

## OS CONHECIMENTOS SUPOSTOS DISPONÍVEIS NA TRANSIÇÃO ENTRE O ENSINO MÉDIO E SUPERIOR: A NOÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Sérgio Destácio Faro, Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos

UNIBAN

Brasil

srfaro@ig.com.br, alvesdias@ig.com.br, taniammcampos@hotmail.com

Campo de investigación: Pensamiento algebraico

Nivel: Medio

**Resumen.** *Nossa pesquisa sobre as diferentes possibilidades de tratamento da noção de sistemas de equações lineares na transição entre o Ensino Médio e Superior. O referencial teórico escolhido é a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997) apoiado das abordagens teóricas em termos de quadro de Douady (1984), de pontos de vista de Rogalski (1995) e complementado pela teoria antropológica do didático de Bosch e Chevallard (1999), que permite analisar as diferentes relações institucionais esperadas existentes assim como as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes em função das anteriores. Observamos que apesar da coerência entre as relações institucionais esperadas e existentes, os resultados obtidos pelos estudantes nas macro-avaliações, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior, não correspondem às expectativas.*

**Palabras clave:** sistemas lineares, níveis de conhecimento, quadro

### Introdução

Na passagem de uma etapa da escolaridade a outra, os professores, em geral, reclamam que os estudantes não dispõem dos conhecimentos necessários para desenvolver os conteúdos matemáticos indicados para aquela determinada etapa.

No Ensino Superior essa questão acaba sendo mais grave, pois os professores precisam desenvolver os conteúdos que constam dos planos de ensino, ou seja, é preciso trabalhar todos os conteúdos do programa, mesmo que muitas vezes os estudantes não disponham dos conhecimentos prévios que serão utilizados como ferramentas para a solução das tarefas que podem ser propostas em relação a esses conteúdos.

Além disso, as macro-avaliações reduzem as possibilidades de revisitar determinados conteúdos conforme se avança na escolaridade.

Para isso, nosso objetivo é estudar a questão da transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior quando se considera a noção de sistemas de equações lineares e seu tratamento no Ensino Médio e a influência desse trabalho no Ensino Superior.

Sendo assim, escolhemos o referencial teórico abaixo descrito para efetuar as nossas análises.

### Referencial teórico da pesquisa

Escolhe-se como referencial teórico central dessa pesquisa a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997), que permite compreender melhor as possíveis articulações de quadros conforme definição de Douady (1984); os ostensivos de representação necessários em função dos não ostensivos em jogo e as relações institucionais e pessoais que sobrevivem nas etapas escolares escolhidas, conforme definições de Bosch e Chevallard (1999), consideramos ainda a noção de pontos de vista segundo definição de Rogalski (1995).

Robert (1997) define os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, a saber:

O nível *técnico* que corresponde à aplicação de uma definição ou teorema. Exemplo: Determinar o conjunto solução de um sistema não homogêneo.

O nível *mobilizável* que corresponde à utilização de uma noção quando ela é pedida explicitamente em uma tarefa, por exemplo: Dado um sistema não homogêneo pedir para o estudante discutir as possibilidades de solução.

O nível *disponível* que corresponde à utilização de uma noção sem que esta seja pedida explicitamente, o estudante pode encontrar exemplos e contra exemplos, o estudante possui situações de referência. Por exemplo:

(Planejamento de Produção) Um fabricante produz três tipos diferentes de produtos químicos: A, B e C. Cada produto deve passar por duas máquinas de processamento X e Y. Nesse processo, cada uma das máquinas é utilizada durante os seguintes intervalos de tempo: 1. Uma tonelada de A necessita 2 horas na máquina X e 2 horas na máquina Y. 2. Uma tonelada de B necessita 3 horas na máquina X e 2 horas na máquina Y. 3. Uma tonelada de C necessita 4 horas na máquina X e 3 horas na máquina Y. A máquina X está disponível 80 horas por semana e a máquina Y 60 horas por semana. Como a administração não quer manter as dispendiosas máquinas X e Y paradas, ela gostaria de saber quantas toneladas de cada produto devem ser produzidas para que as máquinas sejam utilizadas de maneira ótima. Admite-se que o fabricante possa vender tantos produtos quanto produz. (Kolman e Hill, 2006, p. 6)

Robert (1997) observa que é preciso considerar os conhecimentos prévios dos estudantes e que estes têm certa experiência sobre o trabalho que lhes é destinado quando se trata de desenvolver

as matemáticas escolares, o que nos conduz a considerar que a noção de sistemas de equações lineares, que é introduzida na sétima série do Ensino Fundamental II (alunos de 13-14 anos) é revisitada no Ensino Médio e Superior, o que nos permite supor que os estudantes já tenham certa familiaridade com essa noção e com suas representações podendo aplicar pelo menos as técnicas que lhe são associadas e articular o quadro dos sistemas lineares com os quadros da geometria analítica e da álgebra linear.

