo “Ahí lo que quiero es convertir este negativo, entonces, para poder convertirlo hay que darle vuelta a la expresión. Luego recapacita y cambia el $\frac{1}{2}$ por 2.

En el ejercicio 2 Carlos reacciona correctamente por lo que se ubica en este en el nivel relacional.

The image shows a handwritten algebraic simplification. It starts with $\frac{x + 2(x+1)}{x+2}$. The next line shows $\frac{x + 2x + 2}{x+2}$ with the '2' in the denominator crossed out. The final result is $2x$.

Preestructural: Cancela sumandos como si fueran factores. Comete el error *d*.

Por último en el ejercicio 3 Carlos comete el mismo error que cometió durante el examen de diagnóstico un semestre atrás.

Luego Carlos analiza el procedimiento y se dispone a realizar correcciones en el mismo, diciendo que al cancelar los 2 debe quedar un uno por lo que cambia la respuesta por $2x+1$.

Carlos al igual que Daniel, no logra superar el nivel Uniestructural en el que se ubicó inicialmente. Los errores cometidos durante la prueba de diagnóstico persisten a pesar de recibir un curso remedial durante un semestre. Carlos aprueba el curso con una nota de 70.

Análisis del ítem 2

2. Factorice completamente la siguiente expresión $6am - 2n + 4an - 3m$

Esta pregunta tiene por objetivo indagar si los sujetos conocen el concepto de factorización de una expresión; así como identificar y aplicar de manera correcta el método de factorización, en este caso el método de factor común y agrupación.

A continuación se presentan los errores cometidos por los estudiantes por orden de incidencia.

a) Cuando realiza la agrupación cambia de suma a producto, considerando la igualdad $6am - 2n + 4an - 3m = (6am - 3m)(4an - 2n)$ como válida.

b) Agrupa términos que no generan un factor común, considerando como válido las igualdades $6am - 2n + 4an - 3m = (6am - 2n) + (4an - 3m)$
 $= 2(3am - n) + (4an - 3m)$

c) Realiza la suma de los coeficientes numéricos de monomios no semejantes

Utilizando la clasificación de los niveles de razonamiento bajo el modelo del SOLO Tenemos la clasificación que se muestra en la tabla 2.

Tabla 2: Clasificación de los sujetos por categorías utilizando el modelo SOLO según las respuestas dadas a la pregunta 2 del diagnóstico.

En el examen de diagnóstico los estudiantes 614 (en adelante José) y 10 (en adelante Rocío) cometiendo los principales errores, lo que los ubicó en el nivel Uniestructural, por lo que se les entrevistó con el objetivo comparar sus conceptualizaciones actuales con las con las tenidas durante la prueba, luego de haber recibido instrucción durante un semestre.

Nivel	Curso	%
	Introdutoria	
Preestructural	23	27.38%
Uniestructural	16	19.04%
Multiestructural	7	8.33%
Relacional	38	45.23%
Total	84	

En el examen de diagnóstico, las respuestas brindadas por Rocío y José fueron respectivamente:

$$\begin{array}{l}
 (6am - 3m)(-2n + 4an) \quad (6am - 3m)(-2n + 4an) \\
 3m(2a - 1) \quad 2n(-1 + 2a) \quad 3m(2a - 1) \quad 2n(-1 + 2a) \\
 R/ (3m + 2n)(2a - 1) \quad (2a - 1)(3m + 2n)
 \end{array}$$

Ambos estudiantes comente el error a , convirtiendo la adición en una multiplicación cuando hacen la agrupación de los términos.

Para la entrevista, se planearon, estratégicamente, los siguientes ejercicios.

- Factorice completamente las expresiones: a) $ax - ay$ b) $x^2 + xy$

2. Factorice completamente la expresión. a) $(x-1)^2 y + (x-1)z$ b) $a(x-y) + (x-y)$

3. Factorice completamente las expresiones: a) $ab + a + b + 1$ b) $2xy + 3y + 4x + 6$

La entrevista tiene los siguientes objetivos:

1. Indagar el nivel de madurez que posee el estudiante para reconocer el factor común en expresiones simples y expresiones generalizadas.
2. Analizar la madurez adquirida por los estudiantes después de haber llevado durante un semestre un curso remedial.
3. Evaluar si el estudiante tiene la capacidad de realizar una agrupación conveniente para factorizar completamente una expresión dada.

Entrevista de Rocío y José

Tanto en el ejercicio 1 y 2 los estudiantes responden correctamente, por lo tanto ambos se ubican en el nivel Relacional. En el caso de Rocío, expresa tener duda lo que la hace cometer un pequeño error que luego corrige. En el caso de José, realiza el procedimiento con mucha seguridad y sin cometer error alguno. Por lo que se concluye que Rocío se encuentra en el nivel Multiestructural mientras que José en el nivel Relacional ambos superan el nivel Uniestructural. Ambos aprueban el curso, José con nota de 80 y Rocío con nota de 75.

Conclusiones

Los estudiantes Daniel y Carlos mostraron los mismos errores, al simplificar expresiones algebraicas, que poseían al realizar el examen de diagnóstico, por lo que la instrucción durante un semestre en un curso remedial, no hizo que superaran el nivel uniestructural que tenían inicialmente. Estos estudiantes siguen cometiendo errores graves.

En el tema de factorización fue en el que los estudiantes tuvieron un mayor crecimiento, reconociendo el factor común en expresiones más elaboradas, sin embargo, cometían algunos errores como el no colocar la adición cuando realizaban la agrupación. Es importante que los estudiantes sean sometidos a procesos metacognitivos en los que autorregulen su propio

aprendizaje, de tal manera que busquen las conexiones que se requieren para alcanzar el nivel relacional.

Del Puerto, Minnaard y Seminara recomiendan, citando a Sócrates, que “es a través de la crítica racional y la autocrítica como podemos examinar y corregir los errores, para de esta forma lograr el conocimiento genuino” (Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2004, p.11).

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The Solo Taxonomy*. New York: Academic Press.

Del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación* 43, 3-25.

Godino, J. Batanero C. y Font V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Universidad de Granada.

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación* 35, 1-14.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. Universidad La Laguna.

Ruiz, A. (2006). *Escuela francesa de didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica*. Costa Rica: San José. CIMM/UCR.