Isso nos leva a considerar a noção de quadro definida por Douady (1992), que considera que um quadro:

[...] é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas. (Douady, 1992, p.135).

Quando estudamos a noção de sistemas lineares é importante considerar a noção de ponto de vista de Rogalski (1995) que considera *que dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los*. (Rogalski, 1995 apud Andrade, 2006, p.25).

Para melhor compreender o papel da noção de sistemas de equações lineares na transição entre o Ensino Médio e superior utilizamos a teoria antropológica do didático de Chevallard e Bosch (1999) que considera que a atividade matemática é composta por certo número de tarefas, assim como toda atividade humana, e para cumprir essas tarefas, são desenvolvidas as técnicas, que para se tornarem viáveis devem ser compreensíveis e justificáveis, dando assim lugar ao desenvolvimento das “tecnologias” ou discurso tecnológico, essas tecnologias sendo, por sua vez, objetos de novas tecnologias que Chevallard identifica como teorias.

Além disso, consideramos as noções de ostensivos, ou seja, as escritas, símbolos, palavras e gestos mobilizados na atividade matemática. Como por exemplo, um nome, uma notação, um gráfico ou ainda um esquema gestual que pode estar realmente presente e que pode ser efetivamente manipulado na sua materialidade, e não ostensivos que por sua vez são as noções, conceitos, idéias que aparecem como a matéria prima das técnicas, tecnologias e teorias e que só podem ser

evocados com a ajuda dos objetos ostensivos, ou seja, a manipulação dos ostensivos é regrada pelos não ostensivos e esses só podem ser evocados com a ajuda dos ostensivos, existindo assim uma dialética necessária entre eles.

Para efetuar as análises definimos a seguinte metodologia.

### **Metodologia da pesquisa**

Iniciamos com o estudo da noção de sistemas de equações lineares no Ensino Médio para compreender melhor quais os conhecimentos que podem ser considerados como mobilizáveis ou disponíveis pelos estudantes quando ingressam no Ensino Superior.

Identificamos em que sistema de tarefas e práticas se insere esses conhecimentos.

Analisamos as exigências institucionais para o ensino e aprendizagem da noção de sistemas de equações lineares, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior, via análise de livros didáticos para esses níveis e as macroavaliações institucionais.

Construímos uma grade de análise para melhor identificar o conjunto de tarefas desenvolvidas no Ensino Médio e Superior e observar se existe uma coerência entre as propostas para esses dois níveis.

### **A grade de análise**

Escolhemos construir um inventário das possíveis tarefas associadas à noção de sistemas de equações lineares que são, em geral, trabalhadas no Ensino Médio e Superior. Busca-se desta forma analisar as relações institucionais existentes para o ensino e aprendizagem das noções de sistemas de equações lineares nestes segmentos e sobre quais conhecimentos podemos apoiar a introdução de novas noções no Ensino Superior.

Exemplo de aplicação da grade de análise:

*Tarefa:* Verificar se um elemento dado é solução de um sistema de equações lineares.

Na figura 1 apresenta-se o exemplo de uma tarefa retirada de um dos livros didáticos de Ensino Médio analisados.

Veja:

1º) (5, 1) é solução do sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$ , pois  $\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13 \\ 3 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 10 \end{cases}$

2º) (2, 3) não é solução do sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$ , pois  $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \neq 10 \end{cases}$

3º) (1, 3, -2) é solução do sistema  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$ . Verifique.

4º) (0, 2, 5) não é solução do sistema  $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$ . Verifique.

Figura 1: Dante 2008, p.252

- Nível de conhecimento exigido na solução tarefa: mobilizável em relação à representação de pontos em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  (EM) e  $\mathbb{R}^n$  (ES);
- Ostensivos utilizados no enunciado: ostensivo de representação explícita de sistemas de equações lineares;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico e algébrico;
- Pontos de Vista: cartesiano, isto é, o sistema é reduzido a um sistema de equações independentes e paramétrico, a representação do conjunto solução é dado pela combinação linear de vetores independentes que geram o subespaço vetorial associado mais uma solução particular;
- Não Ostensivos utilizados na solução da tarefa: pares ordenados, valor numérico, método de solução de um sistema linear;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: Disponível em relação à determinação do valor numérico, isto é, identificar  $x$ ,  $y$  e  $z$  na representação de ponto dada e substituir em todas as equações para o exemplo acima.

### Resultados encontrados

Observamos que no Ensino Médio a ênfase é dada aos métodos de resolução de sistemas de equação lineares, sem preocupação em trabalhar as possibilidades de solução do sistema. Em

geral, a noção de sistema linear utilizada para modelar problemas matemáticos, de outras ciências e do cotidiano.

Não existe um trabalho mais específico no quadro dos sistemas lineares que é deixado para ser trabalhado no superior, onde as macro avaliações pedem explicitamente o estudo das interseções de retas e planos em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  e hiperplanos em  $\mathbb{R}^n$  que podem ser discutidas por meio do estudo das possibilidades de solução de um sistema linear.

### Considerações finais

A noção de sistemas de equações lineares possibilita ainda a análise das relações institucionais existentes tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior para esse objeto matemático assim como a análise das relações que se espera tenham sido desenvolvidas em função das relações institucionais existentes, isto é as possíveis relações pessoais associadas às relações institucionais existentes.

Verificou-se que para o Ensino Médio as tarefas associadas à noção de sistemas de equações lineares estão mais relacionadas aos diferentes métodos de solução de sistemas para aplicações em física e em exemplos cotidianos, em geral, não ultrapassando os sistemas  $3 \times 3$  e dando pouca ênfase ao estudo das possibilidades de solução dos sistemas e dos sistemas com parâmetros. Esse trabalho fica quase que exclusivamente a cargo do Ensino Superior.

As tarefas típicas encontradas para o Ensino Médio nos livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM (Brasil, 2005) estão de acordo com a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (Brasil, 2000) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio + – PNC+ (Brasil, 2006), onde existe ainda a sugestão de se trabalhar a noção de sistemas lineares articulada com as noções de retas e planos da Geometria Analítica e com a noção de função afim, isto é, mesmo deixando o estudo das possibilidades de solução de um sistema linear para o Ensino Superior verifica-se que existe uma preocupação com o desenvolvimento de um trabalho articulado entre quadro algébrico e geométrico.

Finalmente, observou-se na avaliação do Ensino Médio do Estado de São Paulo que existe uma coerência entre as relações institucionais existentes e o que é cobrado dos estudantes, mesmo se os resultados por eles apresentados ainda não corresponde às expectativas.

Dessa forma, acredita-se que uma reflexão associada ao ensino e aprendizagem de um determinado conteúdo matemático, que leve em conta as possibilidades de articulação de diferentes quadros da própria matemática ou de outras ciências, dos pontos de vista que lhe são associados assim como dos ostensivos que podem ser utilizados como ferramentas do trabalho a ser efetuado, podem auxiliar pesquisadores, professores e estudantes a compreender melhor o valor cultural da matemática no mundo atual assim como sua importância para a inserção do estudante no mercado de trabalho.

### Referências bibliográficas

Andrade, S. N. (2006). Possibilidade de articulação entre as diferentes formas de conhecimento: A noção de função afim. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Grenoble: Recherches en didactique des mathématiques 19(1), 77-123.

Brasil. (2000). Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, SEMTEC.

Brasil. (2006) Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza e suas tecnologias. Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: SEMTEC. Acesso em: 20/03/2010. Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>

Brasil. (2005) Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005. Matemática. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: SEMTEC

Dante, L. R. (2008). Matemática. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1984). Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques. Paris : IREM de l'Université de Paris VII.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM 6, 132-158.

Kolman, B. & Hill, D.R. (2006) Álgebra Linear com aplicações. Brasil: LTC.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate (pp. 193-212). França: Houlgate.

Rogalski, M. (1995). Notas manuscritas do seminário em São Paulo. Brasil.